1. FUNKCJE PODSTAWOWE

1.1. Jednowymiarowe zmienne losowe

1.1.1. Rozkład normalny

Funkcja gęstości

```
y = normpdf(x, m, s)
```

gdzie:

`x` – wektor zawierający wartości dla których przeprowadzane będą obliczenia;

`m`, `s` – parametry rozkładu normalnego: średnia i odchylenie;

`y` – wektor zawierający wartości funkcji gęstości dla każdego elementu z `x`.

```
p = normspec(przedzial, m, s)
```

gdzie:

`m`, `s` – jw.;

`przedzial` – dwuelementowy wektor definiujący przedział zmiennej losowej (granicami przedziału mogą być: $-\infty$ tzn. `-Inf` i $+\infty$ tzn. `Inf`);

Funkcja `normspec` wykreśla funkcję gęstości rozkładu zakreślając pole odpowiadające prawdopodobieństwu wystąpienia wartości należącej do podanego przedziału, funkcja zwraca obliczoną wartość w parametrze p.

Dystrybuanta

```
y = normcdf(x, m, s)
```

gdzie:

`x`, `m`, `s` – jw.;

`y` – wektor zawierający wartości dystrybuanty dla każdego elementu z x.

Odwrotność dystrybuanty

```
x = norminv(p, m, s)
```

gdzie:

`m`, `s` – jw.;

`p` – wektor zawierający prawdopodobieństwa;

`x` – wektor zawierający wartości zmiennej losowej spełniające warunek `p = normcdf(x,m,s)`.

Liczby losowe

```
x = normrnd(m, s, w, k)
```

gdzie:

`m`, `s` – jw.;

`x` – wektor lub macierz zawierający wylosowane wartości o rozkładzie normalnym;

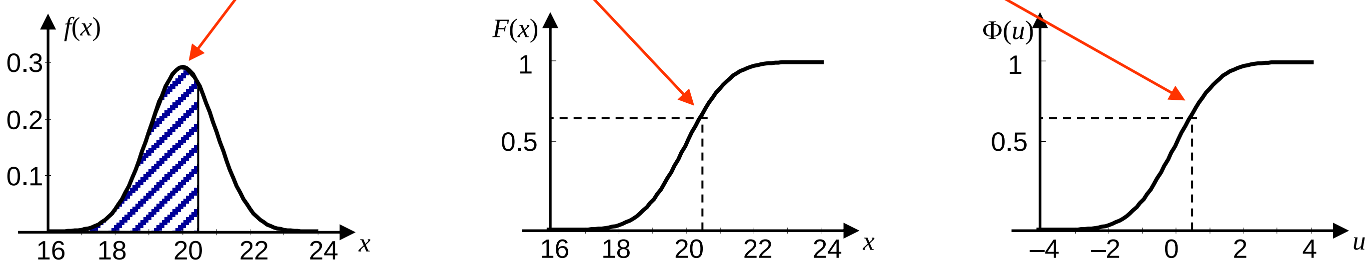
`w`, `k` – rozmiar `x`, `w` – ilość wierszy, `k` – ilość kolumn

Przykład 1.

Na podstawie pomiarów długości dużej partii detali wykonywanych na pewnym stanowisku stwierdzono, że rozkład długości jest rozkładem $\mathcal{N}(20,\ 1.5)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że długość losowo wybranego detalu:

a) jest mniejsza lub równa 20.5,
b) jest większa od 21.5,
c) mieści się w przedziale (20.5 21.5],
d) co najmniej o 2 jednostki różni się od średniej,
e) obliczyć odchylenie od średniej dla którego prawdopodobieństwo wystąpienia detali o długości przekraczającej wyznaczone odchylenie wyniesie 0.1.

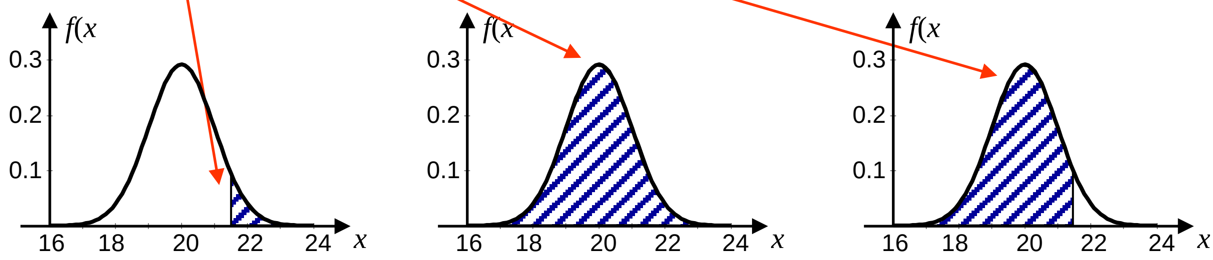
a)
$$P(x \le 20.5) = F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(20.5) = \Phi\left(\frac{20.5-20}{1.5}\right) = \Phi(0.3333) = 0.6306$$




```
a=normcdf(20.5,20,1.5)
a =
    0.6306
```

```
a=normcdf((20.5-20)/1.5)
a =
    0.6306
```

b)
$$P(x > 21.5) = 1 - P(x \le 21.5) = 1 - F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(21.5) = 1 - \Phi\left(\frac{21.5-20}{1.5}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

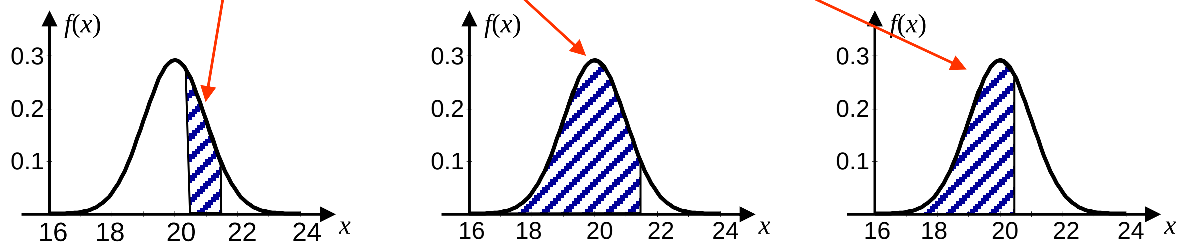



```
b=1-normcdf(21.5,20,1.5)
b =
    0.1587
```

```
b=1-normcdf((21.5-20)/1.5)
b =
    0.1587
```

c)

$$P(20.5 < x \le 21.5) = P(x \le 21.5) - P(x \le 20.5) = F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(21.5) - F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(20.5) = \Phi(1) - \Phi(0.3333) = 0.2108$$

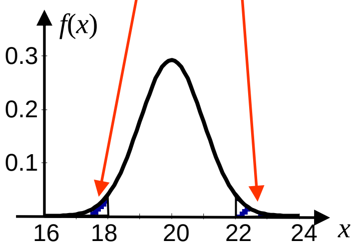



```
p=normcdf([21.5 20.5],20,1.5);
c=p(1)-p(2)
c =
    0.2108
```

```
p=normcdf(([21.5 20.5]-20)/1.5);
c=p(1)-p(2)
c =
    0.2108
```

d)

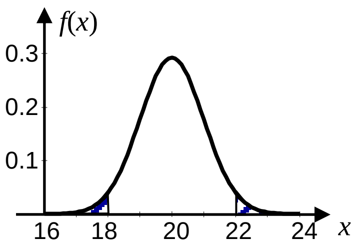
$$P(|x-20| \ge 2) = P(x \le 18) + P(x \ge 22) = 2\,P(x \le 18) = 2F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(18) = 2\Phi\left(\frac{18-20}{1.5}\right) = 2\Phi(-1.3333) = 0.1824$$




```
d=2*normcdf(18,20,1.5)
d =
    0.1824
```

```
d=2*normcdf((18-20)/1.5)
d =
    0.1824
```

e)



$$\left.\begin{aligned} &P(|x-20| \ge odl) = 0.1 \\ &P(|x-20| \ge odl) = 2\,P(x \le 20 - odl) = 2\,F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(20-odl) \end{aligned}\right\}$$

$$F_{\mathcal{N}(20,1.5)}(20-odl) = 0.05 \longrightarrow 20 - odl = F^{-1}_{\mathcal{N}(20,1.5)}(0.05)$$

$$odl = 20 - F^{-1}_{\mathcal{N}(20,1.5)}(0.05) \longrightarrow odl = 2.4673$$

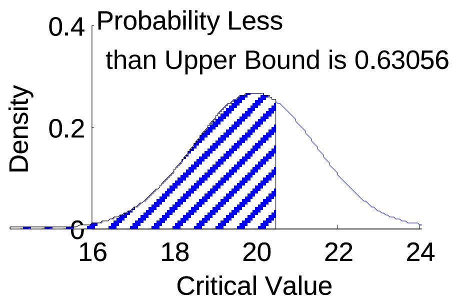
$$odl = 20 - F^{-1}_{\mathcal{N}(20,1.5)}(0.05)$$

```
e=20-norminv(0.05,20,1.5)
e =
    2.4673
```

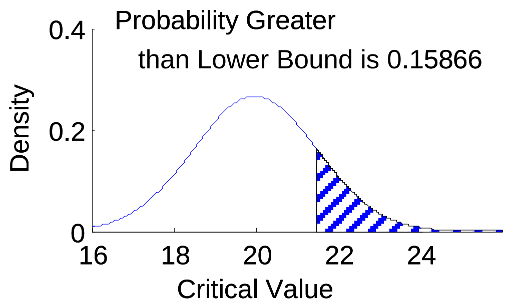
```
e=20-(1.5*norminv(0.05)+20)
e =
    2.4673
```

Wykorzystanie funkcji `normspec`

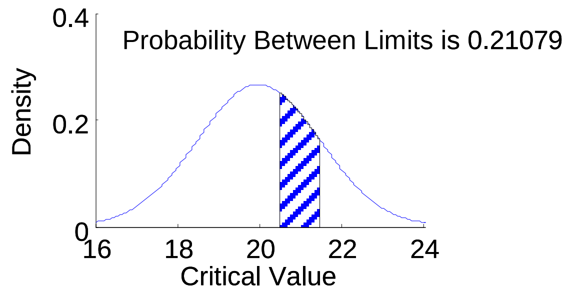
```
a=normspec([-Inf, 20.5],20,1.5)
a =
   0.6306
```




```
b=normspec([21.5, Inf],20,1.5)
b =
   0.1587
```

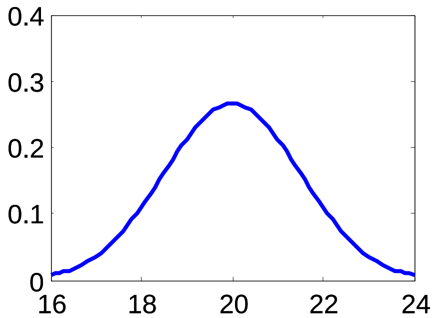



```
c=normspec([20.5, 21.5],20,1.5)
c =
   0.2108
```

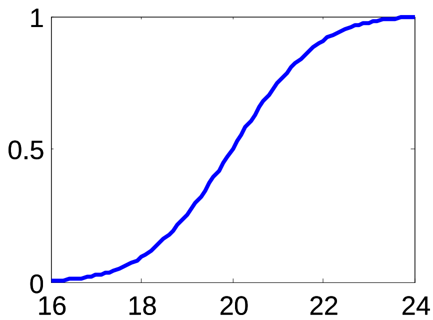


Wykres funkcji gęstości i dystrybuanty

```
x=16:0.1:24;
y=normpdf(x,20,1.5);
plot(x, y)
```




```
x=16:0.1:24;
y=normcdf(x,20,1.5);
plot(x, y)
```



1.1.2. Rozkłady χ^2, *t* i *F*

Funkcja gęstości

```
y = chi2pdf(x, v)
y = tpdf(x, v)
y = fpdf(x, v1, v2)
```

gdzie:

`x` – wektor zawierający wartości dla których przeprowadzane będą obliczenia;

`v`, `v1`, `v2` – liczba stopni swobody;

`y` – wektor zawierający wartości funkcji gęstości dla każdego elementu z `x`.

Dystrybuanta

```
y = chi2cdf(x, v)
y = tcdf(x, v)
y = fcdf(x, v1, v2)
```

gdzie:

`x`, `v`, `v1`, `v2` – j.w.;

`y` – wektor zawierający wartości dystrybuanty dla każdego elementu z `x`.

Odwrotność dystrybuanty

```
x = chi2inv(p, v)
x = tinv(p, v)
x = finv(p, v1, v2)
```

gdzie:

`v`, `v1`, `v2` – j.w.;

`p` – wektor zawierający prawdopodobieństwa;

`x` – wektor zawierający znalezione wartości zmiennej losowej dla których prawdopodobieństwo, że wypadnie wartość mniejsza bądź równa poszukiwanej wartości `x` wynosi `p`.

Liczby losowe

```
x = chi2rnd(v, w, k)
x = trnd(v, w, k)
x = frnd(v1, v2, w, k)
```

gdzie:

`v`, `v1`, `v2`– jw.;

`x` – wektor lub macierz zawierający wylosowane wartości o rozkładzie χ^2, *t* lub *F*;

`w`, `k` – rozmiar `x`, `w` – ilość wierszy, `k` – ilość kolumn.

Przykład 2.

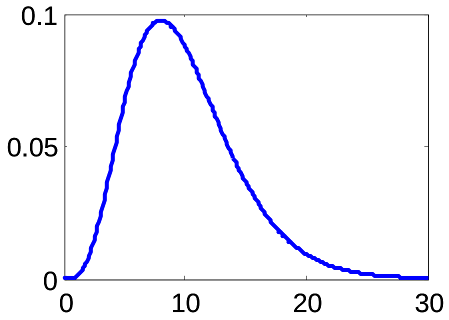
Obliczyć prawdopodobieństwo, że długość losowo wybranego detalu jest większa od 2 zakładając, że rozkład długości jest:

a) rozkładem χ^2 o 10 stopniach swobody, *b*) rozkładem *t* o 10 stopniach swobody,

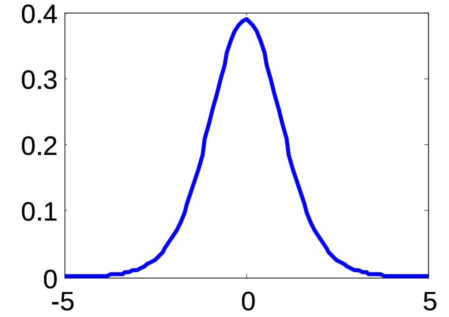
c) rozkładem *F* o 5 i 10 stopniach swobody.

Wykreślić funkcję gęstości każdego z rozkładów.

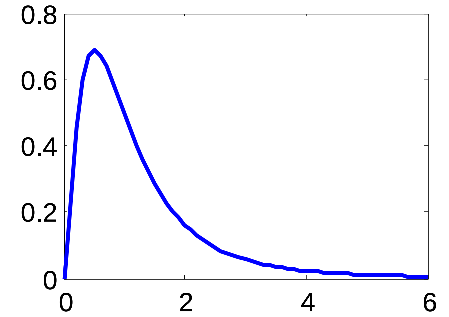
```
a=1-chi2cdf(2,10)
a =
   0.9963
x=0:0.1:30; y=chi2pdf(x, 10); plot(x,y)
```




```
b=1-tcdf(2,10)
b =
   0.0367
x=-5:0.1:5; y=tpdf(x, 10); plot(x,y)
```




```
c=1-fcdf(2,5,10)
c =
   0.1642
x=0:0.1:6; y=fpdf(x, 5, 10); plot(x,y)
```



2.2. Estymacja punktowa

2.2.1. Miary położenia

Średnia arytmetyczna

```
xs = mean(X)
xs = mean(X, wymiar)
```

Średnia geometryczna

```
G = geomean(X)
G = geomean(X, wymiar)
```

Średnia harmoniczna

```
H = harmmean(X)
H = harmmean(X, wymiar)
```

Kwantyle

```
Q = quantile(X, p)
Q = quantile(X, p, wymiar)
```

Mediana

```
Me = median(X)
Me = median(X, wymiar)
```

gdzie:

`X` – wektor lub macierz, jeśli `X` jest macierzą funkcje zwracają wektor, którego elementami są obliczone miary dla kolejnych kolumn macierzy;

`wymiar` – miary obliczane: dla kolumn macierzy jeśli wymiar równy 1, dla wierszy jeśli równy 2;

`p` – rząd *kwantyla*, np.: 0.25, 0.5, 0.75, ...

1.2.2. Miary rozproszenia

Odchylenie standardowe

```
s = std(X)
s = std(X, rodzaj)
s = std(X, rodzaj, wymiar)
```

Wariancja

```
s2 = var(X)
s2 = var(X, rodzaj)
s2 = var(X, rodzaj, wymiar)
```

Rozstęp

```
r = range(X)
r = range(X, wymiar)
```

Rozstęp międzykwartylowy

```
r = iqr(X)
r = iqr(X, wymiar)
```

gdzie:

`X`, `wymiar` – patrz funkcje obliczające miary położenia;

`rodzaj` – jeśli równy 0 wykorzystywane są wzory z dzieleniem przez (n-1), jeśli równy 1 wykorzystywane wzory z dzieleniem przez n, domyślnie równy 0.

1.2.3. Miary zniekształcenia

Współczynnik skośności

```
a = skewness(X)
a = skewness(X, wymiar)
```

Współczynnik spłaszczenia

```
k = kurtosis(X)
k = kurtosis(X, wymiar)
```

Moment centralny

```
m = moment(X, rząd)
m = moment(X, rząd, wymiar)
```

gdzie:

`X`, `wymiar` – patrz funkcje obliczające miary położenia;

`rząd` – rząd momentu centralnego (moment centralny rzędu 2 to wariancja liczona z wzoru dzieleniem przez *n*).

Przykład 3.

Wyznaczyć podstawowe miary położenia, rozproszenia i zniekształcenia dla zebranych w poniższej tabeli 10 niezależnych pomiarów długości losowo wybranego detalu (wyniki uporządkowano rosnąco).

18	21	22.4	23	21.3	21.9	17.6	21	17.8	19.4

```
X=[18 21 22.4 23 21.3 21.9 17.6 21 17.8 19.4];
```

miary położenia

```
mean(X)
ans =
   20.3400
geomean(X)
ans =
   20.2500
harmmean(X)
ans =
   20.1585
quantile(X,0.25)
ans =
   18
```

miary rozproszenia

```
std(X)
ans =
   1.9962
std(X, 1)
ans =
   1.8938
var(X)
ans =
   3.9849
var(X,1)
ans =
   3.5864
```

```
quantile(X,[0.25 0.5 0.75])
ans =
   18.0000   21.0000   21.9000
median(X)
ans =
   21.0000
```

```
range(X)
ans =
   5.4000
iqr(X)
ans =
   3.9000
```

miary zniekształcenia

```
a = skewness(X)
a =
   -0.2618
a = moment(X, 3)/std(X, 1)^3
a =
   -0.2618
```

```
k = kurtosis(X)
k =
   1.5858
k = moment(X, 4)/std(X, 1)^4
k =
   1.5858
```