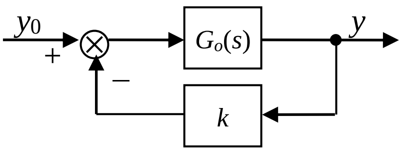
6. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW REGULACJI METODĄ LINII PIERWIASTKOWYCH

Trajektorie wykreślane przez bieguny układu przedstawionego na poniższym rysunku przy zmianie współczynnika wzmocnienia k nazywane są *liniami pierwiastkowymi*, *krzywymi (wykresem) Evansa* lub *miejscami geometrycznymi pierwiastków*.



gdzie: $G_o(s)$ – transmitancja wypadkowa wynikająca z połączenia członu korekcyjnego z obiektem sterowania, $G_o(s)$ należy zapisać w taki sposób by modyfikacja współczynnika k odpowiadała zmianom wartości wybranego parametru członu korekcyjnego, transmitancja $G_o(s)$ opisuje więc dynamiczne właściwości obiektu sterowania i członu korekcyjnego z dokładnością do wyodrębnionego współczynnika wzmocnienia k.

Transmitancja wypadkowa układu jest równa:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + k\,G_o(s)}$$

Bieguny układu są więc pierwiastkami równania:

$$1 + k\,G_o(s) = 0\,.$$

Dobierając wartość wzmocnienia k można wypływać na położenie biegunów układu, a tym samym również wpływać na własności układu.

Analizę wpływu współczynnika wzmocnienia k na rozkład biegunów ułatwia dostępna w bibliotece *CST* funkcja **rlocus**. Funkcja ta może być wykorzystywana wyłącznie dla układów SISO (jedno wejście, jedno wyjście).

Wywołując funkcję należy podać zmienną reprezentującą elementy układu odpowiadające transmitancji $G_o(s)$. Dodatkowo, opcjonalnie można również podać wektor zawierający wartości wzmocnień k dla których będą wyznaczane położenia biegunów układu. Jeżeli wektor ten nie zostanie zdefiniowany funkcja **rlocus** dobierze wzmocnienia automatycznie.

Funkcję można więc wywołać pisząc:

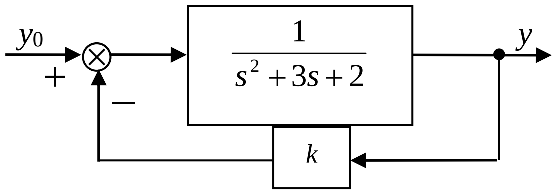
>> **rlocus(Go)** lub

>> **rlocus(Go, K)**

gdzie: **Go** – zmienna reprezentująca elementy układu o transmitancji $G_o(s)$; **K** – wektor definiujący wzmocnienia dla których będą wyznaczane położenia biegunów układu.

Przykład 6.1.

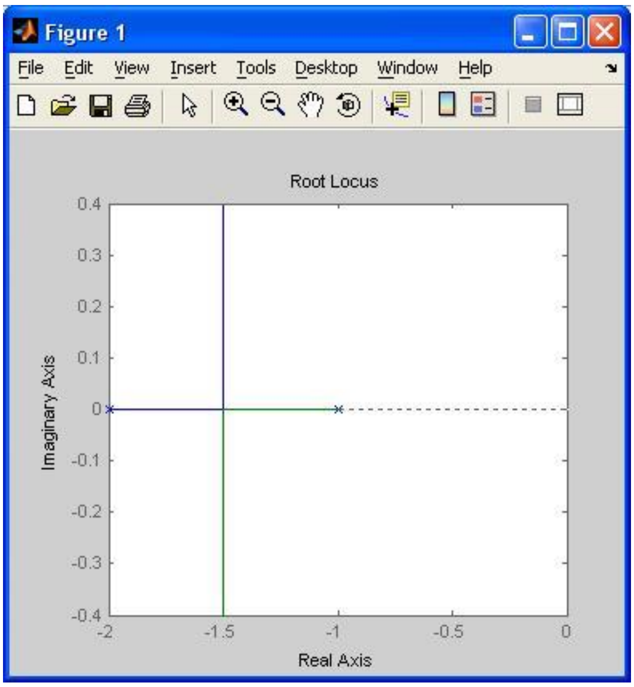
Dla układu z poniższego rysunku należy dobrać wartość wzmocnienia k aby przeregulowanie odpowiedzi skokowej wynosiło $\kappa \approx 15\%$.



Aby zbadać przebieg linii pierwiastkowych układu należy wykonać polecenia:

```
>> Go = tf(1, [1 3 2]);
```
definicja obiektu o transmitancji $G_o(s)=1/(s^2+3s+2)$

```
>> rlocus(Go)
```
generowanie wykresu dla automatycznie dobieranych wzmocnień



Rys. 1. Linie pierwiastkowe układu.

Na rysunku widoczne są bieguny układu o transmitancji $G_o(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$, tzn. punkty $p_1=-1$ i $p_2=-2$ (oznaczone symbolem **x**) oraz trajektorie wykreślane przez bieguny układu wypadkowego dla zmieniającego się współczynnika wzmocnienia k. Linie pierwiastkowe zaczynają się w punktach odpowiadających biegunom układu otwartego $G_o(s)$ (dla k = 0) a kończą w zerach układu otwartego $G_o(s)$ lub w nieskończoności (dla $k = \infty$). W tym przypadku transmitancja $G_o(s)$ nie ma zer, więc linie pierwiastkowe biegną do nieskończoności. Na rysunku widoczne są więc dwie linie pierwiastkowe – ponieważ układ otwarty ma dwa bieguny (jedna linia w kolorze niebieskim, druga w kolorze zielonym).

Wykres generowany przez funkcję **rlocus** można dodatkowo uzupełnić wprowadzając pomocniczą siatkę. ułatwiającą odczyt danych z wykresu. Siatkę można dodać do wykresu wybierając z menu podręcznego (dostępnego pod prawym przyciskiem myszy) opcję **Grid**.

Siatkę tworzą półproste rozpoczynające się w początku układu współrzędnych i koncentryczne półokręgi o środku również w początku układu. Każda półprosta pokazuje potencjalne położenie biegunów obiektu oscylacyjnego o ustalonej wartości względnego współczynnika tłumienia ξ. Każdy z półokręgów przedstawia możliwe położenia biegunów obiektu oscylacyjnego o ustalonej wartości pulsacji drgań własnych nie tłumionych ω_n.

Przypomnienie

Model obiektu oscylacyjnego może być zapisany w postaci transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

gdzie: ω_n – pulsacja drgań własnych nie tłumionych, ξ – względny współczynnik tłumienia; $0 < \xi < 1$, k – współczynnik wzmocnienia.

Łatwo można pokazać, że bieguny transmitancji $G(s)$ opisane są zależnościami:

$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,.$$

Część rzeczywista Re i część urojona Im biegunów wynosi więc:

$$\mathrm{Re} = -\xi\,\omega_n, \qquad \mathrm{Im} = \pm\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,.$$

Poniżej zostanie pokazane, że bieguny układów o tej samej wartości ξ (względnego współczynnika tłumienia) ale o różnych ω_n (pulsacjach drgań własnych nie tłumionych) leżą na tej samej prostej na płaszczyźnie zespolonej.

Wyznaczona z zależności opisującej część rzeczywistą biegunów wartość ω_n wynosi:

$$\omega_n = -\frac{\mathrm{Re}}{\xi}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość ω_n do zależności opisującej część urojoną otrzymuje się:

$$\mathrm{Im} = \pm\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\mathrm{Re}\,. \tag{1}$$

Bieguny układów o różnych ω_n ale o tej samej wartości ξ leżą więc na tych samych prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych (zależność części urojonej od części rzeczywistej (1) jest zależnością liniową).

■

Podobnie można pokazać, że bieguny układów o tej samej wartości ω_n ale o różnych ξ leżą na tym samym okręgu.

Wyznaczona z zależności opisującej część rzeczywistą biegunów wartość ξ wynosi:

$$\xi = -\frac{\mathrm{Re}}{\omega_n}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość ξ do zależności opisującej część urojoną otrzymuje się kolejno:

$$\mathrm{Im} = \pm\omega_n\sqrt{1-\left(-\frac{\mathrm{Re}}{\omega_n}\right)^2} = \pm\sqrt{\omega_n^2\left(1-\frac{\mathrm{Re}^2}{\omega_n^2}\right)} = \pm\sqrt{\omega_n^2-\mathrm{Re}^2}.$$

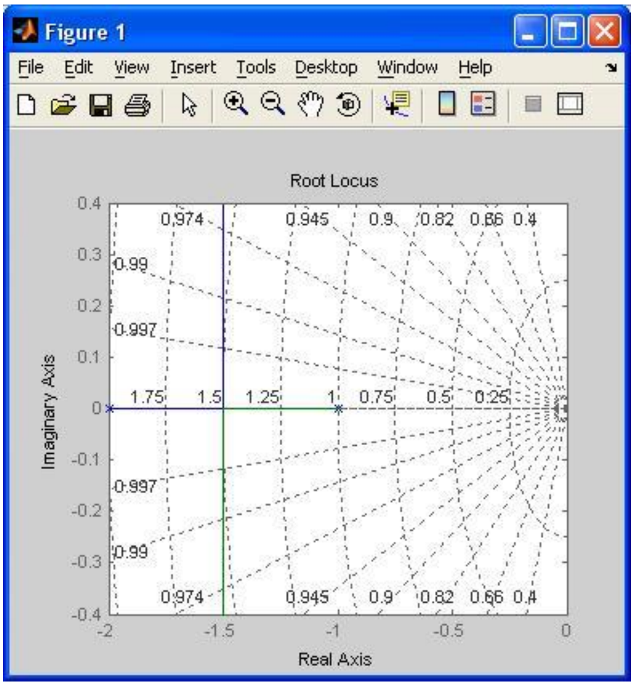
Po podniesieniu do kwadratu, można powyższą zależność zapisać w postaci:

$$\mathrm{Im}^2 = \omega_n^2 - \mathrm{Re}^2, \quad \text{lub:} \quad \mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2 = \omega_n^2. \tag{2}$$

Bieguny układów o różnych ξ ale o tej samej wartości ω_n leżą na tym samym okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu równym ω_n (zależność części urojonej od części rzeczywistej (2) jest opisuje równanie okręgu o środku w punkcie (0,0) i promieniu ω_n).

■

Na poniższym rysunku przedstawiony został przebieg linii pierwiastkowych układu z przykładu 1.

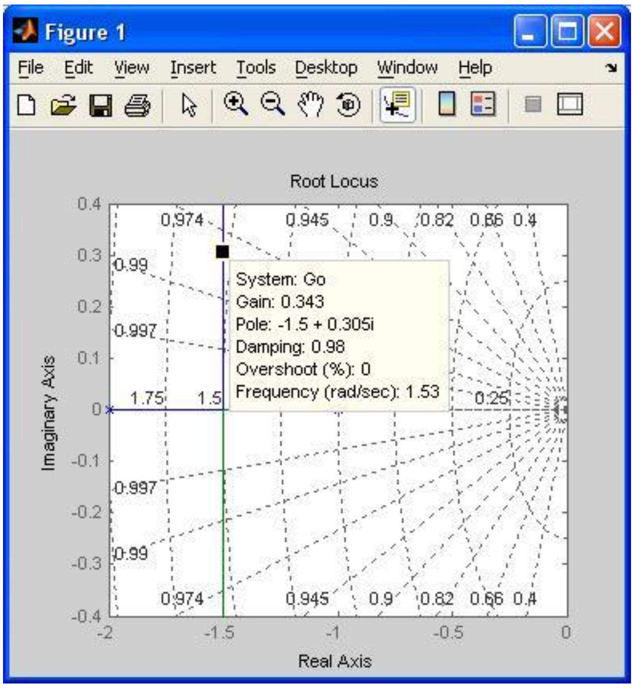


Rys. 2. Linie pierwiastkowe układu z naniesioną siatką

Z wykresu widać, że dla małych wzmocnień bieguny układu położone są na osi rzeczywistej tzn. układ jest układem inercyjnym II rzędu. Od pewnej wartości wzmocnienia układ staje się układem oscylacyjnym ponieważ jego bieguny są liczbami zespolonymi.

Punktem granicznym (pomiędzy zachowaniem inercyjnym II rzędu a zachowaniem oscylacyjnym) jest wzmocnienie dla którego obydwa bieguny układu osiągają wartość (-1.5). Dla większych wartości wzmocnienia, względny współczynnik tłumienia ξ maleje od wartości 1 do widocznej na rysunku wartości około 0.974 - wartości wzmocnień zostały dobrane przez funkcję **rlocus** automatycznie dlatego też nie jest widoczny dalszy przebieg linii pierwiastkowych (na rysunku widoczne są półproste dla układów o współczynniku ξ równym 1, 0.997, 0.99, 0.974 itd.). Pulsacja ω_n układu oscylacyjnego rośnie od wartości 1.5 – z rysunku widać że najmniejszym możliwym okręgiem na którym mogą leżeć bieguny układu jest okrąg o promieniu 1.5, dla rosnących wartości wzmocnień promień okręgu na którym są położone bieguny rośnie.

Odczytywanie parametrów układu, którego linie pierwiastkowe widoczne są na rysunku ułatwia przycisk . Po jego kliknięciu i wskazaniu wybranego punktu linii pierwiastkowej w oknie wykresu pojawiają się dodatkowe informacje.



Rys. 3. Linie pierwiastkowe układu z dodatkowym opisem.

Wyświetlane są:

System: Go

nazwa układu którego linie pierwiastkowe widoczne są na wykresie (w tym przypadku zmienną reprezentującą układ jest zmienna o nazwie Go),

Gain: 0.343

wartość wzmocnienia, któremu odpowiada wskazany punkt linii (tutaj k = 0.343), *Pole: -1.5 + 0.305 i*

współrzędne wskazanego bieguna,

Damping: 0.98

wartość współczynnika ξ odpowiadająca wybranej pozycji bieguna (tutaj $\xi = 0.98$),

Overshoot (%): 0

wartość przeregulowania układu (tutaj $\kappa = 0\%$)

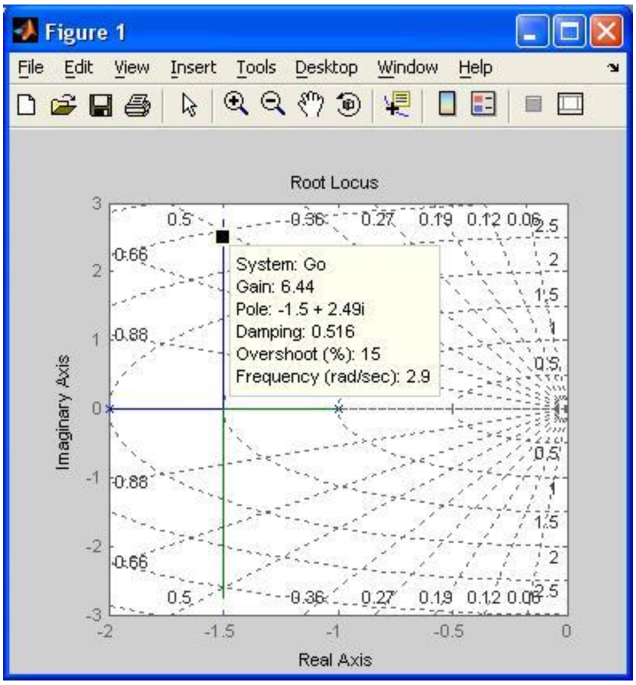
Frequency (rad/sec): 1.53

wartość współczynnika ω_n odpowiadająca wybranej pozycji bieguna (tutaj $\omega_n = 1.53$)

W rozważanym przykładzie współczynnik wzmocnienia k należało dobrać w taki sposób aby przeregulowanie odpowiedzi skokowej wynosiło $\kappa \approx 15\%$. Na wygenerowanych wcześniej wykresach bieguny odpowiadające takiemu przeregulowaniu nie były widoczne ze względu na zbyt mały zakres automatycznie dobranych wzmocnień. Przebiegi linii pierwiastkowych układu należy więc wykreślić ponownie definiując wprost wzmocnienia dla których będą wyznaczane położenia biegunów np. $k = 0{:}0.001{:}8$. Wykonując polecenie:

```
>> rlocus(Go, [0:0.001:8])
```

otrzymuje się przebieg linii pierwiastkowych układu dla wzmocnień z przedziału [0, 8].



Rys. 4. Linie pierwiastkowe układu dla wzmocnień z przedziału [0, 8]

Wykorzystując narzędzie  można teraz łatwo odnaleźć położenie biegunów odpowiadające przeregulowaniu $\kappa \approx 15\%$. Z wykresu można odczytać, że dla $k = 6.44$ przeregulowanie układu będzie równe zadanej wartości 15%.

Sprawdzenie

Poprawność uzyskanego rozwiązania można sprawdzić kreśląc charakterystykę skokową badanego układu. W tym celu należy zbudować układ i wykreślić jego reakcję na stały sygnał wejściowy np. $y_0(t) = 1$.

```
>> Go = tf(1, [1 3 2]);
>> Gk = tf(6.44, 1);
```

definicja elementów składowych układu, G_k – transmitancja korektora, $G_k(s) = 6.44$

```
>> G = feedback(Go, Gk);
```

ujemne sprzężenie zwrotne

```
>> t = 0:0.1:10;
```

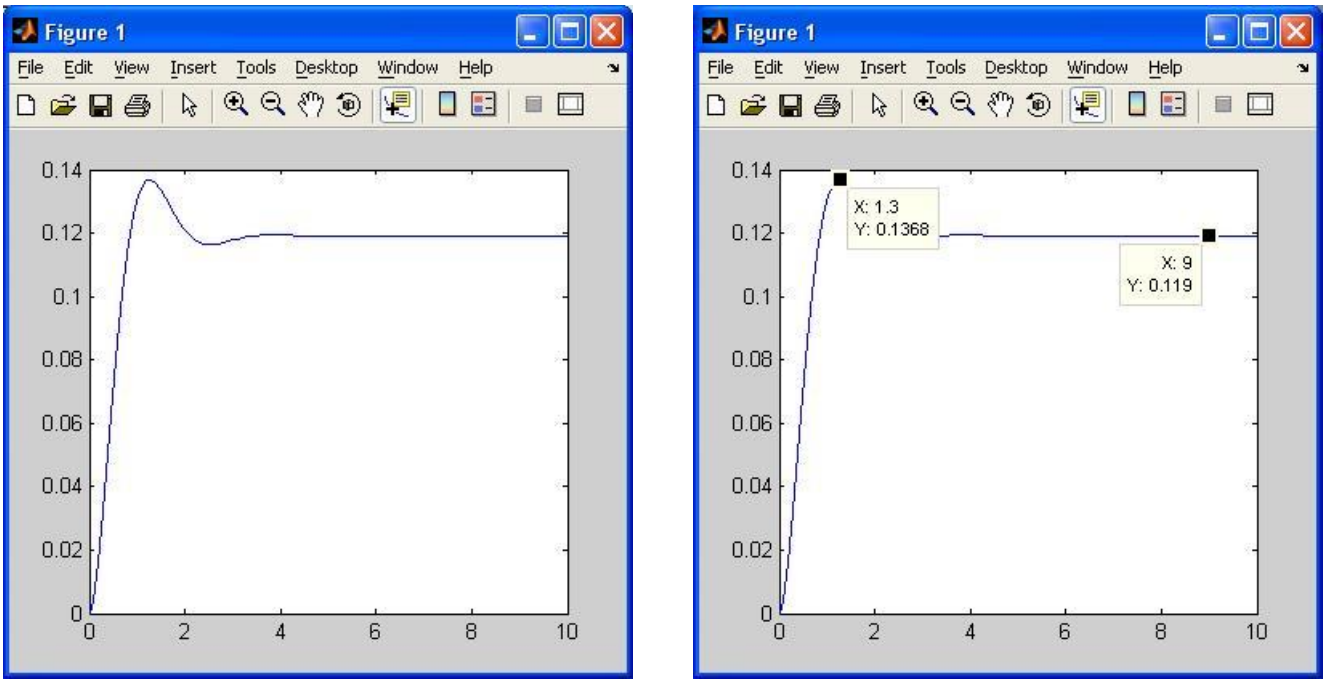
czas symulacji

```
>> y0 = ones(length(t), 1);
```

sygnał wejściowy

```
>> lsim(G, y0, t);
```

symulacja



Rys. 5. Charakterystyka skokowa układu

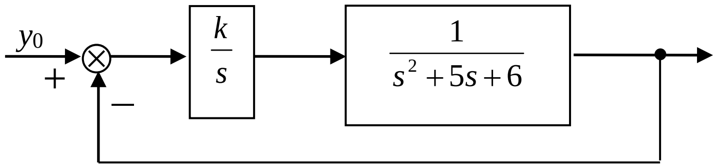
Po odczytaniu z otrzymanego wykresu wartości $y_{max} = 0.1368$ oraz $y_{\infty} = 0.119$ można określić wartość przeregulowania:

$$\kappa = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} 100\% = \frac{0.1368 - 0.119}{0.119} 100\% \approx 15\% .$$

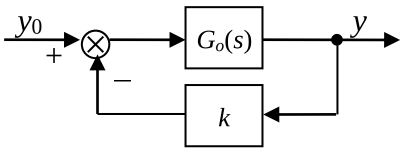
Powyższy wynik potwierdza poprawność uzyskanego rozwiązania.

Przykład 6.2.

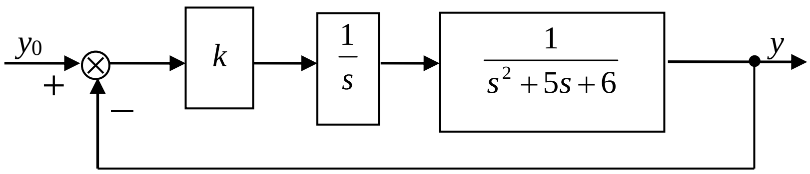
Dla układu z poniższego rysunku należy dobrać wartość wzmocnienia *k* aby czas ustalania odpowiedzi skokowej był jak najkrótszy.



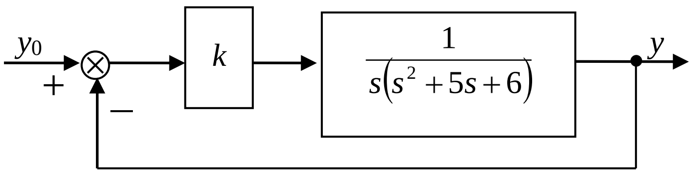
Funkcja *rlocus* dostępna w Matlabie umożliwia wykreślanie linii pierwiastkowych układów, których schemat jest zgodny z poniższym:



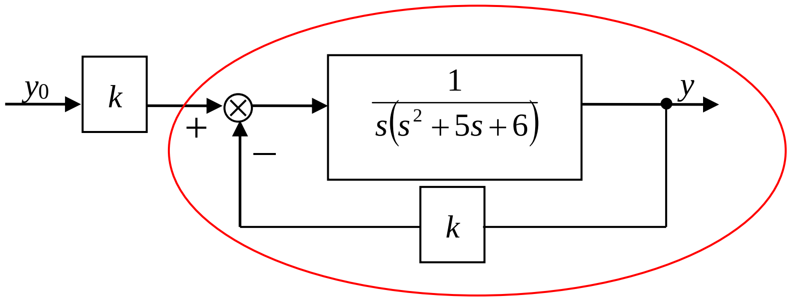
Układ z przykładu 6.2. można przekształcić do postaci narzucanej przez funkcję rlocus. W tym celu urządzenie sterujące o transmitancji $G(s)=\frac{k}{s}$ należy rozdzielić na dwa szeregowo połączone bloki o transmitancjach: $G_1(s)=k$ i $G_2(s)=\frac{1}{s}$. Po takim przekształceniu schemat badanego układu można przerysować w postaci:



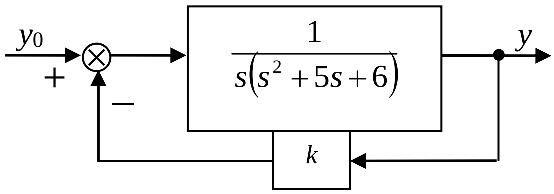
Blok o transmitancji $G_2(s)=\frac{1}{s}$ można teraz dołączyć do transmitancji obiektu regulacji:



Na koniec węzeł sumacyjny można przenieść za człon o transmitancji: *k* (patrz wykład „Przekształcanie schematów blokowych" – folia 18.). Po takim przekształceniu układ można narysować w postaci:



Układ otoczony czerwonym owalem ma już odpowiednią strukturę, która pozwala na wykreślenie przebiegu jego linii pierwiastkowych. Połączenie szeregowe tego układu z członem proporcjonalnym o transmitancji *k*, proporcjonalnie (*k* razy) zwiększa jedynie sygnał wyjściowy układu – nie wpływa więc na czas ustalania sygnału wyjściowego ani na jego wartość przeregulowania. Bieguny zaznaczonego fragmentu układu pokrywają się z biegunami układu wypadkowego. Tak więc zadanie postawione w przykładzie można rozwiązać badając przebieg linii pierwiastkowych układu:



Uwaga! Wyznaczając transmitancję układu pierwotnego i układu z powyższego rysunku można pokazać, że obydwa układy mają takie same bieguny.

Przypomnienie

Czas ustalania t_r (*czas regulacji*) – odpowiada czasowi po jakim różnica między wartością odpowiedzi $h(t)$ a jej wartością ustaloną h_∞ nie przekracza Δ (Δ=1, 2, 5 lub 10%) wartości ustalonej.

Dla obiektów oscylacyjnych czas ustalania wyznacza się z wzoru:

$$t_r = \frac{1}{\xi\,\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta}.$$

Dla zadanej wartości Δ, wzrost wartości iloczynu $\xi\,\omega_n$ przyczynia się do skracania czasu t_r.

W przypomnieniu do przykładu 1. pokazano, że część rzeczywista biegunów obiektu oscylacyjnego wynosi:

$$\mathrm{Re} = -\xi\,\omega_n.$$

Z powyższych stwierdzeń wynika więc, że im większa co do wartości bezwzględnej część rzeczywista biegunów układu (im bardziej w lewo od osi urojonej bieguny są położone) tym krótszy jest czas ustalania odpowiedzi skokowej.

Przykładowe zadanie można więc rozwiązać kreśląc linie pierwiastkowe układu i wybierając wzmocnienie k, dla którego bieguny układu są położone jak najdalej od osi urojonej.

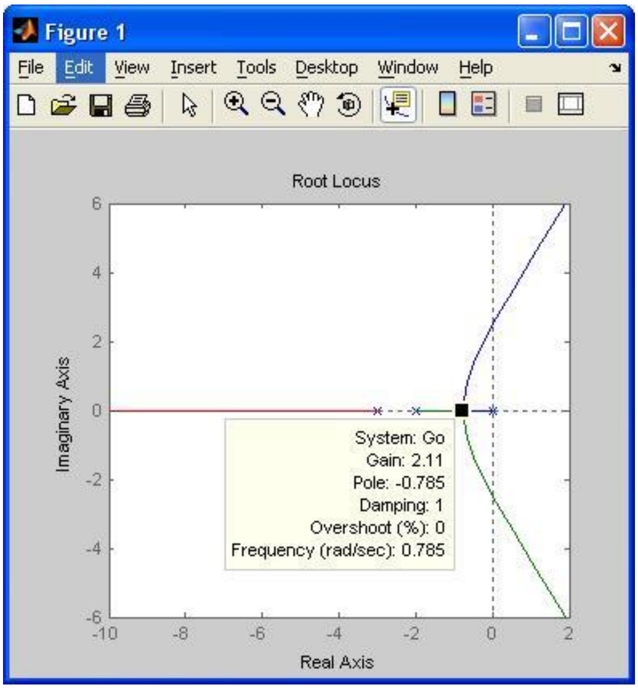
Przebieg linii pierwiastkowych układu można wykreślić układu wykonując polecenia:

```
>> Go = tf(1, [1 5 6 0]);
```

definicja obiektu o transmitancji $G_o(s)=1/s(s^2+5s+6)=1/\ s^3+5s^2+6s$

```
>> rlocus(Go)
```

generowanie wykresu dla automatycznie dobieranych wzmocnień



Rys. 6. Linie pierwiastkowe układu o transmitancji $G_o(s)=1/\ s^3+5s^2+6s$

W przypadku układów, których bieguny mają różne części rzeczywiste o czasie ustalania odpowiedzi układu decyduje biegun znajdujący się najbliżej osi urojonej (takiemu biegunowi odpowiadają składowe sygnału wyjściowego zanikające najwolniej). Odległość najbliższego bieguna decyduje więc o czasie ustalania, czym ta odległość jest większa tym czas ustalania jest krótszy.

Analizując wykres linii pierwiastkowych należy obserwować więc położenie bieguna który znajduje się najbliżej osi urojonej (w przykładzie dla małych wzmocnień takim biegunem jest biegun którego droga została zaznaczona na niebiesko, od punktu oznaczonego ■ dwa bieguny: zielony i niebieski mają już takie same części rzeczywiste i przybliżają się od osi urojonej).

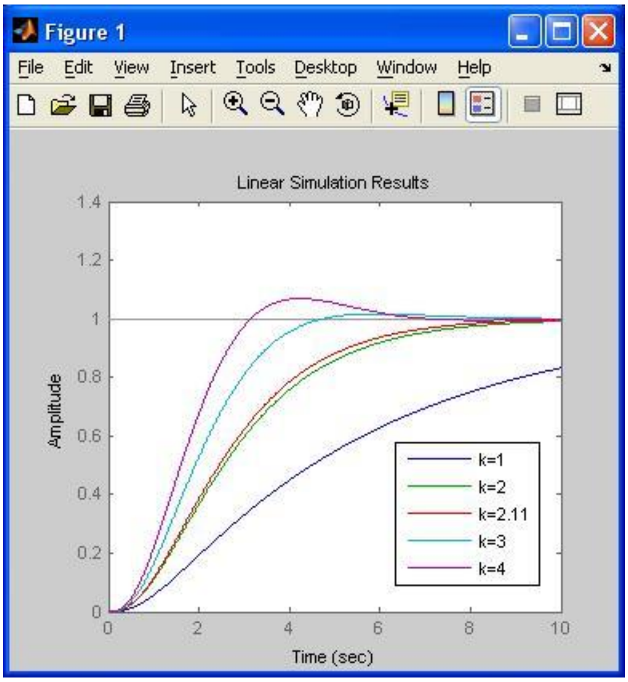
Najdalszym położeniem w której znajduje się najbliższy biegun jest położenie dla wzmocnienia $k = 2.11$. Wzmocnienie to daje więc najkrótszy czas ustalania odpowiedzi skokowej.

Sprawdzenie

Poprawność uzyskanego rozwiązania można sprawdzić kreśląc charakterystykę skokową badanego układu. W tym celu należy zbudować układ i wykreślić jego reakcję na stały sygnał wejściowy np. $y_0(t) = 1$.

```
>> k = 2.11;
>> Gk = tf(k, [1 0]);
>> Go = tf(1, [1 5 6]);
>> G1 = tf(1, 1);
>> Gko = series(Go, Gk);
>> G = feedback(Gko, G1);
>> t = 0:0.1:10;
>> y0 = ones(length(t), 1);
>> lsim(G, y0, t);
```

Charakterystykę skokową można wykreślić konstruując układ pierwotny lub układ przekształcony. Przykładowe polecenia wykreślają charakterystykę układu pierwotnego.



Rys. 7. Charakterystyki skokowe układu dla k = 1, 2, 2.11, 3, 4.

Charakterystyki skokowe uzyskane dla różnych wartości wzmocnienia *k* potwierdzają prawidłowość uzyskanego rozwiązania.