TWIERDZENIE 3. KAŻDY UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH MAJĄCY ROZWIĄZANIE MOŻNA DOPROWADZIĆ, PRZY POMOCY SKOŃCZONEJ LICZBY OPERACJI ELEMENTARNYCH, DO UKŁADU RÓWNOWAŻNEGO, KTÓREGO MACIERZ, PO ODPOWIEDNIM PRZESTAWIENIU KOLUMN, JEST POSTACI

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 \ldots & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ldots & & 0 \end{array}\right].$$

UWAGA 3. UKŁADY POWYŻSZEJ POSTACI, ZWANEJ KANONICZNĄ, ROZWIĄZUJEMY NASTĘPUJĄCO. NIEWIADOME STOJĄCE PRZY WSPÓŁCZYNNIKACH, TWORZĄCYCH PO ODPOWIEDNIM PRZESTAWIENIU MACIERZ JEDNOSTKOWĄ, NAZYWAMY ZMIENNYMI BAZOWYMI, POZOSTAŁE ZMIENNYMI SWOBODNYMI. TRAKTUJĄC ZMIENNE SWOBODNE JAK PARAMETRY, WYLICZAMY ZMIENNE BAZOWE I ZNAJDUJEMY ROZWIĄZANIE OGÓLNE.

PRZYKŁAD 2. ROZWIĄŻMY UKŁAD

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$$

DODAJĄC DO DRUGIEGO RÓWNANIA PIERWSZE RÓWNANIE POMNOŻONE PRZEZ -2 OTRZYMUJEMY RÓWNOWAŻNY UKŁAD

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_2 + 10x_3 = 1. \end{cases}$$

NASTĘPNY UKŁAD RÓWNOWAŻNY OTRZYMUJEMY MNOŻĄC DRUGIE RÓWNANIE PRZEZ $1/10$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ \frac{3}{10} x_2 + x_3 = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

WRESZCIE, DODAJĄC DO PIERWSZEGO RÓWNANIA PODWOJONE DRUGIE, DOSTAJEMY UKŁAD RÓWNOWAŻNY W POSTACI KANONICZNEJ:

$$x_1 + \frac{8}{5} x_3 = \frac{16}{5}$$

$$\frac{3}{10} x_2 + x_3 = \frac{1}{10}.$$

PO PODSTAWIENIU $x_2 = \lambda$, GDZIE $\lambda \in \mathbb{R}$, OTRZYMUJEMY ROZWIĄZANIE OGÓLNE: $x_1 = \frac{16}{5} - \frac{8}{5}\lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\lambda$.

ROZPATRZMY UKŁAD NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

(KAŻDY UKŁAD NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH MOŻNA SPROWADZIĆ DO POWYŻSZEJ POSTACI PRZEZ POMNOŻENIE PEWNYCH NIERÓWNOŚCI PRZEZ -1). Z GEOMETRYCZNEGO PUNKTU WIDZENIA ROZWIĄZANIE NIERÓWNOŚCI LINIOWEJ JEST PÓŁPRZESTRZENIĄ, A WIĘC ROZWIĄZANIE UKŁADU NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH JEST „WIELOŚCIANEM" (OGRANICZONYM LUB NIE).

UKŁAD NIERÓWNOŚCI (2) MOŻNA ZASTĄPIĆ UKŁADEM RÓWNAŃ LINIOWYCH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m, \end{cases}$$

GDZIE O DODATKOWYCH NIEWIADOMYCH $z_1,\ldots,z_m$ ZAKŁADAMY, ŻE SĄ NIEUJEMNE.

<u>PRZYKŁAD 3.</u> ROZWIĄZUJĄC UKŁAD NIERÓWNOŚCI

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 12x_3 \ge 12 \end{cases}$$

ZASTĘPUJEMY GO RÓWNOWAŻNYM UKŁADEM

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 \le -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 \le -12, \end{cases}$$

A NASTĘPNIE UKŁADEM RÓWNAŃ

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + z_1 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + z_2 = 6 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 + z_3 = -12, \end{cases}$$

GDZIE NIEWIADOME z_1, z_2, z_3 SĄ NIEUJEMNE. WYKONUJĄC PEWNĄ LICZBĘ OPERACJI ELEMENTARNYCH NA TYM UKŁADZIE OTRZYMUJEMY RÓWNOWAŻNY UKŁAD

$$\begin{cases} x_1 - 19z_1 - \frac{13}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3 = -14 \\ x_2 + \frac{21}{2}z_1 + \frac{15}{4}z_2 + \frac{1}{4}z_3 = 9 \\ x_3 - 3z_1 - z_2 = -3, \end{cases}$$

9. KTÓREGO ROZWIĄZANIE OGÓLNE MA POSTAĆ:

$$x_1 = -14 + 19\lambda_1 + \frac{13}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3,$$

$$x_2 = 9 - \frac{21}{2}\lambda_1 - \frac{15}{4}\lambda_2 - \frac{1}{4}\lambda_3,$$

$$x_3 = -3 + 3\lambda_1 + \lambda_2,$$

GDZIE $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ SĄ PARAMETRAMI.

5. GRANICA CIĄGU I FUNKCJI, CIĄGŁOŚĆ

DEFINICJA 1. NIECH X BĘDZIE ZBIOREM NIEPUSTYM. KAŻDĄ FUNKCJĘ $a: \mathbb{N} \to X$ NAZYWAMY CIĄGIEM W ZBIORZE X. ZAMIAST $a(n)$ BĘDZIEMY PISAĆ a_n, A ZAMIAST a BĘDZIEMY PISAĆ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ELEMENTY a_n NAZYWAMY WYRAZAMI CIĄGU $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. CIĄG W ZBIORZE $\mathbb{R}$ NAZYWAMY CIĄGIEM LICZBOWYM.

DEFINICJA 2. JEŚLI ISTNIEJE TAKIE $n_0 \in \mathbb{N}$, ŻE

$$a_n = a_{n_0}, \quad n \geq n_0,$$

TO CIĄG $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NAZYWAMY STAŁYM OD PEWNEGO MIEJSCA. JEŚLI

$$a_n = a_1, \quad n\in\mathbb{N},$$

TO CIĄG $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NAZYWAMY STAŁYM.

DEFINICJA 3. NIECH $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ BĘDZIE CIĄGIEM LICZBOWYM. CIĄG $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NAZYWAMY OGRANICZONYM Z DOŁU [Z GÓRY], GDY ISTNIEJE TAKA LICZBA M, ŻE

$$a_n \underset{[\leq]}{\geq} M, \quad n\in\mathbb{N}.$$

CIĄG LICZBOWY NAZYWAMY OGRANICZONYM, GDY JEST OGRANICZONY Z DOŁU I Z GÓRY.

PRZYKŁAD 1. CIĄG $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ JEST OGRANICZONY, GDY TYM CZASEM CIĄG $(2+4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ JEST OGRANICZONY Z DOŁU, ALE NIE JEST OGRANICZONY Z GÓRY.

DEFINICJA 4. CIĄG LICZBOWY $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NAZYWAMY ROSNĄCYM [ŚCIŚLE ROSNĄCYM], GDY

$$a_n \underset{[<]}{\leq} a_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N},$$

I MALEJĄCYM [ŚCIŚLE MALEJĄCYM], GDY

$$a_n \underset{[>]}{\geq} a_{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$