10. Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

10.1. Równania różniczkowe i ich rozwiązania analityczne

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie zawierające niewiadomą funkcję jednej zmiennej oraz jej pochodne różnych rzędów.

Ogólna postać równania różniczkowego n-tego rzędu: $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

gdzie: F to funkcja określona w pewnym obszarze n+2 wymiarowym; $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dx^k}$.

Rzędem równania różniczkowego nazywamy najwyższy rząd występującej w nim pochodnej funkcji niewiadomej.

Rozwiązaniem lub **całką równania różniczkowego** zwyczajnego n-tego rzędu nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ posiadającą w pewnym przedziale pochodne do n-tego rzędu włącznie, która spełnia warunek $F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$ dla każdego x z tego przedziału.

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego n-tego rzędu nazywamy rodzinę funkcji:

$y = y(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ zawierającą n niezależnych parametrów.

Istnieje wiele różnych metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, zwykle uzależnione są one od typu równania. W różnego rodzaju poradnikach matematycznych można znaleźć typowe równania różniczkowe wraz z ich rozwiązaniami.

Zadanie

Dane jest **równanie różniczkowe liniowe jednorodne I rzędu o stałych współczynnikach**:

$$y'(x) + a\,y(x) = 0.$$

Jego **rozwiązanie ogólne** przyjmuje postać:

$$y(x) = C\,e^{-a(x-x_0)}, \text{ gdzie } x_0 \text{ jest ustalonym punktem.}$$

Rozwiązanie szczególne, spełniające warunek początkowy $y(x_0) = y_0$, można zapisać wzorem:

$$y(x) = y_0\,e^{-a(x-x_0)}.$$

Przykład 1.

Przedstawić na wykresie rozwiązanie równania $y' + 3y = 0$, z warunkiem początkowym $y(0) = 2$ dla $x \in [0, 4]$.

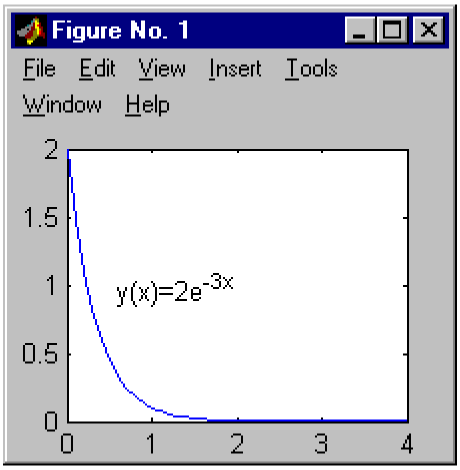
Rozwiązanie

Wykorzystując wzory z powyższego zadania, rozwiązanie równania różniczkowego można zapisać jako: $y(x) = 2e^{-3x}$.

Zadanie	Ogólna postać zadania	Wnioski
$y' + 3y = 0$	$y'(x) + a\,y(x) = 0$	$a = 3$
$y(0) = 2$	$y(x_0) = y_0$	$x_0 = 0$, $y_0 = 2$

Ostatecznie, należy wykonać następujące polecenia aby przedstawić uzyskane rozwiązanie na wykresie:

```
>> x = 0 : 0.1 : 4;
>> y = 2*exp(-3*x);
>> plot(x,y);
```



10.2. Równania różniczkowe – rozwiązania przybliżone

Metody przybliżone rozwiązują równania różniczkowe dając rozwiązanie nie w postaci **jawnej** ($y(x) = f(x)$) ale w postaci zbioru punktów dziedziny i odpowiadających im wartości funkcji będącej rozwiązaniem równania różniczkowego. Najczęściej stosowane metody na podstawie warunku początkowego określającego wartość rozwiązania w początkowym punkcie przedziału dziedziny $y(x_0) = y_0$ przybliżają wartość rozwiązania w punkcie następnym $y(x_0 + \Delta x)$, itd. Sposób wyznaczania przybliżonej wartości rozwiązania w punkcie następnym zależy od zastosowanej metody.

Pakiet MATLAB dostarcza dwóch funkcji: **ode23** i **ode45** rozwiązujących równania różniczkowe zwyczajne metodami Rungego-Kutty (funkcja **ode23** wykorzystuje metody 2 i 3 rzędu, funkcja **ode45** – metody 4 i 5 rzędu). Funkcje te rozwiązują równanie różniczkowe jedynie rzędu I. O ile zaistnieje konieczność rozwiązania równania o rzędzie wyższym, należy najpierw takie równanie sprowadzić do układu równań I rzędu (metoda przekształcania równania wyższego rzędu do układu równań I rzędu zostanie omówiona w dalszej części opracowania).

Podstawowy sposób wywołania funkcji **ode23** i **ode45** wymaga podania 3 parametrów wejściowych i dwóch parametrów wyjściowych:

[X, Y] = ode23(Funkcja, [x0 xk], y0) lub **[X, Y] = ode45(Funkcja, [x0 xk], y0)**

Parametr	**Znaczenie**
Funkcja	Nazwa pliku skryptu, w którym została zapisana funkcja zawierającej równanie różniczkowe (sposób definiowania funkcji zawierającej równanie różniczkowe został omówiony dokładnie pod tabelką).
[x0 xk]	Przedział, w którym poszukiwane jest rozwiązanie
y0	Określa warunek początkowy (wartość rozwiązania równania w chwili początkowej **x0**). Jeżeli rozwiązywane jest jedno równanie – parametr **y0** jest skalarem, jeżeli rozwiązywany jest układ równań – **y0** jest wektorem, którego kolejne elementy zawierają wartości rozwiązań kolejnych równań układu w chwili początkowej **x0**.
X, Y	**Y** – parametr zawierający wartości funkcji, będącej rozwiązaniem równania, w punktach określonych przez wektor **X**. Wektor **X** zawiera wartości z przedziału **[x0 xk]**. Jeżeli rozwiązywane jest jedno równanie – **Y** jest wektorem o rozmiarze równym rozmiarowi wektora **X**. Jeżeli rozwiązywany jest układ równań – **Y** jest macierzą o liczbie kolumn równej ilości równań układu i liczbie wierszy równej ilości elementów wektora **X**, każda kolumna macierzy **Y** zawiera wartości kolejnej funkcji będącej rozwiązaniem układu.

DEFINICJA FUNKCJI ZAWIERAJĄCEJ RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE

Aby zapisać równanie różniczkowe w postaci skryptu należy:

– sprowadzić równanie do postaci: $y' = F(x, y)$,

– zapisać równanie w postaci funkcji o nagłówku: **function [dy]=fun (x, y).**

Użytkownik może oczywiście zmienić nazwę parametrów: wejściowych – x, y, wyjściowego – dy, czy nazwę funkcji – fun.

Parametr x musi być wartością liczbową (nie wektorem). **Parametry y** i **dy** mogą być wektorami o ile funkcja **ode** (23 lub 45) rozwiązuje układ równań różniczkowych. Parametrowi **dy** należy przypisać wyrażenie opisujące sposób generowania pierwszej pochodnej funkcji **y** na podstawie parametrów wejściowych **x** i **y**. ($y' = F(x, y)$).

Jeżeli rozwiązywanym równaniem różniczkowym jest równanie: $2y' + 4y + x^2 = 0$ to:

– należy je najpierw przekształcić do postaci: $y' = F(x, y)$ tzn.: $y' = -2y - 0.5x^2$,

– i zapisać w postaci funkcji:

```
function [dy]=fun (x, y)
dy = –2*y – 0.5 * x^2;
```

Jeżeli rozwiązywany jest układ równań różniczkowych to poszczególne elementy wektora **dy** opisują kolejne równania różniczkowe do rozwiązania.

Jeżeli należy rozwiązać układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} 0.5p' + p + x = 0 \\ q' - q = 0 \end{cases}, \quad \text{to:}$$

– należy układ ten najpierw przekształcić tak, aby pierwsze pochodne nieznanych funkcji *p* i *q* występowały po lewej stronie znaków równości:

$$\begin{cases} p' = -2p - 2x \\ q' = q \end{cases}$$

– a następnie należy przyjąć np., że poszukiwana funkcja *p* jest pierwszym elementem wektora **y**, a funkcja *q* drugim elementem wektora. Ostatecznie, należy zapisać funkcję:

Wersja 1

```
function [dy]=fun (x, y)
dy(1) = –2*y(1) – 2 * x;
dy(2) = y(2);
y = y’;
```

Wersja 2

```
function [dy]=fun (x, y)
dy = [–2*y(1) – 2 * x ; y(2)];
```

Uwaga:

Parametr dy musi być wektorem kolumnowym. Zwróć uwagę na dwie różne metody konstruowania takiego wektora. W wersji 1. wektor został utworzony przy pomocy przypisań dy(1) = ... i dy(2) = ... Taka konstrukcja tworzy jednak wektor wierszowy, który należy następnie transponować (y = y’). W wersji 2. zastosowano „;” do oddzielenia elementów wektora.

Przykład 2.

Należy rozwiązać zadanie z przykładu 1 wykorzystując funkcje **ode23** lub **ode45**.

Rozwiązanie:

1. Należy sprowadzić równanie $y' + 3y = 0$ do postaci: $y' = F(x, y)$, czyli: $y' = -3y$.
2. Należy utworzyć funkcję definiującą powyższe równanie i zapisać w M-pliku np. pod nazwą „R1.m”:

   function [dy] = R1(x, y)

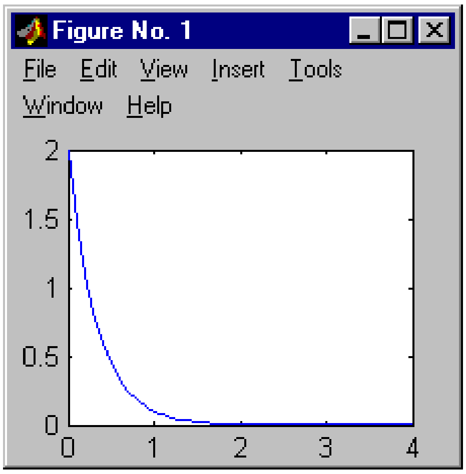
   dy = –3*y;
3. Równanie można rozwiązać wykonując w oknie **Command Window** polecenie:

>> **[X, Y]=ode23(‘R1’,[0 4], 2);**   lub

>> **[X, Y]=ode45(‘R1’,[0 4], 2);**

4. Na koniec można przedstawić rozwiązanie na wykresie:

>> **plot(X, Y)**



5. Jeżeli równanie miałoby być wielokrotnie rozwiązywane (np. w celach demonstracyjnych) można jego rozwiązanie, wraz z generowaniem wykresu umieścić w skrypcie:

   [X, Y]=ode23(‘R1’,[0 4], 2);

   plot(X, Y)

Uwaga:

Porównaj uzyskany wynik z rozwiązaniem analitycznym tego samego równania różniczkowego (przykład 1).

Przekształcanie równania wyższego rzędu do układu równań I rzędu

Układem m równań różniczkowych zwyczajnych nazywamy układ równań, w którym występuje *m* niewiadomych funkcji jednej zmiennej oraz ich pochodne różnych rzędów.

Ogólna postać układu równań różniczkowych n-tego rzędu:

$$
\begin{aligned}
&F_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n)}\right) = 0\\
&F_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n)}\right) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_m\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n)}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Każdy układ zawierający pochodne wyższych rzędów można sprowadzić do układu równań różniczkowych I rzędu przez wprowadzenie dodatkowych funkcji jednej zmiennej.

Zadanie

Należy sprowadzić równanie różniczkowe $y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$,

z warunkami początkowymi: $y(0) = w_1$, $y'(0) = w_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0) = w_n$

do układu *n* równań różniczkowych I rzędu.

Stosując podstawienia: $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\ldots$, $z_n = y^{(n-1)}$ można zapisać układ równań

Układ	**Opis**
$z_1' = z_2$ $z_2' = z_3$ $\ldots$ $z_n' = F(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$	Zmienne z_1, ..., z_n zastępują niewiadomą funkcję *y* i jej kolejne pochodne (oprócz ostatniej). Równania: $z_i' = z_{i+1}$ opisują zależności pomiędzy dodatkowo wprowadzonymi zmiennymi (np.: $z_1' = z_2$ oznacza, że $y' = y'$, itd.). Ostatnie równanie $z_n' = F(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ opisuje właściwe równanie różniczkowe: $y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$. Równania: $z_i' = z_{i+1}$ są niezbędne, aby w zapisie $z_n' = F(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ było wiadomo, że z_1, ..., z_n zastępują niewiadomą funkcję *y* i jej kolejne pochodne.

Warunki początkowe po podstawieniu nowych zmiennych przyjmują postać: $z_1(0) = w_1$, $z_2(0) = w_2$, ... , $z_n(0) = w_n$.

Przykład 3.

Przedstawić na wykresie rozwiązanie równania $y'' + y' + 10y = 0$ z warunkami początkowymi $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ dla $x \in [0,10]$.

Rozwiązanie:

1. Należy sprowadzić równanie $y'' + y' + 10y = 0$ do postaci: $y'' = F(x, y, y')$,
   czyli: $y'' = -y' - 10y$.
2. Następnie równanie $y'' = -y' - 10y$ należy zapisać w postaci układu dwóch równań I rzędu.

   W tym celu wprowadza się podstawienie: $z_1 = y$, $z_2 = y'$. Stąd równanie II rzędu może być zapisane w postaci układu dwóch równań I rzędu:

   $\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -z_2 - 10z_1 \end{cases}$. Warunki początkowe można zapisać jako: $z_1(0) = 5$, $z_2(0) = 0$.
3. Należy utworzyć funkcję definiującą powyższe równanie i zapisać w M-pliku np. pod nazwą „R2.m”:

   function [dz] = R2(x, z)

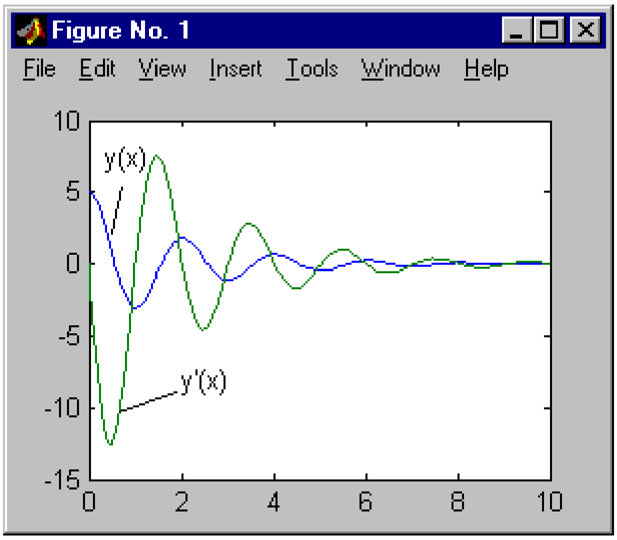
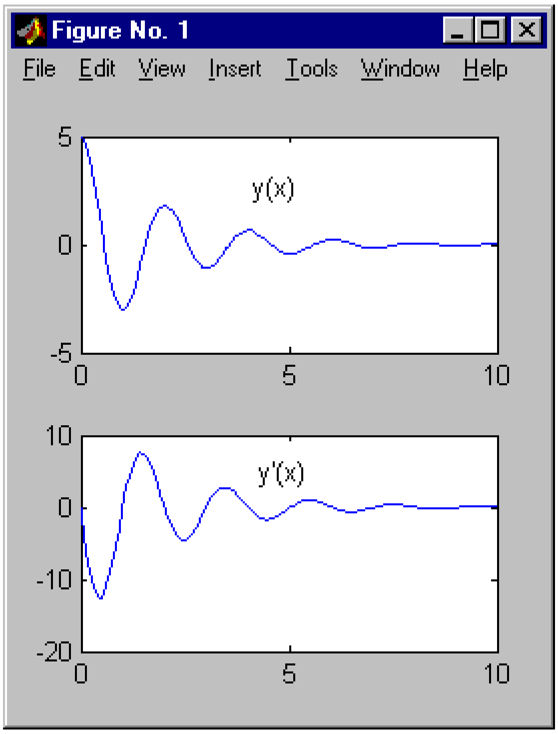
   dz = [z(2)   ;   –z(2)–10*z(1)];
4. Równanie można rozwiązać wykonując w oknie **Command Window** polecenie:

   >> **[X, Z]=ode23(‘R2’,[0 10], [5 0]);**   lub   >> **[X, Z]=ode45(‘R2’,[0 10], [5 0]);**
5. Funkcja **ode** (23 lub 45) zwraca w parametrze wyjściowym **Z** rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest przebieg funkcji $z_1(x)$ i $z_2(x)$ dla $x \in [0,10]$. Funkcje $z_1(x)$ i $z_2(x)$ odpowiadają poszukiwanym $y(x)$ i $y'(x)$ (ponieważ $z_1 = y$, $z_2 = y'$). Pierwsza kolumna macierzy **Z** zawiera wartości funkcji $z_1(x)$, druga kolumna – funkcji $z_2(x)$ w kolejnych punktach dziedziny (wartości tych punktów zwracane są w wektorze **X**). Rozwiązanie równania można przedstawić na wykresie na dwa sposoby:

   a) można na jednym wykresie przedstawić przebieg funkcji $y(x)$ i jej pochodnej $y'(x)$

   b) można umieścić funkcje $y(x)$ i $y'(x)$ na dwóch wykresach.

Wersja a	**Wersja b**
>> **plot(X, Z)** W takim przypadku rysowane są wykresy kolumn macierzy **Z** względem wektora **X**.	>> **subplot(1, 2, 1)** >> **plot(X, Z(:,1))** >> **subplot(1, 2, 2)** >> **plot(X, Z(:,2))**

Wersja a	Wersja b
	

Uwaga:

W wersji b wystąpiły odwołania; Z(: ,1) i Z(:, 2). Odwołanie Z(:, 1) zwraca pierwszą kolumnę macierzy Z, odwołanie Z(:, 2) zwraca drugą kolumnę macierzy Z.

6. Jeżeli równanie miałoby być wielokrotnie rozwiązywane można jego rozwiązanie, wraz z generowaniem wykresu umieścić w skrypcie:

    [X, Z]=ode23(‘R2’,[0 10], [5 0]);

    plot(X, Z)

[X, Y] = ode23(Funkcja, [x0 xk], y0, opcje) lub
[X, Y] = ode45(Funkcja, [x0 xk], y0, opcje)

Dodatkowy (czwarty) parametr wejściowy jest wektorem, którego kolejne współrzędne są kolejnymi opcjami wpływającymi na przebieg obliczeń. Temat ten nie zostanie omówiony w tym opracowaniu.

[X, Y] = ode23(Funkcja, [x0 xk], y0, opcje p1, p2, ...) lub
[X, Y] = ode45(Funkcja, [x0 xk], y0, opcje, p1, p2, ...)

Powyższe wywołanie zostało wprowadzone aby umożliwić użytkownikowi wywoływanie funkcji zawierającej równanie różniczkowe z dodatkowymi parametrami (p1, p2, ...). Liczba tych parametrów zależy od potrzeb użytkownika.

Uwaga!

1. **Parametry p1, p2, … można podawać dopiero po wektorze opcje. Ze względu na to, że sposób definiowania wektora opcje nie został omówiony, należy podczas wywoływania funkcji ode (23 lub 45) podawać w jego miejsce wektor pusty [].**
2. **Funkcja zawierająca opis równania różniczkowego musi również zawierać parametr opcje, tzn. nagłówek przykładowej funkcji opisującej równanie różniczkowe, musi w takim przypadku przyjmować postać: function [dy]=fun (x, y, opcje, p1, p2, ...).**

Przykład 4.

Przedstawić na wykresie rozwiązanie równania $ay'' + by' + cy + dx = 0$ z warunkami początkowymi $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ dla $x \in [0,10]$, dla dwóch zbiorów parametrów **a**, **b**, **c**, **d**:

- a = 1, b = 1, c = 5; d = 0;
- a = 1, b = 5, c = 1, d = 0;

Rozwiązanie:

1. Należy sprowadzić równanie $ay'' + by' + cy + dx = 0$ do postaci: $y'' = F(x, y, y')$, czyli: $y'' = -1/a(b\,y' + c\,y + d\,x)$.
2. Następnie równanie to należy zapisać w postaci układu dwóch równań I rzędu.

   W tym celu wprowadza się podstawienie: $z_1 = y$, $z_2 = y'$. Stąd równanie II rzędu może być zapisane w postaci układu dwóch równań I rzędu:

   $\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -1/a(b\,z_2 + c\,z_1 + d\,x) \end{cases}$. Warunki początkowe można zapisać jako: $z_1(0) = 5$, $z_2(0) = 0$.
3. Należy utworzyć funkcję definiującą powyższe równanie i zapisać w M-pliku np. pod nazwą „R3.m”:

   function [dz] = R3(x, z, opcje, a, b, c, d)

   dz = [z(2) ; –1/a*(b*z(2) + c*z(1) + d*x)];
4. Równanie można rozwiązać, wykonując w oknie **Command Window** polecenie:

dla pierwszego zbioru parametrów a, b, c, d:

>> **[X, Z]=ode23('R3',[0 10], [5 0], [], 1, 1, 5, 0);** lub

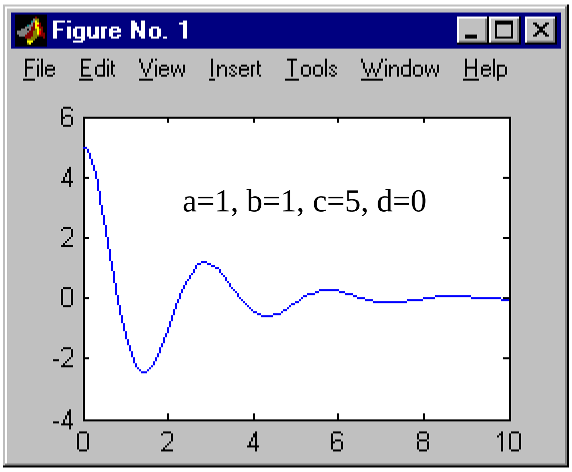
>> **[X, Z]=ode45('R3',[0 10], [5 0], [], 1, 1, 5, 0);**

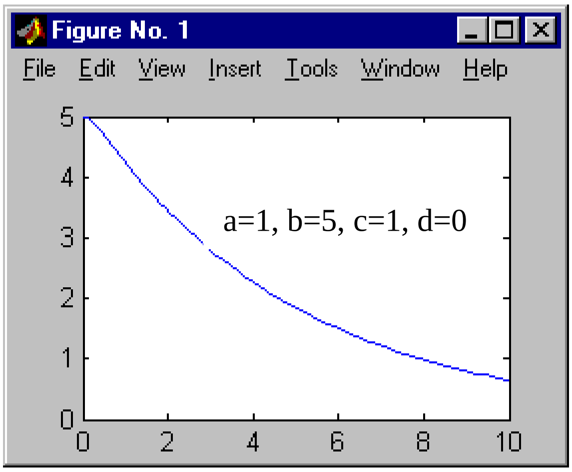
dla drugiego zbioru parametrów a, b, c, d:

>> **[X, Z]=ode23('R3',[0 10], [5 0], [], 1, 5, 1, 0);** lub

>> **[X, Z]=ode45('R3',[0 10], [5 0], [], 1, 5, 1, 0);**

5. Rozwiązanie równania; $y(x)$ można przedstawić na wykresie: >> **plot(X, Z(:, 1))**





Ćwiczenia

1. Przedstaw na wykresie rozwiązanie równania $4y' + 3y^2 + 2x = 5$ z warunkiem początkowym $y(0) = 3$ dla $x \in [0,5]$.

2. Przedstaw na wykresie rozwiązanie $(y(x), y'(x))$ równania $3y'' + \sin(y') + \cos(y) + x = 3$ z warunkami początkowymi $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ dla $x \in [0,5]$.

3. Przedstaw na wykresie rozwiązanie $(x(t), x'(t), x''(t))$ równania $x''' + 3x + 2x'' + t = 0$ z warunkami początkowymi $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$, $x''(1) = 0$ dla $t \in [1,10]$.

4. Przedstaw na wykresie rozwiązanie równania $a\,y' + b\,y + c\,y + d\,x + e = 0$ z warunkiem początkowym $y(0) = 10$ dla $x \in [0,5]$ i dla dwóch zbiorów parametrów:

– a=1, b=1, c=10, d=0, e=0 oraz

– a=1, b=0, c=1, d=1, e=1.