**WEiZ, kier. Ekonomia, 11EK-SD, 12EK-SD, Ekonomia matematyczna ćw. do wykł. 12 (2019/2020)**

**ZADANIE 1**. Firma działa w warunkach wolnej konkurencji i wytwarza 1 produkt $y$ zużywając 2 czynniki produkcji: kapitał $k$ i pracę $z$. Proces produkcji opisuje funkcja:

$$y=f\left(k,z\right)=k^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}$$

$$Wyprowadź:$$

1. Funkcję produkcyjnego popytu na czynniki:

 $\left(\overbar{k},\overbar{z}\right)=$ $ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)$

1. Funkcję (optymalnej) podaży towaru $\overbar{y}=η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
2. Funkcję zysku $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
3. Funkcję kosztów$ c\left(y\right)$

***Rozwiązanie***

Ad (**a**) Należy rozwiązać zadanie

$$\max\_{k,z>0} \left\{pf\left(k,z\right)-v\_{1}k-v\_{2}z\right\}$$

gdzie: $p>0$ $- $cena towaru wytwarzanego, $v\_{1},v\_{2}>0$ – ceny czynników (kapitału i pracy). Mamy:

$$\max\_{k,z>0}\left\{pk^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}-v\_{1}k-v\_{2}z\right\}$$

Funkcja $F\left(k,z\right)=pk^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}-v\_{1}k-v\_{2}z$ jest (silnie) wklęsła, więc w celu rozwiązania tego zadania wystarczy rozwiązać układ równań:

$\frac{d}{dk}F\left(k,z\right)=\frac{1}{4}pk^{-\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{4}}-v\_{1}=0$

$\frac{d}{dz}F\left(k,z\right)=\frac{1}{4}pk^{\frac{1}{4}}z^{-\frac{3}{4}}-v\_{2}=0$.

Otrzymujemy:

$\overbar{k}=ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{3}{2}}v\_{2}^{\frac{1}{2}}}$

 $\overbar{z}=ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{1}{2}}v\_{2}^{\frac{3}{2}}}$.

Ad (**b**)

$\overbar{y}=η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=f\left(\overbar{k},\overbar{z}\right)=\left(\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{3}{2}}v\_{2}^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{1}{2}}v\_{2}^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Po przekształceniach dostajemy:

$η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{1}{4} ∙\frac{p}{\sqrt{v\_{1}v\_{2}}}$.

Ad (**c**). Z definicji:

$π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=p η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)-v\_{1}ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)-v\_{2}ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$,

$$zatem:$$

$π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=p∙\frac{1}{4} ∙\frac{p}{\sqrt{v\_{1}v\_{2}}}-v\_{1}∙\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{3}{2}}v\_{2}^{\frac{1}{2}}}-v\_{2}∙\frac{1}{16}\frac{p^{2}}{v\_{1}^{\frac{1}{2}}v\_{2}^{\frac{3}{2}}}$.

$Po przekształceniach$:

$π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{1}{8}∙\frac{p^{2}}{\sqrt{v\_{1}v\_{2}}}$.

Ad (**d**). Ponieważ

$c\left(y\right)=\min\_{\begin{array}{c}f\left(k,z\right)=y\\y>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$,

$$więc należy rozwiązać zadanie:$$

$\min\_{\begin{array}{c}k^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}=y\\y>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$.

Zadanie to jest równoważne z następującym:

 $\min\_{\begin{array}{c}k∙z=y^{4}\\y>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$. (\*)

 Jest to zadanie ma poszukiwanie minimum warunkowego. W tym celu budujemy funkcję Lagrange’a zadania (\*):

$L\left(k,z,λ\right)=v\_{1}k+v\_{2}z+λ\left(y^{4}-k∙z\right)$.

Należy rozwiązać układ równań:

$$\frac{∂L}{∂k}=v\_{1}-λz=0$$

$$\frac{∂L}{∂z}=v\_{2}-λk=0$$

$\frac{∂L}{∂λ}=y^{4}-kz=0$.

Rozwiązując go dostajemy:

$$\overbar{k}=y^{2}\sqrt{\frac{v\_{2}}{v\_{1}}}$$

$$\overbar{z}=y^{2}\sqrt{\frac{v\_{1}}{v\_{2}}}$$

a stąd:

$c\left(y\right)=v\_{1}\overbar{k}+v\_{2}\overbar{z}=v\_{1}y^{2}\sqrt{\frac{v\_{2}}{v\_{1}}}+v\_{2}y^{2}\sqrt{\frac{v\_{1}}{v\_{2}}}$.

Po przekształceniach:

$c\left(y\right)=2y^{2}\sqrt{v\_{1}v\_{2}}$.

**ZADANIE 2.** Przedsiębiorstwo funkcjonujące w gospodarce konkurencji zużywa 2 czynniki produkcji, kapitał $k$ i pracę $z,$ wytwarzając 1 towar $y$ zgodnie z funkcją produkcji:

$y=f\left(k,z\right)=k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}$.

$$Wyprowadź:$$

1. Funkcję produkcyjnego popytu na czynniki $ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)$
2. Funkcję (optymalnej) podaży towaru $ η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
3. Funkcję zysku $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
4. Funkcję kosztów$ c\left(y\right)$

***Rozwiązanie***

Ad (**a**)

Należy rozwiązać zadanie

$$\max\_{k,z>0}\left\{p\left(k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)-v\_{1}k-v\_{2}z\right\}$$

Funkcja $F\left(k,z\right)=p\left(k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)-v\_{1}k-v\_{2}z$ jest (silnie) wklęsła, więc wystarczy rozwiązać układ równań:

$\frac{d}{dk}F\left(k,z\right)=\frac{1}{2}pk^{-\frac{1}{2}}-v\_{1}=0$

$\frac{d}{dz}F\left(k,z\right)=\frac{1}{2}pz^{-\frac{1}{2}}-v\_{2}=0$.

Otrzymujemy:

$\overbar{k}=ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\left(\frac{p}{2v\_{1}}\right)^{2}$

 $\overbar{z}=ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\left(\frac{p}{2v\_{2}}\right)^{2}$.

Ad (**b**)

$\overbar{y}=η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=f\left(\overbar{k},\overbar{z}\right)=\overbar{k}^{\frac{1}{2}}+\overbar{z}^{\frac{1}{2}}=\frac{p}{2v\_{1}}+\frac{p}{2v\_{2}}=\frac{p}{2}\left(\frac{1}{v\_{1}}+\frac{1}{v\_{2}}\right)$.

Ad (**c**). $Mamy:$

$$π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=pη\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)-v\_{1}ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)-v\_{2}ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=$$

$=\frac{p^{2}}{2}\left(\frac{1}{v\_{1}}+\frac{1}{v\_{2}}\right)-v\_{1}\left(\frac{p}{2v\_{1}}\right)^{2}-v\_{2}\left(\frac{p}{2v\_{2}}\right)^{2}$.

$Po przekształceniach$:

$π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{p^{2}}{4}\left(\frac{1}{v\_{1}}+\frac{1}{v\_{2}}\right)$.

Ad (**d**). $Należy rozwiązać zadanie:$

$\min\_{\begin{array}{c}k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=y\\y>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$.

Budujemy funkcję Lagrange’a:

$L\left(k,z,λ\right)=v\_{1}k+v\_{2}z+λ\left(y-k^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right)$.

Należy rozwiązać układ równań:

$$\frac{∂L}{∂k}=v\_{1}-\frac{1}{2}λk^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{∂L}{∂z}=v\_{2}-\frac{1}{2}λz^{-\frac{1}{2}}=0$$

$\frac{∂L}{∂λ}=y-k^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}=0$.

Rozwiązując go dostajemy:

$$\overbar{k}=\left(\frac{v\_{2}y}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}$$

$$\overbar{z}=\left(\frac{v\_{1}y}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}$$

a stąd:

$$c\left(y\right)=v\_{1}\overbar{k}+v\_{2}\overbar{z}=v\_{1}\left(\frac{v\_{2}y}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}+ v\_{2}\left(\frac{v\_{1}y}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}$$

Po przekształceniach:

$c\left(y\right)=\frac{v\_{1}v\_{2}y^{2}}{v\_{1}+v\_{2}}$.

**ZADANIE 3.** Wyprowadź wzór na funkcję kosztów na rynku konkurencyjnym w przedsiębiorstwie zużywającym 2 czynniki produkcji - kapitał $k$ oraz pracę z - i wytwarzającym 1 towar $y$ zgodnie z funkcją produkcji:

$y=f\left(k,z\right)=\left(k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$Rozwiązanie$$

. $Należy rozwiązać zadanie:$

 $\min\_{\begin{array}{c}\left(k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=y\\y>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$ (\*)

Wprowadźmy oznaczenie $q=y^{\frac{3}{2}}$. Wówczas zadanie (\*) jest równoważne z zadaniem:

$$\min\_{\begin{array}{c}k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=q\\q>0\end{array}}\left\{v\_{1}k+v\_{2}z\right\}$$

Budujemy funkcję Lagrange’a:

$L\left(k,z,λ\right)=v\_{1}k+v\_{2}z+λ\left(q-k^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right)$.

Należy rozwiązać układ równań:

$$\frac{∂L}{∂k}=v\_{1}-\frac{1}{2}λk^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{∂L}{∂z}=v\_{2}-\frac{1}{2}λz^{-\frac{1}{2}}=0$$

$\frac{∂L}{∂λ}=q-k^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}=0$.

Rozwiązując go dostajemy:

$$\overbar{k}=\left(\frac{v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}q^{2}$$

$$\overbar{z}=\left(\frac{v\_{1}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}q^{2}$$

Wówczas:

$$c\left(y\right)=v\_{1}\overbar{k}+v\_{2}\overbar{z}=v\_{1}\left(\frac{v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}q^{2}+ v\_{2}\left(\frac{v\_{1}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}q^{2}==v\_{1}\left(\frac{v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^{2}+ v\_{2}\left(\frac{v\_{1}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{2}\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^{2}=$$

Po przekształceniach:

$c\left(y\right)=\frac{v\_{1}v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}y^{3}$.

**Zadania proponowane do samodzielnego rozwiązania**

1. W gospodarce rynkowej mamy przedsiębiorstwo wytwarzające jeden towar $(y)$ i zużywające dwa czynniki produkcji, kapitał $(k)$ i pracę $(z)$. Proces produkcji opisuje funkcja:

$$y=f\left(k,z\right)=2k^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{4}}$$

$$Wyprowadź:$$

1. Funkcję produkcyjnego popytu na czynniki:

 $\left(\overbar{k},\overbar{z}\right)=$ $ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)$

1. Funkcję (optymalnej) podaży towaru $\overbar{y}=η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
2. Funkcję zysku $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
3. Funkcję kosztów$ c\left(y\right)$

**Odp.**

Ad (a) $ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)=\left(\frac{p^{4}}{2v\_{1}^{3}v\_{2}},\frac{p^{4}}{4v\_{1}^{2}v\_{2}^{2}}\right)$

Ad. (b) $η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{p^{3}}{v\_{1}^{2}v\_{2}}$.

Ad (c) $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\frac{p^{4}}{4v\_{1}^{2}v\_{2}}$.

Ad (d) $c\left(y\right)=\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}v\_{1}^{\frac{2}{3}}v\_{2}^{\frac{1}{3}}$.

1. Przedsiębiorstwo funkcjonuje w warunkach wolnej konkurencji wytwarzając 1 produkt $y$ oraz zużywając 2 czynniki produkcji: kapitał $k$ i pracę $z$. Proces produkcji opisuje funkcja:

$$y=f\left(k,z\right)=\left(k^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$Wyprowadź:$$

1. Funkcję produkcyjnego popytu na czynniki:

 $\left(\overbar{k},\overbar{z}\right)=$ $ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)$

1. Funkcję (optymalnej) podaży towaru $\overbar{y}=η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$
2. Funkcję zysku $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)$

**Odp.**

 Ad (a)

$$ξ\left(p,v\right)=\left(ξ\_{1}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right),ξ\_{2}\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)\right)=\left(\left(\frac{p}{3v\_{1}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{p}{3v\_{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{v\_{1}}{v\_{1}+v\_{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ad (b) $η\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{v\_{1}+v\_{2}}{v\_{1}v\_{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

 Ad (c) $π\left(p,v\_{1},v\_{2}\right)=2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{v\_{1}+v\_{2}}{v\_{1}v\_{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Wyznacz funkcję kosztów firmy działającej w warunkach wolnej konkurencji, wytwarzającej 1 towar i zużywającej 2 czynniki zgodnie z funkcją produkcji:

$$y=f\left(k,z\right)=\frac{k∙z}{k+z}$$

**Odp.**  $c\left(y\right)=\left(\sqrt{v\_{1}}+\sqrt{v\_{2}}\right)^{2} $y.