

5. ZDOLNOŚĆ PROCESU PRODUKCYJNEGO

Wskaźniki zdolności i wykonania dla danych o rozkładzie normalnym

Wskaźniki zdolności procesu	Wskaźniki wykonania procesu
$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{within}} \quad \hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p}$	$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{overall}} \quad \hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p}$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{within}} \quad \hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{overall}} \quad \hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\}$ $\hat{C}_{pk} = (1 - K)\hat{C}_p \quad K = \frac{ T - \mu }{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\}$ $\hat{P}_{pk} = (1 - K)\hat{P}_p \quad K = \frac{ T - \mu }{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$
$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{within}^2 + (\mu - T)^2}} \quad T = \frac{1}{2}(USL + LSL),$ $\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} \quad \hat{\xi} = (\mu - T)/\sigma$	

Wskaźniki zdolności dla danych o rozkładzie innym niż normalny

$C_p(q) = \frac{USL - LSL}{q_{0,99865} - q_{0,00135}}$	
$C_{pl}(q) = \frac{q_{0,5} - LSL}{q_{0,5} - q_{0,00135}}$	$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}}$
$C_{pm}(q) = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{q_{0,99865} - q_{0,00135}}{6}\right)^2 + (q_{0,5} - T)^2}}$	$T = \frac{1}{2}(USL + LSL),$
$C_{pkm}(q) = \frac{C_{pk}(q)}{\sqrt{1 + \xi^2}}$	$\xi(q) = 6 \frac{q_{0,5} - T}{q_{0,99865} - q_{0,5}}$

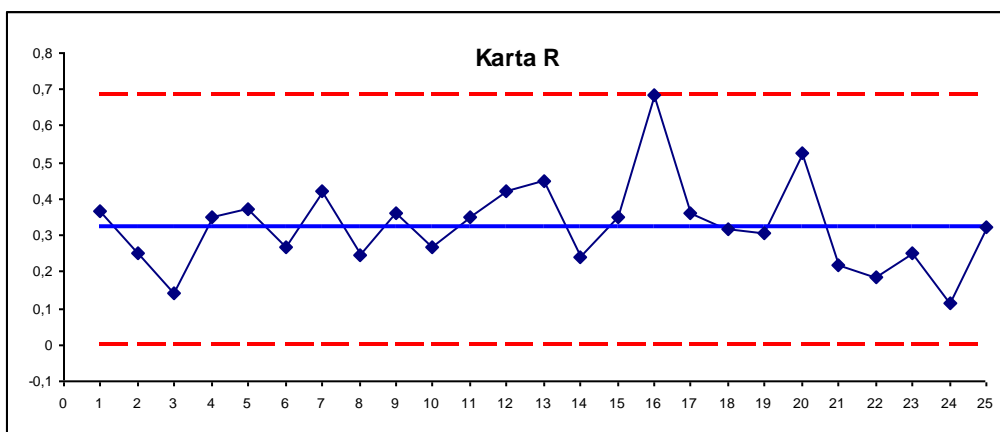
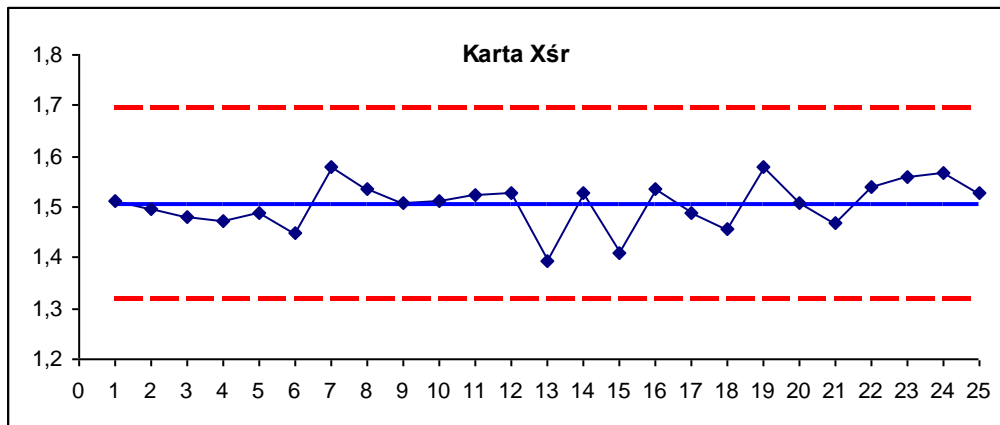
Przykład 1. (na podstawie [2])

W procesie fotolitografii co godzinę pobierano po 5 płytek do kontroli grubości warstwy fotorezystu. Wyniki 25 kolejnych kontroli zostały zebrane w poniższej tabeli.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	kontrola	1	2	3	4	5	X \bar{s} r	R
3	1	1,3235	1,4128	1,6744	1,4573	1,6914	1,51188	0,3679
4	2	1,4314	1,3592	1,6075	1,4666	1,6109	1,49512	0,2517
5	3	1,4284	1,4871	1,4932	1,4324	1,5674	1,4817	0,139
6	4	1,5028	1,6352	1,3841	1,2831	1,5507	1,47118	0,3521
7	5	1,5604	1,2735	1,5265	1,4363	1,6441	1,48816	0,3706
8
26	25	1,5797	1,3663	1,624	1,3732	1,6887	1,52638	0,3224
27						Średnie	1,50561	0,325208

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
29	Karta X \bar{s} r					Karta R				
30	A2	CL	UCL	LCL		D4	D3	CL	UCL	LCL
31	0,577	1,50561	1,693255	1,317965		2,114	0	0,32521	0,68749	0

Kontrola stabilności procesu z pomocą kart $\bar{X} - R$ wykazała, że proces jest statystycznie stabilny.



Biorąc pod uwagę specyfikację według której grubość warstwy fotorezystu powinna wynosić $1,50 \pm 0,50$ mikronów, można wyznaczyć wartości wskaźników zdolności i wykonania procesu. W tym celu należy najpierw oszacować zmienność całkowitą $\sigma_{overall}$ i wewnątrzpróbkową σ_{within} ($\hat{\sigma}_{within} = \bar{R}/d_2$):

	A	B
33	sigma całkowita	sigma wewnątrzpróbkowa
34	=ODCH.STANDARDOWE(B2:F26)	=H27/2,326
	$\sigma_{overall} = 0,1298$	$\sigma_{within} = 0,1369$

Zakładając, że rozkład grubości jest rozkładem normalnym można wyznaczyć liczbę płytek dla których nie są spełnione założone wymagania. Ilość płytek niespełniających wymogów specyfikacji w przeliczeniu na milion sztuk można oszacować wykorzystując zmienność całkowitą lub wewnątrzpróbkową korzystając z wzoru:

$$PPM = 10^6 \cdot P((x < 1) \cup (x > 2)) = 10^6 \cdot (F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma)}(1) + 1 - F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma)}(2)).$$

	A	B
36	PPM (sigma całkowita)	PPM (sigma wewnątrzpróbkowa)
37	=10^6*(1-ROZKŁAD.NORMALNY(2;G27;A34;PRAWDA)+ROZKŁAD.NORMALNY(2;G27;A34;PRAWDA))	=10^6*(1-ROZKŁAD.NORMALNY(1;G27;B34;PRAWDA)+ROZKŁAD.NORMALNY(2;G27;B34;PRAWDA))
	PPM = 119,33	PPM = 263,21

Korzystając z wzorów zestawionych w punkcie 5. można również obliczyć wartości wskaźników zdolności i wykonania.

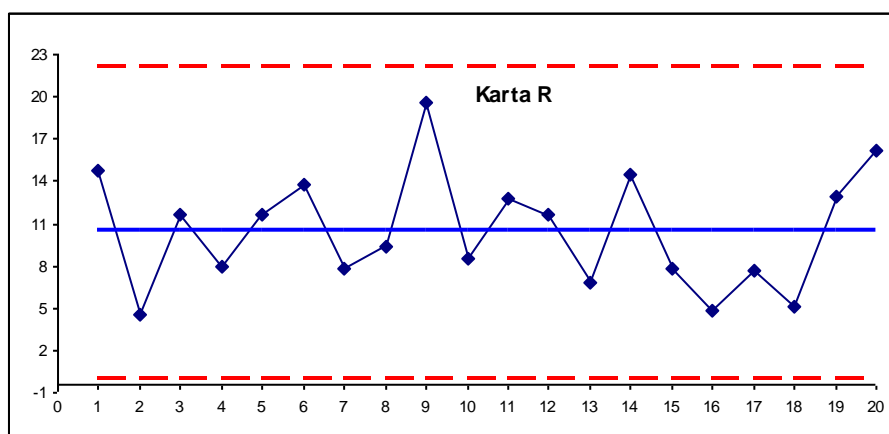
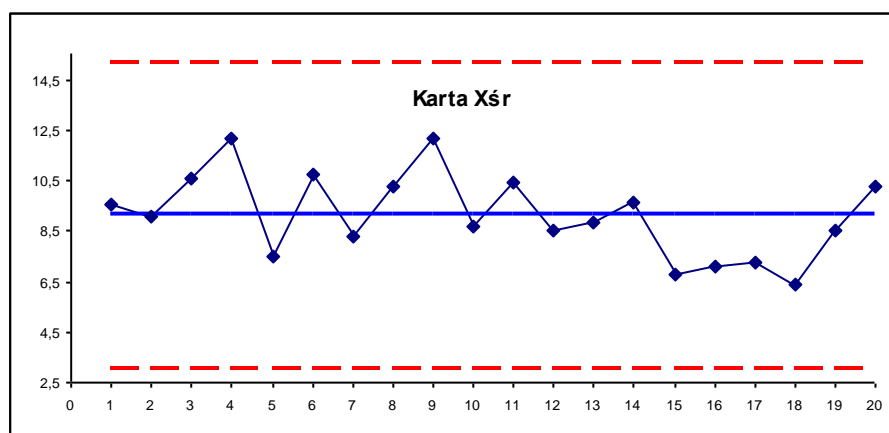
	A	B
39	Wskaźniki zdolności	
40	Cp	=(2-1)/(6*B34) → Cp=1,2175
41	Cpu	=(2-G27)/(3*B34) → Cpu=1,2027
42	Cpl	=(G27-1)/(3*B34) → Cpl=1,2324
43	Cpk	=MIN(B41:B42) → Cpk=1,2027
44	Cpm	=(2-1)/(6*PIERWIASTEK(B34^2+(G27-1,5)^2)) → Cpm=1,2163
45	Cpkm	=B43/PIERWIASTEK(1+((G27-1,5)/B34)^2) → Cpkm=1,2016

Przykład 2.

Dla potrzeb przykładu wylosowano 100 liczb z logarytmiczno normalnego o parametrach $\mu = 2$, $\sigma = 0,5$. Dane zostały podzielone na 20 5–elementowych grup. Zakładając normalność rozkładu, w oparciu o kartę $\bar{X} - R$, zbadana została stabilność tego procesu.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Lp	1	2	3	4	5	Xśr	R
3	1	7,33	6,11	6,15	20,87	7,26	9,544	14,76
4	2	7,32	8,55	10,49	7,22	11,7	9,056	4,48
5	3	8,59	11,2	14,92	3,35	14,95	10,602	11,6
6	4	13,12	8,01	15,97	9,35	14,22	12,134	7,96
7	5	13,64	10,44	2	4,38	6,91	7,474	11,64
...
20	20	12,17	2,08	14,05	4,66	18,22	10,236	16,14
23						Średnie	9,1279	10,4805

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	Karta Xśr					Karta R				
26	A2	CL	UCL	LCL		D4	D3	CL	UCL	LCL
27	0,577	9,1279	15,1751	3,08065		2,114	0	10,4805	22,1558	0

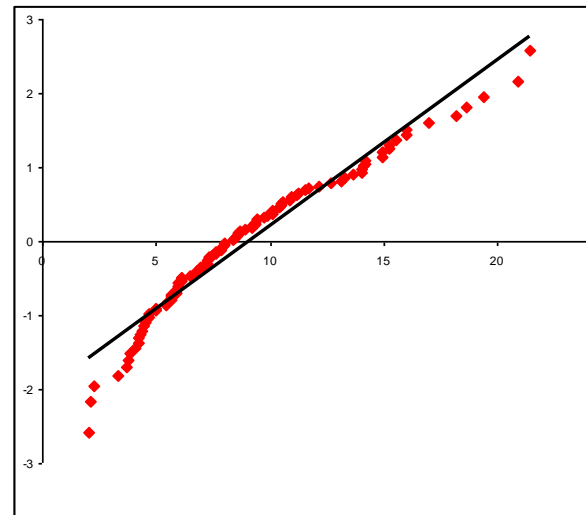
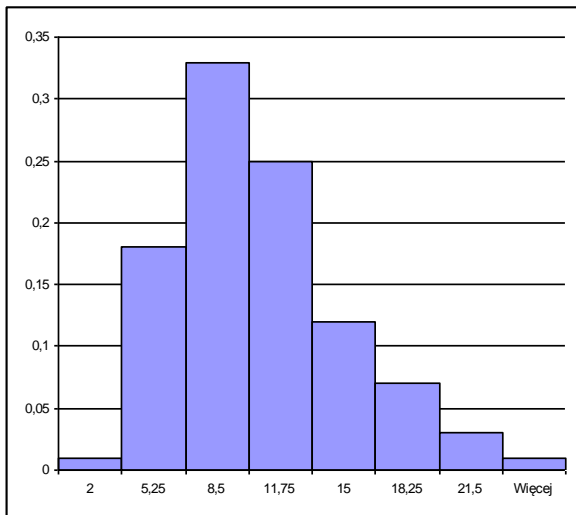


Wyniki analizy pokazały, że proces jest stabilny. Zakładając, że zadana została jedynie górna granica specyfikacji $USL = 25$, wyznaczono wartość współczynnika C_{pu} .



	A	B
29	S _{within}	=H23/2,326 → $\sigma_{within} = 4,5058$
30	C _{pu}	=(25-G23)/(3*B29) → C _{pu} =1,17429

Wydaje się więc, że proces może być uznany za zdolny – wartości wskaźników zdolności są > 1 . Wykorzystując histogram i wykres Q-Q sprawdzono normalność rozkładu.



Obydwa wykresy jednoznacznie wskazują, że dane nie mają z rozkładu normalnego. Cała dotychczasowa analiza (karta $\bar{X} - R$ i współczynnik C_{pu}) była oparta na założeniu, że rozkład danych jest rozkładem normalnym. Wnioski dotyczące stabilności i zdolności procesu były więc niewłaściwe.

Z przeprowadzonych analiz okazało się, że rozkład logarytmiczno normalny jest znacznie lepiej dopasowany do danych. Znalezione przy pomocy metody największej wiarygodności parametry rozkładu wynoszą odpowiednio: $\mu = 2,0908$ i $\sigma = 0,5071$. Można więc oszacować wartość wskaźnika C_{pu} w oparciu o kwantyle $q_{0,5}$ i $q_{0,99865}$ rozkładu logarytmiczno-normalnego.

	A	B
31	$q_{0,5}$	=ROZKŁAD.LOG.ODW(0,5;2,0908;0,5071) → $q_{0,5} = 8,0914$
32	$q_{0,99865}$	=ROZKŁAD.LOG.ODW(0,99865;2,0908;0,5071) → $q_{0,99865} = 37,043$
33	C _{pu}	=(25-B31)/(B32-B31) → C _{pu} =0,584

Wartości wskaźnika $C_{pu}(q)$ wynosi więc w tym przypadku 0,584 co oznacza, że proces nie może być uznany za zdolny.

LITERATURA

1. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, OWPW, Warszawa 2009,
2. Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009,
3. Wild C. J., Seber G. A. F. – *Chance Encounters: A First Course in Data Analysis and Inferencje* – John Wiley & Sons, New York 1999,
4. Devore J., Farnym N., Doi J. – *Applied Statistics for Engineers and Scientists*, Cengage Learning, Stamford, 2000.