1. Elementy logiki matematycznej, zbiory

<u>Definicja 1.</u> Zdaniem nazywamy każdą wypowiedź, której można przypisać dokładnie jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę (1) lub fałsz (0).

<u>Przykład 1.</u> Rozważmy następujące wypowiedzi:

Warszawa jest stolicą Polski.
Kraków jest stolicą Polski.
Czy Warszawa jest stolicą Polski?
Pojedź do Krakowa.
Na Marsie jest życie.

Dwie pierwsze wypowiedzi są zdaniami, odpowiednio prawdziwym i fałszywym, następne trzy zdaniami nie są, ale ostatnie może nim kiedyś zostać.

Przy pomocy spójników logicznych na zdaniach można wykonywać pewne operacje, tworząc nowe zdania. Poniższa definicja określa najważniejsze z nich przy pomocy tabel.

<u>Definicja 2.</u> (i) Negację zdania p oznaczamy przez $\sim p$ i czytamy „nieprawda, że p”:

p	$\sim p$
1	0
0	1

(ii) Alternatywę zdań p i q oznaczamy $p \vee q$ i czytamy „p lub q”:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(iii) Koniunkcję zdań p i q oznaczamy $p \wedge q$ i czytamy „p i q”:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(iv) Implikacja. Zapis $p \Rightarrow q$ czytamy „jeśli p, to q" lub „z p wynika q"; p nazywamy poprzednikiem, a q następnikiem implikacji $p \Rightarrow q$:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(v) Równoważność zdań p i q oznaczamy $p \Leftrightarrow q$ i czytamy „p równoważne q" lub „p wtedy i tylko wtedy, gdy q":

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Definicja 3. Zdania złożone, prawdziwe bez względu na wartość logiczną zdań składowych, nazywamy tautologiami.

Przykład 2. Sprawdzimy, czy zdanie

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

jest tautologią:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Z powyższej tabeli wynika, że jest ono tautologią. Nazywamy ją prawem kontrapozycji.

Przykład 3. Przypuśćmy, że zdanie

$$q \Rightarrow [p \Rightarrow (p \wedge q)]$$

nie jest tautologią. Wtedy zdanie q jest prawdziwe, a implikacja $p \Rightarrow (p \wedge q)$ fałszywa. Wtedy jednak zdanie p jest prawdziwe, a koniunkcja $p \wedge q$ fałszywa. To jednak

PRZECZY PRAWDZIWOŚCI ZDAŃ p i q. TYM SAMYM ROZPATRYWANE ZDANIE JEST TAUTOLOGIĄ.

METODA UŻYTA W POWYŻSZYM PRZYKŁADZIE NAZWA SIĘ METODĄ „A CONTRARIO", CZYLI SPROWADZENIA DO NIEDORZECZNOŚCI.

DEFINICJA 4. WYRAŻENIE ZAWIERAJĄCE ZMIENNE, KTÓRE STAJE SIĘ ZDANIEM PO PODSTAWIENIU ZA ZMIENNE NAZW PRZEDMIOTÓW ZE ZBIORU OBIEKTÓW DOPUSZCZALNYCH, NAZYWAMY FORMUŁĄ ZDANIOWĄ. ZBIÓR OBIEKTÓW DOPUSZCZALNYCH DLA FORMUŁY ZDANIOWEJ NAZYWAMY JEJ DZIEDZINĄ. DLA OZNACZENIA FORMUŁY f O ZMIENNYCH $x_1, \dots, x_n$ UŻYWAMY SYMBOLU $f(x_1, \dots, x_n)$.

PRZYKŁAD 4. WYRAŻENIA

$$x+1=2,$$

PRĘDKOŚĆ x PRZEKRACZA 100 KM/H,

SĄ FORMUŁAMI ZDANIOWYMI. DZIEDZINĄ PIERWSZEJ MOŻE BYĆ ZBIÓR WSZYSTKICH LICZB NATURALNYCH LUB LICZB RZECZYWISTYCH, A DZIEDZINĄ DRUGIEJ ZBIÓR WSZYSTKICH SAMOCHODÓW ZAREJESTROWANYCH W ZIELONEJ GÓRZE, ALE TAKŻE ZBIÓR WSZYSTKICH ŻÓŁWI NA CAŁYM ŚWIECIE.

NA FORMUŁY ZDANIOWE, PODOBNIE JAK NA ZDANIA, DZIAŁAMY SPÓJNIKAMI LOGICZNYMI. PONADTO UŻYWAMY MAŁEGO KWANTYFIKATORA $\bigvee$ I DUŻEGO KWANTYFIKATORA $\bigwedge$.

DEFINICJA 5. NIECH $f(x)$ BĘDZIE FORMUŁĄ ZDANIOWĄ O DZIEDZINIE X. ZAPIS

$$\bigvee_{x \in X} f(x)$$

CZYTAMY „ISTNIEJE TAKIE x NALEŻĄCE DO X, ŻE $f(x)$" LUB „DLA PEWNEGO x NALEŻĄCEGO DO X ZACHODZI $f(x)$". ZAPIS

$$\bigwedge_{x \in X} f(x)$$

CZYTAMY „DLA KAŻDEGO x NALEŻĄCEGO DO X ZACHODZI $f(x)$" LUB „DLA WSZYSTKICH x NALEŻĄCYCH DO X ZACHODZI $f(x)$".

UWAGA 1. JEŚLI $f(x)$ JEST FORMUŁĄ ZDANIOWĄ O DZIEDZINIE X, TO WYRAŻENIA

$$\bigvee_{x \in X} f(x) \quad \text{ORAZ} \quad \bigwedge_{x \in X} f(x)$$

SĄ ZDANIAMI.

Dla formuł zdaniowych o większej liczbie zmiennych kwantyfikatory wprowadzamy podobnie.

Przykład 5. Zdanie

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x>x^2$$

jest fałszywe, ale zdanie

$$\bigwedge_{x\in(0,1)} x>x^2$$

jest prawdziwe.

Uwaga 2. Kolejność małych kwantyfikatorów nie jest istotna. Podobną własność mają kwantyfikatory duże.

Przykład 6. Kolejność kwantyfikatorów różnych typów jest, na ogół, istotna. Zdanie

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}}\ \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x<y$$

jest prawdziwe, ale zdanie

$$\bigvee_{y\in\mathbb{R}}\ \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x<y$$

jest fałszywe.

Twierdzenie 1. Dla każdej formuły zdaniowej f zachodzą następujące prawa de Morgana:

$$\sim\bigvee_{x} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{x} \sim f(x)$$

oraz

$$\sim\bigwedge_{x} f(x) \Leftrightarrow \bigvee_{x} \sim f(x).$$

Definicja 6. Pojęcia zbioru i należenia do niego przyjmujemy za pojęcia pierwotne. Fakt, że x jest elementem zbioru X zapisujemy $x\in X$ i czytamy „x należy do X" lub „x jest elementem zbioru X". Zamiast $\sim(x\in X)$ piszemy $x\notin X$.

Zbiory określamy albo przez wymienienie wszystkich jego elementów:

$$X=\{x_1,\dots,x_n\},\quad Y=\{y_1,y_2,y_3,\dots\},$$

albo przez podanie formuły zdaniowej opisującej ten zbiór:

$$X=\{x: f(x)\}.$$

W tym drugim przypadku bierzemy pod uwagę te i tylko te x, dla których $f(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

Definicja 7. Niech A i B będą zbiorami. Mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B lub A jest zawarty w B, co zapisujemy $A \subset B$, gdy prawdziwa jest implikacja

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Zbiory A i B nazywamy równymi, co zapisujemy $A = B$, gdy $A \subset B$ i $B \subset A$.

Definicja 8. (i) Zbiór, który nie zawiera żadnych elementów nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy $\emptyset$.

(ii) Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$ i określamy równością

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

(iii) Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$ i określamy równością

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

(iv) Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$ i określamy równością

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

(v) Jeśli rozpatrujemy podzbiory ustalonego zbioru X (zwanego wtedy przestrzenią), to dla każdego $A \subset X$ zbiór $X \setminus A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A (do przestrzeni X).

Twierdzenie 2. Niech X będzie zbiorem. Wtedy

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{i} \quad A \cap B = B \cap A$$

dla każdych $A, B \subset X$,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{i} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

dla każdych $A, B, C \subset X$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

oraz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

dla każdych $A, B, C \subset X$. Ponadto dla każdych $A, B \subset X$ zachodzą następujące prawa de Morgana:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

oraz

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Definicja 9. Uporządkowany zbiór n-elementowy nazywamy ciągiem n-elementowym. Ciąg o wyrazach $a_1,\dots,a_n$ oznaczamy $(a_1,\dots,a_n)$. Ciąg dwuelementowy nazywamy parą.

Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A_1,\dots,A_n$ nazywamy zbiór $A_1\times\dots\times A_n$ określony równością

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots,a_n):\ a_1\in A_1,\dots,a_n\in A_n\}.$$

W szczególności

$$A\times B=\{(a,b):\ a\in A,\ b\in B\}$$

dla dowolnych zbiorów A i B.

Przykład 7. Niech $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{p,q\}$. Wtedy

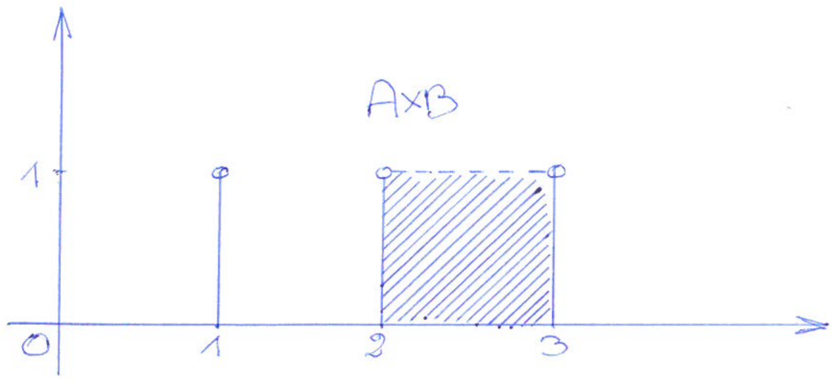
$$A\times B=\{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(3,p),(3,q)\}$$

oraz

$$B\times A=\{(p,1),(p,2),(p,3),(q,1),(q,2),(q,3)\}.$$

Przykład 8. Niech $A=\{1\}\cup[2,3]$ i $B=[0,1)$. Wtedy

$$A\times B=\{(x,y):\ x=1 \vee x\in[2,3],\ y\in[0,1)\}:$$



Definicja 10. Symbolem $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb naturalnych:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}.$$

Przez $\mathbb{Z}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb całkowitych:

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}.$$

Symbolem $\mathbb{Q}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb wymiernych:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$.

Uwaga 3. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, przy czym każde dwa zbiory są tu różne.

Definicja 1.1. Niech $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$. Zbiory

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a\le x\le b\},\quad (a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\},$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a\le x<b\},\quad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\le b\}$$

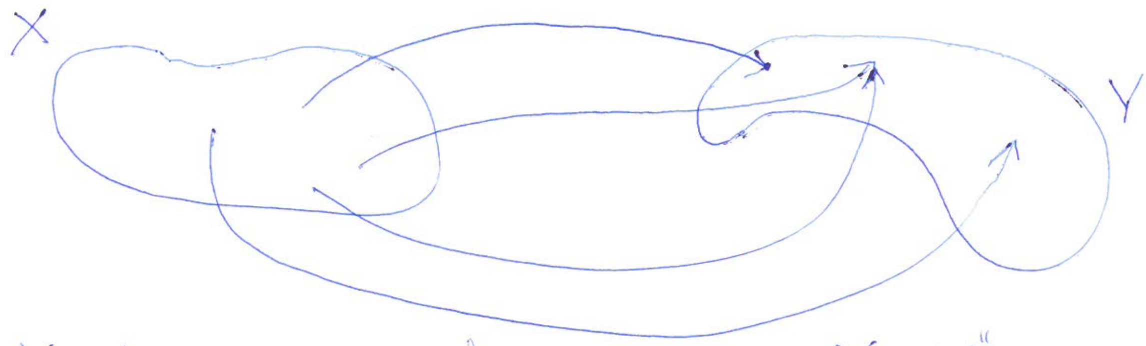
nazywamy przedziałami o końcach a i b. Pierwszy nazywamy przedziałem domkniętym, a drugi otwartym.

Ponadto $(-\infty,+\infty):=\mathbb{R}$ oraz, dla każdego $a\in\mathbb{R}$,

$$(-\infty,a):=\{x\in\mathbb{R}:\ x<a\},\quad (-\infty,a]:=\{x\in\mathbb{R}:\ x\le a\},$$
$$(a,+\infty):=\{x\in\mathbb{R}:\ x>a\},\quad [a,+\infty):=\{x\in\mathbb{R}:\ x\ge a\}.$$

2. Funkcje i ich podstawowe własności

Definicja 1. Niech X i Y będą zbiorami. Jeśli każdemu elementowi $x\in X$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $f(x)\in Y$, to mówimy, że na X określona jest funkcja f o wartościach w Y i piszemy



$f:X\to Y$, co czytamy „f odwzorowuje X w Y".

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f, a zbiór Y jej przeciwdziedziną.

Jeśli każdy element zbioru Y jest wartością $f(x)$ funkcji f w punkcie x, to mówimy, że f odwzorowuje X na Y i piszemy $f:X\xrightarrow{\text{na}}Y$.

Przykład 1. Dziedziną funkcji $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ jest $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, a jej przeciwdziedziną $\mathbb{R}$. Dziedziną funkcji $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ jest $\mathbb{R}$, a jej przeciwdziedziną $[-1,1]$. Nie jest prawdą, że $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\xrightarrow{\text{na}}\mathbb{R}$, ale $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\xrightarrow{\text{na}}[-1,1]$ oraz $\sin:\mathbb{R}\xrightarrow{\text{na}}[-1,1]$.

Definicja 2. Wykresem funkcji $f:X\to Y$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Gr} f:=\{(x,y)\in X\times Y:\ y=f(x)\}.$$

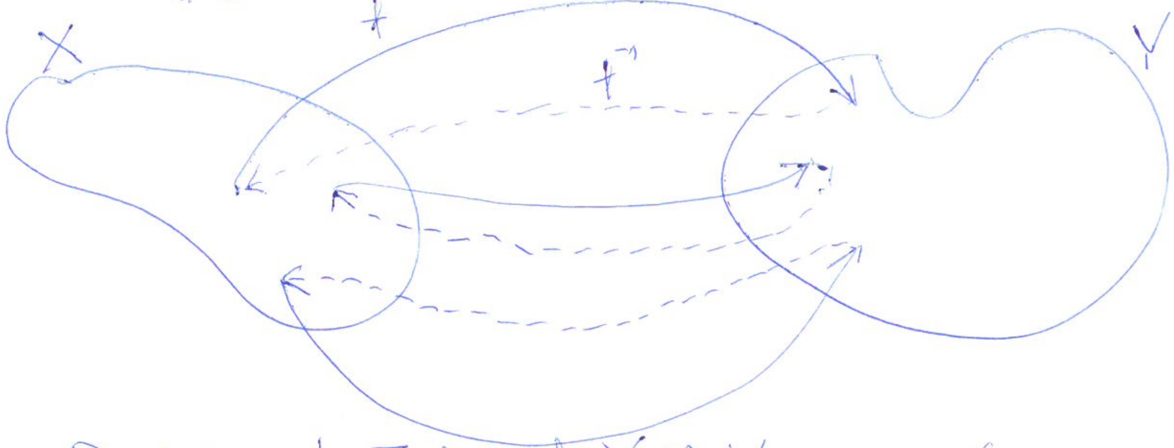
Definicja 3. Funkcję $f:X\to Y$ nazywamy różnowartościową, co zapisujemy $f:X\xrightarrow[1-1]{}Y$, gdy różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości:

8.

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} (x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$$

LUB, RÓWNOWAŻNIE,

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in X} (f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2).$$



DEFINICJA 4. JEŚLI $f: X \xrightarrow[1-1]{NA} Y$, TO WZÓR

$$f^{-1}(y)=x :\Leftrightarrow y=f(x)$$

OKREŚLA PEŁNĄ FUNKCJĘ $f^{-1}: Y\to X$. BĘDZIEMY JĄ NAZYWAĆ FUNKCJĄ ODWROTNĄ DO FUNKCJI f.

UWAGA 1. JEŚLI $f: X \xrightarrow[1-1]{NA} Y$, TO $f^{-1}: Y \xrightarrow[1-1]{NA} X$ ORAZ $(f^{-1})^{-1}=f$.

PRZYKŁAD 2. FUNKCJA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, O WZORZE

$$f(x)=x^2,$$

NIE JEST RÓŻNOWARTOŚCIOWA, BO $f(-1)=f(1)$. ALE FUNKCJA $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, OKREŚLONA TYM SAMYM WZOREM, JEST. ISTOTNIE, JEŚLI $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ I $f(x_1)=f(x_2)$, TO $x_1^2=x_2^2$. ZATEM PONIEWAŻ x_1 I x_2 SĄ TEGO SAMEGO ZNAKU, WIĘC $x_1=x_2$. ZAUWAŻMY PONADTO, ŻE ZBIOREM WARTOŚCI FUNKCJI $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ JEST $[0,+\infty)$. TAK WIĘC $f:[0,+\infty)\xrightarrow[1-1]{NA}[0,+\infty)$. PONIEWAŻ DLA KAŻDYCH $x,y\in[0,+\infty)$

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{y},$$

WIĘC FUNKCJA ODWROTNA $f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ OKREŚLONA JEST WZOREM

$$f^{-1}(y)=\sqrt{y}.$$

DEFINICJA 5. NIECH $f:X\to Y$ I $g:Y\to Z$. FUNKCJĘ $g\circ f: X\to Z$, OKREŚLONĄ WZOREM

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),$$

NAZYWAMY ZŁOŻENIEM FUNKCJI f I g.

UWAGA 2. JEŚLI $f: X \xrightarrow[1-1]{NA} Y$, TO

$$\bigwedge_{x\in X} (f^{-1}\circ f)(x)=x \text{ I } \bigwedge_{y\in Y} (f\circ f^{-1})(y)=y.$$

DEFINICJA 6. NIECH $A\subset\mathbb{R}$ I $f:A\to\mathbb{R}$. FUNKCJĘ f NAZYWAMY ROSNĄCĄ [ŚCIŚLE ROSNĄCĄ], GDY

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A}\left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\underset{[<]}{\le} f(x_2)\right),$$

A MALEJĄCĄ [ŚCIŚLE MALEJĄCĄ], GDY

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in A}\left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\underset{[>]}{\ge} f(x_2)\right).$$

MÓWIMY, ŻE f JEST MONOTONICZNA [ŚCIŚLE MONOTONICZNA], GDY JEST ROSNĄCA LUB MALEJĄCA [ŚCIŚLE ROSNĄCA LUB ŚCIŚLE MALEJĄCA].

PRZYKŁAD 3. FUNKCJA O WZORZE $f(x)=x^2$ JEST ŚCIŚLE ROSNĄCA, GDY OKREŚLIĆ JĄ NA $[0,+\infty)$, JEST ŚCIŚLE MALEJĄCA, GDY ZADAĆ JĄ NA $(-\infty,0]$, ALE OKREŚLONA NA $\mathbb{R}$ NIE JEST MONOTONICZNA.

3. WEKTORY, MACIERZE, WYZNACZNIKI

DEFINICJA 1. (i) NIECH

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n}.$$

ELEMENTY ZBIORU $\mathbb{R}^n$ NAZYWAMY WEKTORAMI, A ELEMENTY ZBIORU $\mathbb{R}$ SKALARAMI.

(ii) DLA DOWOLNYCH WEKTORÓW $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ I SKALARA $\alpha\in\mathbb{R}$

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n):=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

ORAZ

$$\alpha(x_1,\dots,x_n):=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n).$$

(iii) DLA DOWOLNYCH WEKTORÓW $x,y\in\mathbb{R}^n$ I SKALARA $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$-x:=(-1)x,\quad x-y:=x+(-y),\quad \frac{x}{\alpha}:=\frac{1}{\alpha}x,\quad \mathbf{0}:=(0,\dots,0).$$

DEFINICJA 2. JEŚLI $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, TO LICZBĘ

$$(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n):=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

NAZYWAMY ILOCZYNEM SKALARNYM WEKTORÓW $(x_1,\dots,x_n)$ I $(y_1,\dots,y_n)$.

WEKTORY $x,y\in\mathbb{R}^n$ NAZYWAMY PROSTOPADŁYMI, GDY $x\cdot y=0$.

DEFINICJA 3. DLA KAŻDEGO WEKTORA $x\in\mathbb{R}^n$ LICZBĘ

$$\|x\|:=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

NAZYWAMY DŁUGOŚCIĄ WEKTORA x.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTÓW $x,y\in\mathbb{R}^n$ OKREŚLAMY JAKO DŁUGOŚĆ $\|x-y\|$ WEKTORA $x-y$.

<u>Definicja 4.</u> Niech $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że wektory $u_1, \ldots, u_k$ są liniowo zależne, gdy istnieją takie nie wszystkie równe 0 skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, że

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \mathbf{0}.$$

Mówimy, że wektory $u_1, \ldots, u_k$ są liniowo niezależne, gdy nie są zależne, czyli gdy prawdziwa jest implikacja

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

<u>Przykład 1.</u> Wektory $(-1,3,2)$, $(2,1,-1)$ i $(3,5,0)$ są liniowo zależne, bo

$$1 \cdot (-1,3,2) + 2 \cdot (2,1,-1) + (-1) \cdot (3,5,0) =$$
$$= (-1+4-3, 3+2-5, 2-2+0) = (0,0,0) = \mathbf{0}.$$

<u>Przykład 2.</u> Określmy wektory $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ przyjmując $e_1 := (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 := (0,1,0,\ldots,0)$, $e_3 := (0,0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$. Wtedy, jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \mathbf{0}$, to

$$\alpha_1(1,0,0,\ldots,0) + \alpha_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + \alpha_n(0,\ldots,0,1) =$$
$$= (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \alpha_n) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0),$$

czyli $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Zatem wektory $e_1, \ldots, e_n$ są liniowo niezależne.

<u>Definicja 5.</u> Macierzą nazywamy tablicę liczb postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ciągi elementów macierzy występujące w poziomie nazywamy wierszami, a te stojące w pionie kolumnami macierzy. Pisząc a_{ij} mamy na myśli element stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Jeśli macierz ma m wierszy i n kolumn, to mówimy, że jest o wymiarach $m \times n$. Macierz o tej samej liczbie wierszy i kolumn nazywa się kwadratowa, a wspólna liczba jej wierszy i kolumn nazywa się jej stopniem.

Macierzą jednostkową nazywamy macierz kwadratową mającej na głównej przekątnej same jedynki, a poza nią zera:

$$I := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $\mathbb{R}^m_n$.

<u>Uwaga 1.</u> Wiersze macierzy należącej do $\mathbb{R}^m_n$ są wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a kolumny wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

<u>Definicja 6.</u> Jeśli $A, B \in \mathbb{R}^m_n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

to

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\alpha A := \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

dla każdego skalara $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Uwaga 2.</u> Jeśli $A, B \in \mathbb{R}^m_n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, to $A + B \in \mathbb{R}^m_n$ oraz $\alpha A \in \mathbb{R}^m_n$.

<u>Definicja 7.</u> Jeśli $A \in \mathbb{R}^m_n$ i $B \in \mathbb{R}^n_p$:

$$A = [a_1, \dots, a_m] \quad i \quad B = [b^1, \dots, b^p],$$

gdzie $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ są wierszami macierzy A, a $b^1, \dots, b^p \in \mathbb{R}^n$ kolumnami macierzy B, to

$$A \cdot B := \begin{bmatrix} a_1 \cdot b^1 & a_1 \cdot b^2 & \dots & a_1 \cdot b^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m \cdot b^1 & a_m \cdot b^2 & \dots & a_m \cdot b^p \end{bmatrix}.$$

Uwaga 3. Jeśli $A\in\mathbb{R}^m_n$ i $B\in\mathbb{R}^n_p$, to $A\cdot B\in\mathbb{R}^m_p$.

Uwaga 4. Jeśli $A\in\mathbb{R}^n_n$, to $A\cdot I=I\cdot A=A$.

Przykład 3. Mnożenie macierzy nie jest, na ogół przemienne:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 7 & 8 & 1\end{bmatrix},$$

ale

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & 1\end{bmatrix}.$$

Definicja 8. Macierz kwadratową A, dla której istnieje macierz B spełniająca równości

$$A\cdot B=B\cdot A=I,$$

nazywamy odwracalną. Macierz B, spełniającą powyższy warunek, nazywamy macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}.

Uwaga 5. Macierz odwracalna ma tylko jedną macierz odwrotną. Jeśli $A\in\mathbb{R}^n_n$ jest macierzą odwracalną, to $A^{-1}\in\mathbb{R}^n_n$ oraz

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I.$$

Twierdzenie 1. Jeśli A i B są macierzami odwracalnymi tego samego stopnia, to macierz $A\cdot B$ jest odwracalna oraz

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Przykład 4. Niech

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

oraz

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I,$$

więc macierz A jest odwracalna oraz

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

<u>Przykład 5.</u> Pokażemy, że macierz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest odwracalna. W przeciwnym razie istniałyby takie liczby $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, że

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy jednak $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$, co jest niemożliwe.

<u>Definicja 9.</u> Maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy macierzy nazywamy jej rzędem. Rząd macierzy A oznaczamy $\operatorname{rz} A$.

<u>Uwaga 6.</u> Można dowieść, że maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest równa jej rzędowi.

<u>Uwaga 7.</u> Jeśli $A \in \mathbb{R}^m_n$, to $\operatorname{rz} A \leq \min\{m, n\}$.

<u>Twierdzenie 2.</u> Rząd macierzy nie zmieni się, jeśli:

(i) skreślimy wiersz [kolumnę] złożoną z samych zer,

(ii) przestawimy dwa wiersze [dwie kolumny],

(iii) pomnożymy wiersz [kolumnę] przez niezerowy skalar,

(iv) do wiersza [kolumny] dodamy dowolny wiersz [dowolną kolumnę] pomnożony [pomnożoną] przez dowolny skalar.

<u>Definicja 10.</u> Wyznacznikiem nazywamy funkcję $\det$ określoną na zbiorze wszystkich macierzy kwadratowych w następujący indukcyjny sposób:

$$\det [a_{11}] := a_{11};$$

jeśli $n \geq 2$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

to

$$\det A := (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

<u>Przykład 6.</u>

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \det [a_{22}] - a_{12} \det [a_{21}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Twierdzenie 3 (Laplace'a). Załóżmy, że $n \geq 2$ i niech $A \in \mathbb{R}^n_n$. Wtedy

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Twierdzenie 4. Niech A będzie macierzą kwadratową. Wtedy

(i) jeśli w macierzy A przestawimy dwa wiersze [kolumny], to wyznacznik macierzy A zmieni znak;

(ii) jeśli do wiersza [kolumny] macierzy A dodamy dowolny wiersz [dowolną kolumnę] pomnożony [pomnożoną] przez skalar, to wyznacznik macierzy nie zmieni się.

Wniosek 1. Jeśli macierz kwadratowa ma wiersz złożony [kolumnę złożoną] z samych zer lub ma dwa identyczne wiersze [dwie identyczne kolumny], to jej wyznacznik wynosi 0.

Twierdzenie 5 (Cauchy'ego). Jeśli $A, B \in \mathbb{R}^n_n$, to

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Wyznacznik macierzy stopnia 3 można też liczyć metodą Sarrusa:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Można sprawdzić, że

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Przykład 7. Stosując metodę Sarrusa stwierdzamy, że

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 + 0 - 3 + 0 - 2 - 6 = -3.$$

TWIERDZENIE 6. NIECH $A \in \mathbb{R}^n_n$. WTEDY

$$A \text{ JEST ODWRACALNA} \Leftrightarrow \operatorname{rz} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

TWIERDZENIE 7. JEŚLI $A \in \mathbb{R}^n_n$ JEST MACIERZĄ ODWRACALNĄ, TO

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det A_{1n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix},$$

GDZIE A_{ij} OZNACZA MACIERZ POWSTAŁĄ Z MACIERZY A PRZEZ SKREŚLENIE i-TEGO WIERSZA I j-TEJ KOLUMNY.

4. UKŁADY RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH

DEFINICJA 1. UKŁADEM RÓWNAŃ LINIOWYCH NAZYWAMY UKŁAD RÓWNAŃ POSTACI

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

GDZIE WSPÓŁCZYNNIKI $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ UKŁADU I WYRAZY WOLNE $b_1, \dots, b_m$ SĄ DANE, A $x_1, \dots, x_n$ SĄ NIEWIADOMYMI. KOLUMNĘ

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

NAZYWAMY KOLUMNĄ WYRAZÓW WOLNYCH, A MACIERZE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ODPOWIEDNIO MACIERZĄ UKŁADU I UZUPEŁNIONĄ MACIERZĄ UKŁADU.

UWAGA 1. UKŁAD (1) MOŻNA ZAPISAĆ W POSTACI $A \cdot x = b$, GDZIE A JEST MACIERZĄ UKŁADU, b KOLUMNĄ WYRAZÓW WOLNYCH, A x KOLUMNĄ NIEWIADOMYCH:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy układu jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej.

Twierdzenie 2 (Cramera). Niech $A \in \mathbb{R}^n_n$ będzie macierzą rzędu n. Wtedy układ równań liniowych o macierzy A ma dokładnie jedno rozwiązanie $x \in \mathbb{R}^n$, przy czym

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Przykład 1. Rozwiązując układ

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -6 \\ x + 3y + 2z &= 7 \\ -x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

widzimy, że

$$\det A = 2\cdot(3\cdot 1 - (-2)\cdot 2) - (1\cdot 1 - (-1)\cdot 2) - 1\cdot(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 3)$$
$$= 14 - 3 - 1 = 10 \neq 0,$$

a więc, na mocy twierdzenia 3.6, $\operatorname{rz} A = 3$. Tak więc, ponieważ $\det A_1 = -20$, $\det A_2 = 10$ i $\det A_3 = 30$, z twierdzenia 2 wynika, że

$$x = -2, \ y = 1, \ z = 3.$$

Definicja 2. Operacją elementarną na układzie równań liniowych nazywamy każde z następujących przekształceń:

- pomnożenie równania przez liczbę niezerową,
- dodanie dwóch dowolnych równań,
- przestawienie dwóch dowolnych równań,
- pominięcie równania postaci

$$0\cdot x_1 + \ldots + 0\cdot x_n = 0.$$

Definicja 3. Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, gdy mają te same rozwiązania.

Uwaga 2. Wykonując na układzie równań operacje elementarne otrzymujemy układ równoważny danemu.