3. PROBLEM KLASYFIKACJI

Jednym z podstawowych zadań, które wykonują sieci neuronowe jest klasyfikacja obiektów. Zadanie to polega na przyporządkowaniu obiektowi fizycznemu, zdarzeniu lub zjawisku jednej z wcześniej wyspecyfikowanych **klas** (lub inaczej **kategorii**). Zadanie klasyfikacji można opisać jako transformację punktu z przestrzeni wejściowej (opis obiektu) do przestrzeni wyjściowej, zwanej przestrzenią klasyfikacji. Obszary zawierające obiekty tej samej klasy nazywane są **obszarami decyzyjnymi**, natomiast granice pomiędzy nimi **powierzchniami decyzyjnymi**.

Przykład 1

Punkty $P_1(1, 1)$, $P_2(1, -1)$, $P_3(-1, 1)$, $P_4(-1, -1)$ należy przypisać do jednej z dwóch klas:

- K1 - punkty, których obie współrzędne są dodatnie,
- K2 - punkty, które mają co najmniej jedną współrzędną ujemną.

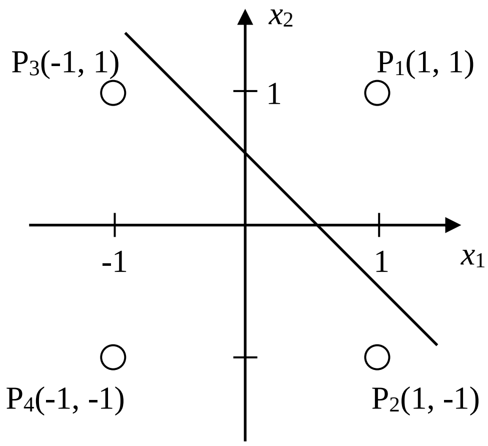
Klasyfikowanymi obiektami są punkty płaszczyzny, można więc stwierdzić, że przestrzeń wejściowa zawiera cztery obiekty, każdy opisany za pomocą dwóch cech, natomiast przestrzeń klasyfikacji składa się z dwóch elementów (K1 i K2). Schemat blokowy takiego klasyfikatora przedstawia rys. 1.

Rys. 1. Blokowy schemat klasyfikatora

W tym przypadku klasyfikację można przeprowadzić badając sumę współrzędnych punktów:

- Jeżeli $x_1 + x_2 > 0$, to obiekt należy do klasy K1,
- Jeżeli $x_1 + x_2 \leq 0$, to obiekt należy do klasy K2.

Wyniki przeprowadzonej w ten sposób klasyfikacji można interpretować jako podział dwuwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej na dwa obszary decyzyjne. Jeden z możliwych sposobów podziału został przedstawiony na rys. 2. Powierzchnią decyzyjną jest w tym przypadku prosta $x_1 + x_2 = 0.5$. Punkt leżący powyżej prostej zostanie odwzorowany na klasę K1 (przypisany do pierwszego obszaru decyzyjnego), punkty leżące poniżej prostej na klasę K2 (przypisane do drugiego obszaru decyzyjnego).



Rys. 2. Przykład klasyfikacji

Praktyczne zastosowania klasyfikatorów wymagają rozwiązania zadań znacznie bardziej skomplikowanych od prezentowanego w przykładzie. Obecnie klasyfikatory wykorzystuje się przy analizie elektrokardiogramów, identyfikacji odcisków palców, detekcji sygnałów radiowych, rozpoznawaniu mowy, itp. Większość z tych zadań wymaga przypisania obiektów do wielu obszarów decyzyjnych, a poszczególne powierzchnie decyzyjne nie są opisane linią prostą, nie zmienia to jednak podstawowej idei zadania zilustrowanej w przykładzie 1.

3.1. Klasyfikator neuronowy

Opisywane powyżej zadania klasyfikacji mogą być rozwiązywane przy pomocy sieci neuronowej. Zależnie od stopnia komplikacji zadania konieczne jest stosowanie sieci o różnych liczbach neuronów i warstw. Na początku zostaną rozpatrzone możliwości pojedynczego neuronu.

3.1.1. Neuron bez biasu

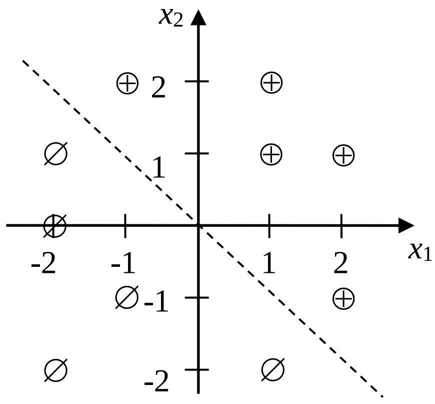
Sygnały wejściowe neuronu są kumulowane przez blok sumujący, a następnie przekształcane na sygnał wyjściowy za pomocą funkcji aktywacji. W przypadku, gdy jest to bipolarna funkcja skoku jednostkowego na wyjściu pojawiają się dwa sygnały: 1 lub -1. Mogą być one interpretowane jako informacja o klasie obiektu, którego cechy zostały określone na wejściu. Pojedynczy neuron można więc opisać jako klasyfikator, który dokonuje transformacji punktu z przestrzeni wejściowej do dwuelementowej przestrzeni klasyfikacji (przypisuje obiekty, których cechy zostały określone na wejściu do jednej z dwóch klas).

Przykład 2.

Dany jest neuron o dwóch wejściach, bipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji i wagach w_1=w_2=1. Przeanalizujmy jego działanie dla kilku wybranych wartości wejściowych:

Tabela 1.

x_1	x_2	φ	y
1	1	2	1
2	1	3	1
1	2	3	1
-1	2	1	1
2	-1	1	1
-1	-1	-2	-1
-2	0	-2	-1
-2	1	-1	-1
1	-2	-1	-1
-2	-2	-4	-1



Rys. 3. Graficzna reprezentacja wyników

Tabela 1. zawiera wartości zwracane przez neuron dla dziesięciu przykładowych sygnałów wejściowych. Na rys. 3. pokazana została graficzna reprezentacja uzyskanych wyników. Wartości wejściowe zostały zinterpretowane jako współrzędne punktów na płaszczyźnie, wartościom wyjściowym przypisano odpowiednie symbole graficzne (1 - ⊕, -1 - ∅). Widoczny jest wyraźny podział sygnałów wejściowych na dwie klasy (obszary decyzyjne) przebiegający wzdłuż prostej zaznaczonej linią przerywaną. W rozpatrywanym przypadku wzór opisujący tą prostą (powierzchnię decyzyjną) może być łatwo wyznaczony. Funkcją aktywacji neuronu jest bipolarna funkcja skoku, w_1=w_2=1, stąd klasę obiektu można określić na podstawie zależności:

$$klasa = \begin{cases} 1 & gdy \quad \varphi = x_1 + x_2 > 0 \\ -1 & gdy \quad \varphi = x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Wynika stąd, że granica pomiędzy klasą 1 i (-1) przebiega w miejscu gdzie φ=0, czyli dla $x_1 + x_2 = 0$. Zależność ta wyznacza równanie prostej postaci $x_2 = -x_1$ (linia przerywana na rys. 3.).

Powyższy przykład opisuje szczególny przypadek, gdy w_1=w_2=1 i może być uogólniony dla dowolnych wag. Jeżeli wagi mogą przyjmować dowolne wartości, to zależność (1) określająca klasę obiektu wejściowego przyjmuje postać:

$$klasa = \begin{cases} 1 & gdy \quad \varphi = w_1 x_1 + w_2 x_2 > 0 \\ -1 & gdy \quad \varphi = w_1 x_1 + w_2 x_2 < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Także w tym przypadku granica pomiędzy klasą 1 i (-1) przebiega w miejscu gdzie φ=0, czyli dla $w_1x_1 + w_2x_2 = 0$. Można stąd wyznaczyć równanie prostej będącej powierzchnią decyzyjną:

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 \tag{3}$$

Tak jak było to przedstawione w pierwszej części opracowania sygnały wejściowe i wagi można przedstawić w postaci wektorów, a potencjał membranowy rozpatrywać jako ich iloczyn skalarny. Korzystając z takiej geometrycznej interpretacji można wykazać pewne zależności pomiędzy poszczególnymi wektorami oraz powierzchnią decyzyjną. Z definicji iloczynu skalarnego wynika, że jest on równy iloczynowi długości wektorów oraz kąta pomiędzy nimi, stąd:

$$\varphi = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{w}|\, |\mathbf{x}| \cos(\alpha) \tag{4}$$

gdzie α - kąt pomiędzy wektorem **w** i **x**.

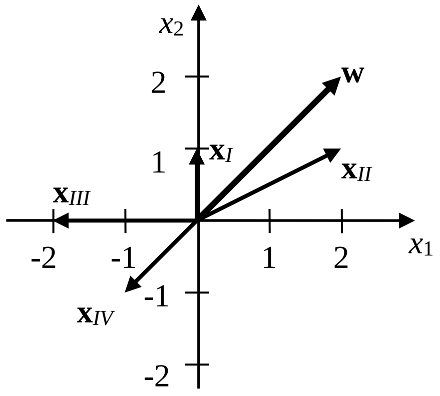
Funkcja kosinus przyjmuje wartości dodatnie dla kątów z przedziału $\left(-90^\circ,\ 90^\circ\right)$. Długości wektorów nie mogą być ujemne z zależności (4) wynika więc, że dla niezerowych wektorów **w**, **x** potencjał membranowy będzie większy od zera jeżeli kąt pomiędzy wektorami jest większy od -90° i mniejszy od 90° oraz mniejszy od zera dla kątów mniejszych od -90° lub większych od 90°. Wynika z tego, że neuron o bipolarnej funkcji aktywacji będzie zwracał wartość 1 dla tych wszystkich wektorów wejściowych, które z wektorem wag tworzą kąt z przedziału $\left(-90^\circ,\ 90^\circ\right)$ i (-1) dla wektorów wejściowych, które tworzą z wektorem wag kąt mniejszy od -90° lub większy od 90°. Wynika stąd, że wektor wag znajduje się w tym obszarze decyzyjnym, dla którego neuron zwraca wartość 1.

Jak wynika z rozważań przedstawionych w przykładzie 2. powierzchnia decyzyjna przebiega w miejscu gdzie φ=0. Z zależności (4) wynika, że iloczyn skalarny dwóch niezerowych wektorów jest równy zero tylko w przypadku, gdy wektory te są prostopadłe (kosinus jest równy zero dla kątów -90° i 90°), stąd wektor wag musi być prostopadły do powierzchni decyzyjnej.

Przykład 3.

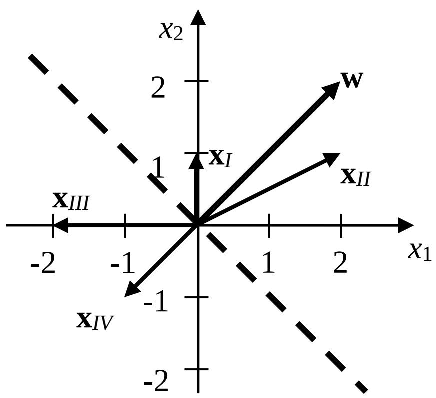
Dany jest neuron o wagach $\mathbf{w} = [2,\ 2]^T$, bipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji oraz sygnały wejściowe: $\mathbf{x}_I = [0,\ 1]^T$, $\mathbf{x}_{II} = [2,\ 1]^T$, $\mathbf{x}_{III} = [-2,\ 0]^T$, $\mathbf{x}_{IV} = [-1,\ -1]^T$. Korzystając z rozważań przedstawionych powyżej należy oszacować do której klasy (obszaru decyzyjnego) zostaną przypisane poszczególne sygnały i określić położenie powierzchni decyzyjnej.

Wykorzystując interpretację geometryczną wektor wag i wektory sygnałów wejściowych można przedstawić na układzie współrzędnych:



Rys. 4. Wektor wag i wektory sygnałów wejściowych

Z rys. 4. można oszacować przybliżone wartości kątów: $\angle \mathbf{w}, \mathbf{x}_I = 45^\circ$, $\angle \mathbf{w}, \mathbf{x}_{II} = -15^\circ$, $\angle \mathbf{w}, \mathbf{x}_{III} = 135^\circ$, $\angle \mathbf{w}, \mathbf{x}_{IV} = 180^\circ$. Korzystając z analizy przeprowadzonej powyżej można stwierdzić, że potencjał membranowy dla pierwszego i drugiego wektora sygnałów wejściowych będzie wartością dodatnią (kosinus kąta 45° i -15° jest dodatni), natomiast dla drugiego i trzeciego wektora wartością ujemną (kosinus kąta 135° i 180° jest ujemny). Wynika stąd, że sygnały pierwszy i drugi będą przypisane do jednego obszaru decyzyjnego (dla nich neuron zwróci 1), natomiast sygnał trzeci i czwarty będą przypisane do drugiego obszaru decyzyjnego (dla nich neuron zwróci -1). Wektor wag jest prostopadły do powierzchni decyzyjnej, musi więc ona przebiegać wzdłuż prostej nachylonej do dodatniego kierunku osi x_1 pod kątem 135° (przerywana linia na rys. 5.).



Rys. 5. Położenie powierzchni decyzyjnej

Powyższe wyniki można zweryfikować korzystając ze wzorów na potencjał membranowy i wyjście neuronu:

- $\varphi_I = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_I = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$, stąd $y_I = sign(\varphi_I) = 1$,
- $\varphi_{II} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_{II} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$, stąd $y_{II} = sign(\varphi_{II}) = 1$,

- $\varphi_{III} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_{III} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = -4$, stąd $y_{III} = sign(\varphi_{III}) = -1$,
- $\varphi_{IV} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_{IV} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -4$, stąd $y_{IV} = sign(\varphi_{IV}) = -1$.

Korzystając z zależności (3) można również wyznaczyć wzór opisujący powierzchnię decyzyjną:

$$x_2 = -\frac{2}{2} x_1 = -x_1 .$$

Potwierdza to poprawność uzyskanych wcześniej wyników.

Przedstawione powyżej rozważania zostały przeprowadzone dla neuronu o dwóch wejściach i bipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji. Jest to szczególny przypadek klasyfikatora neuronowego, którego zaletą jest niewielki stopień złożoności i możliwość prezentacji wyników w postaci graficznej na płaszczyźnie. Pomimo tak dużego uproszczenia problemu uzyskane wyniki można uogólnić na przypadki neuronów z większą liczbą wejść: neuron zawsze przypisuje obiekty do dwóch przestrzeni decyzyjnych, zmienia się jedynie wymiar przestrzeni wejściowej. Jeżeli neuron posiada trzy wejścia, to sygnały wejściowe można interpretować jako punkty z przestrzeni trójwymiarowej. W tym przypadku powierzchnia decyzyjna będzie oczywiście płaszczyzną oddzielającą dwa obszary decyzyjne. Wszystkie wyprowadzone własności wektora wag pozostaną prawdziwe: jest on prostopadły do powierzchni decyzyjnej (normalny do płaszczyzny) i znajduje się w tym obszarze decyzyjnym, dla którego neuron zwraca wartość 1. W ogólnym przypadku *n* wejść sygnały wejściowe można interpretować jako punkty *n*-wymiarowej przestrzeni, a powierzchnię decyzyjną stanowi (*n*-1)-wymiarowa hiperpłaszczyzna. Własności wektora wag są nadal zachowane.

Zastosowanie innych funkcji aktywacji również nie wpływa znacząco na uzyskane wyniki. Najmniejszy wpływ będzie miało zastosowanie unipolarnej funkcji skoku: zmienia się tylko sygnał wyjściowy określający jeden z obszarów decyzyjnych (0 zamiast -1). W przypadku wykorzystania ciągłej funkcji aktywacji (tangens hiperboliczny lub sigmoidalna) następuje pewne rozmycie powierzchni decyzyjnej. Funkcje te nie przełączają się w sposób skokowy, stąd sygnał wyjściowy zaczyna zmieniać swoją wartość już w pewnej odległości od powierzchni decyzyjnej. Może to być interpretowane jako zmniejszające się prawdopodobieństwo przynależności obiektu do danego obszaru decyzyjnego. W wielu zastosowaniach praktycznych okazuje się to przydatne, ponieważ nie zawsze można ostro oddzielić obiekty z dwóch klas.

3.1.2. Neuron z biasem

Klasyfikator neuronowy przedstawiony w punkcie 8. nie może rozwiązać dowolnego zadania. W celu uzyskania pełnej funkcjonalności wymaga on uzupełnienia o bias. Podobnie jak w punkcie poprzednim rozważania zostaną ograniczone do neuronu o dwóch wejściach, jednak wyniki będzie można uogólnić na przypadek neuronu o dowolnej liczbie wejść.

Zależność (3) opisuje powierzchnię decyzyjną, która oddziela od siebie dwa obszary decyzyjne. W przypadku neuronu o dwóch wejściach jest to prosta o współczynniku kierunkowym $-w_1/w_2$ przechodząca zawsze przez początek układu współrzędnych. Z tego powodu klasyfikator tego typu nie może rozwiązać zadań, w których wymagany jest inny podział przestrzeni wejściowej (tak jak w przykładzie 1.).

Tak jak zostało to przedstawione w punkcie 2. granica pomiędzy obszarami decyzyjnymi przebiega w miejscu gdzie φ=0, czyli dla neuronu z biasem: $w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$. Można stąd wyznaczyć równanie prostej będącej powierzchnią decyzyjną:

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 - \frac{b}{w_2} \tag{5}$$

Jest to równanie prostej o współczynniku kierunkowym $-w_1/w_2$, która przecina oś x_1 w punkcie $-b/w_1$ i oś x_2 w punkcie $-b/w_2$. Przy pomocy takiego klasyfikatora można rozwiązać każde zadanie podziału przestrzeni wejściowej na dwie klasy przy pomocy linii prostej. Zadania tego typu nazywane są liniowo separowalnymi.

3.1.3. Sieć jednowarstwowa

Sieć jednowarstwowa jest zbiorem niepołączonych neuronów, ułożonych obok siebie. Każdy sygnał wejściowy trafia do każdego neuronu i jest przez niego przetwarzany. Pojedyncze neurony zachowują się jak klasyfikatory, które dzielą przestrzeń wejściową na dwa obszary decyzyjne, stąd sieć jednowarstwowa może być traktowana jako klasyfikator, który dokonuje podziału przestrzeni wejściowej zgodnie z kilkoma kryteriami (każdy neuron określa jedno kryterium).

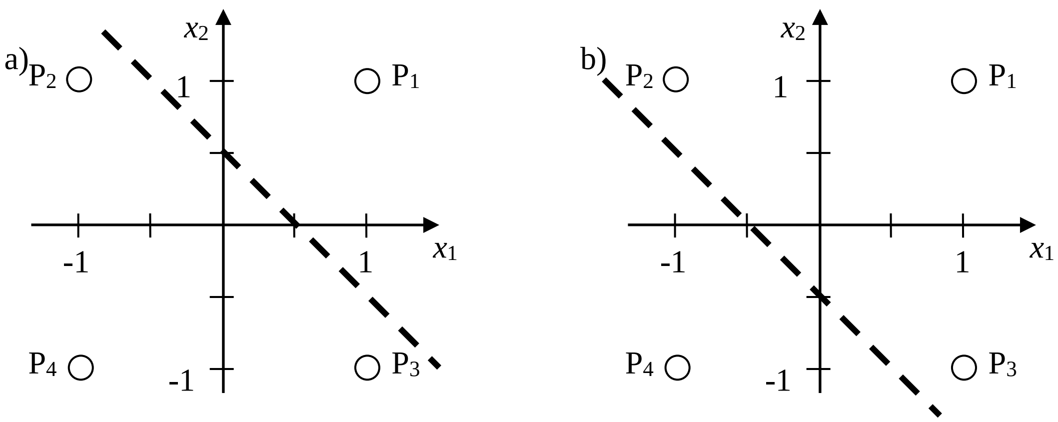
Przykład 4.

Dany jest zbiór punktów: $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$, $P_3(1,-1)$, $P_4(-1,-1)$. Stosując neurony o bipolarnej funkcji aktywacji, należy zaprojektować sieć jednowarstwową (określić strukturę i wartości wag), która dokona ich klasyfikacji zgodnie z dwoma kryteriami:

a) oddziela punkty o dwóch współrzędnych dodatnich od pozostałych,

b) oddziela punkty o dwóch współrzędnych ujemnych od pozostałych.

Klasyfikowane obiekty (punkty płaszczyzny) są opisane przy pomocy dwóch cech (każdy punkt ma dwie współrzędne), stąd sieć będzie miała dwa wejścia. Należy dokonać klasyfikacji zgodnie z dwoma kryteriami, niezbędne są więc dwa neurony (każdy klasyfikuje zgodnie z jednym kryterium). Utworzona w ten sposób sieć będzie miała dwa wyjścia, które będą odpowiadały kolejnym kryteriom klasyfikacji. Dobór wag w takiej sieci sprowadza się do określenia wag dwóch klasyfikatorów neuronowych, z których pierwszy dzieli przestrzeń wejściową zgodnie z kryterium „a”, natomiast drugi zgodnie z kryterium „b”. Zadanie to można wykonać posługując się graficzną interpretacją wektora wag, która została przedstawiona w punkcie 2. Przykładowe powierzchnie decyzyjne dla przypadków a i b zostały przedstawione na rys 6.



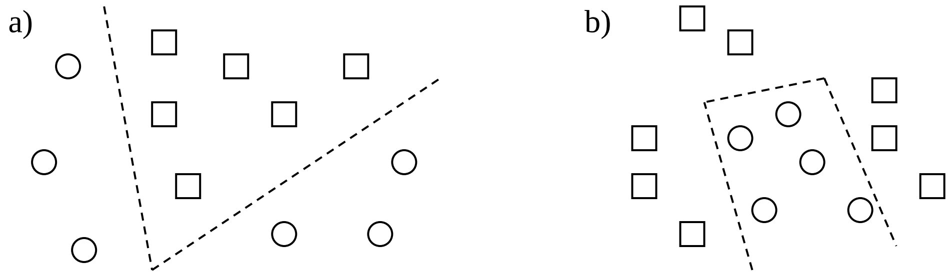
Rys. 6. Powierzchnie decyzyjne wyznaczające obszary zgodnie z kryterium „a" i „b"

Wagi tworzą wektor prostopadły do powierzchni decyzyjnej. Na podstawie rysunku 6. można wyznaczyć wektory wag poszczególnych neuronów: $\mathbf{w}_1 = [1 \quad 1]^T$ i $\mathbf{w}_2 = [-1 \quad -1]^T$. Powierzchnie decyzyjne nie przechodzą przez początek układu współrzędnych, należy więc wykorzystać neurony z biasem. W omawianym przypadku wartości wag związanych z biasem wynoszą odpowiednio b_1=-0.5 i b_2=-0.5.

Uwaga: Przyjęte wartości wag powodują, że pierwszy neuron zwraca wartość 1 dla punktu P_1 i (-1) dla pozostałych, natomiast drugi 1 dla punktu P_4 i (-1) dla pozostałych (punkty P_1 i P_4 znajdują się w tym samym obszarze decyzyjnym co wektor wag). Możliwe jest drugie rozwiązanie zadania, w którym wagi mają przeciwne znaki. W takim przypadku neuron pierwszy będzie zwracał (-1) dla punktu P_1 i 1 dla pozostałych, a neuron drugi (-1) dla punktu P_4 i 1 dla pozostałych (punkty P_1 i P_4 znajdą się w innym obszarze decyzyjnym niż wektor wag).

3.1.4. Sieci wielowarstwowe

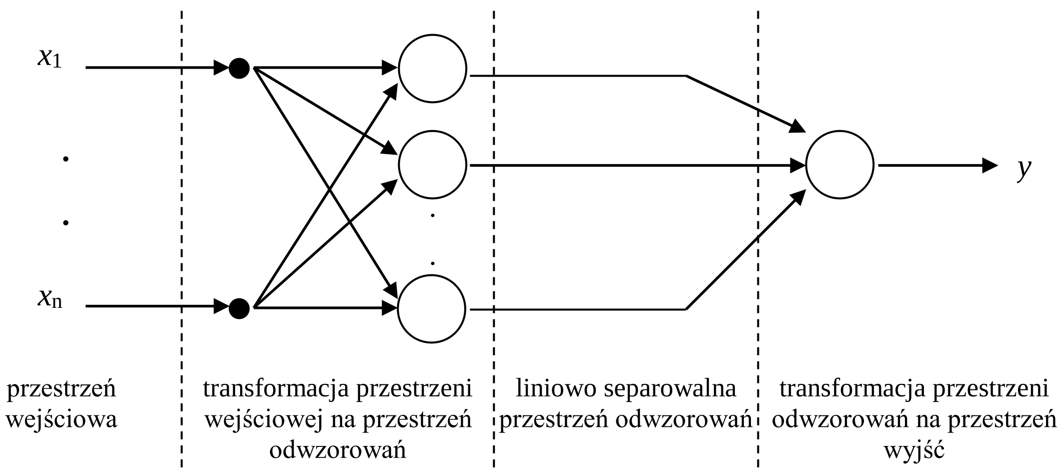
Klasyfikatory neuronowe i sieci jednowarstwowe mogą być wykorzystane jedynie w przypadku zadań liniowo separowalnych. Gdy przestrzeń wejściowa nie jest liniowo separowalna poprawną klasyfikację zapewniają jedynie sieci wielowarstwowe. Na rys. 7a i 7b zostały przedstawione dwa przykłady zadań, w których należy oddzielić obiekty reprezentowane przez kwadraty od obiektów reprezentowanych przez kółka. W obydwu przypadkach ułożenie obiektów uniemożliwia separację za pomocą pojedynczej linii prostej.



Rys. 7. Przykłady zadań, które nie są liniowo separowalne

Tego typu zadania klasyfikacji mogą być rozwiązywane przy pomocy sieci wielowarstwowych. Analiza sposobu działania sieci zostanie przedstawiona szczegółowo na przykładzie sieci dwuwarstwowej.

Podstawą działania klasyfikatorów dwuwarstwowych jest przekształcanie sygnałów dwuetapowo. W pierwszym etapie pierwsza warstwa neuronów odwzorowuje *n*-wymiarowy wektor wejściowy na wektor o wymiarze równym liczbie neuronów na tej warstwie. Proces ten nazywany jest przekształcaniem przestrzeni wejściowej na **przestrzeń odwzorowań**. Istotą takiego odwzorowania jest transformacja obiektów z przestrzeni wejściowej do obiektów, które są liniowo separowane. W drugim etapie obiekty z przestrzeni odwzorowań są klasyfikowane przez neurony z drugiej warstwy sieci. Schemat działania przykładowego klasyfikatora został przedstawiony na rys. 8.



Rys. 8. Schemat działania dwuwarstwowej sieci klasyfikującej

Przykład 5.

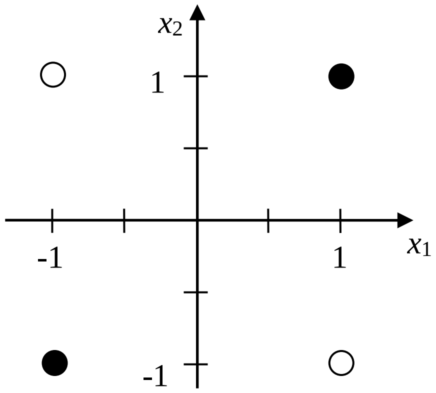
Należy zaprojektować sieć neuronową realizującą funkcję logiczną XOR (exclusive or).

XOR jest dwuargumentową funkcją logiczną, która przyjmuje wartość fałsz w przypadku gdy obydwa argumenty są prawdziwe lub fałszywe. Podobnie jak w innych przypadkach do realizacji sieci zostaną wykorzystane neurony z bipolarną funkcją aktywacji, stąd wygodne będzie przyjęcie interpretacji, w której logicznej prawdzie będzie odpowiadała wartość 1, a logicznemu fałszowi wartość -1. Tabela 2. przedstawia wartości funkcji XOR dla takiej interpretacji prawdy i fałszu.

Tabela 2.

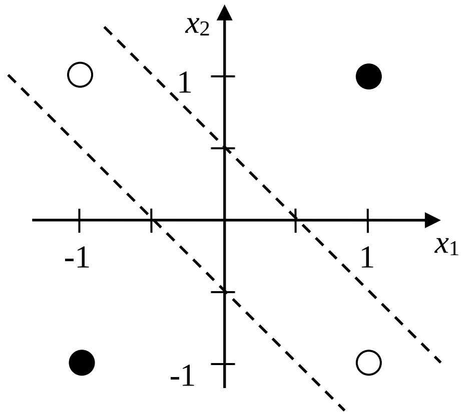
x_1	x_2	x_1 XOR x_2
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

Przestrzeń wejściową można przedstawić w postaci graficznej (rys. 9), wartości 1 zostało przypisane kółko białe (puste), wartości -1 kółko czarne. Jak widać na rysunku tak ułożonych obiektów nie można oddzielić pojedynczą linią prostą, zadanie tego typu może być więc rozwiązane dopiero przy pomocy sieci wielowarstwowej.



Rys. 9. Graficzna reprezentacja funkcji XOR

W celu rozwiązania zadania należy po pierwsze dokonać transformacji przestrzeni wejściowej na liniowo separowalną przestrzeń odwzorowań. W tym celu pierwsza warstwa neuronów powinna podzielić przestrzeń wejściową na kilka obszarów w taki sposób, aby każdy zawierał obiekty należące tylko do jednej kategorii. Przykładowy podział spełniający te wymagania został przedstawiony na rys. 10. Wykorzystanie dwóch powierzchni decyzyjnych pozwala na uzyskanie trzech obszarów, każdy z nich zawiera obiekty należące do tej samej kategorii



Rys. 10. Podział przestrzeni wejściowej na trzy obszary

Do wyznaczania jednej powierzchni decyzyjnej konieczny jest jeden neuron, stąd sieć realizująca funkcję XOR musi mieć dwa neurony na warstwie ukrytej. Powierzchnie decyzyjne nie przechodzą przez początek układu współrzędnych, należy więc wykorzystać neurony z biasem. Korzystając z własności wektora wag (prostopadłość do powierzchni decyzyjnej) można wyznaczyć wagi kolejnych neuronów: $\mathbf{w}_1^I = [-1 \quad -1]^T$, $\mathrm{b}_1^I = 0.5$ i $\mathbf{w}_2^I = [1 \quad 1]^T$, $\mathrm{b}_2^I = 0.5$. Wartości zwracane przez poszczególne neurony są opisane zależnościami:

$$y_1 = sign(-x_1 - x_2 + 0.5) \tag{6a}$$

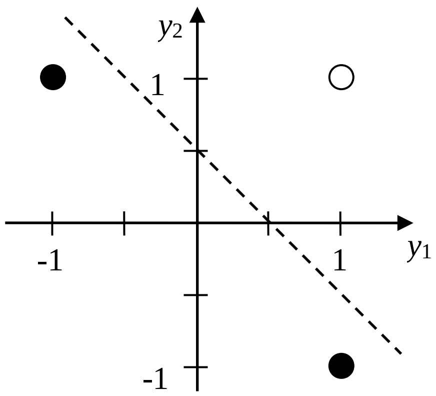
$$y_2 = sign(x_1 + x_2 + 0.5) \tag{6b}$$

Tak skonstruowana warstwa dokona transformacji przestrzeni wejściowej na przestrzeń odwzorowań w sposób przedstawiony w tabeli 3.

Tabela 3.

Przestrzeń wejść		Przestrzeń odwzorowań	
x_1	x_2	y_1	y_2
1	1	-1	1
1	-1	1	1
-1	1	1	1
-1	-1	1	-1

Jak zostało to pokazane w tabeli 3. dwa punkty z przestrzeni wejściowej (wartości dla których funkcja XOR zwraca fałsz) zostały przetransformowane na ten sam punkt przestrzeni odwzorowań. Po takim przekształceniu problem staje się liniowo separowalny i można dokonać odpowiedniej klasyfikacji przy pomocy pojedynczego neuronu. Przestrzeń odwzorowań z odpowiednią powierzchnią decyzyjną została przedstawione na rys. 11 (kółko białe odpowiada wartości 1, czarne wartości -1).



Rys. 11. Graficzna reprezentacja przestrzeni odwzorowań

Sieć powinna zwracać wartość 1 (przyjęty odpowiednik logicznej prawdy) dla wartości wejściowych (-1, 1) i (1, -1), należy dobrać wagi w taki sposób, aby wektor leżał w obszarze decyzyjnym odpowiadającym tym punktom. Warunki te spełnia np. wektor $\mathbf{w}^{II} = [1 \quad 1]^T$, powierzchnia decyzyjna nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, należy więc wykorzystać neuron z biasem $\mathrm{b}^{\mathrm{II}} = -0.5$. Stąd wartości zwracane przez neuron są opisane zależnością:

$$y = sign(y_1 + y_2 - 0.5) \tag{7}$$

Ostatecznie funkcja XOR jest realizowana przez sieć dwuwarstwową o dwóch neuronach na warstwie ukrytej i jednym neuronie na warstwie wyjściowej. Wyznaczone wartości wag wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{w}^I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^I = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}^{II} = [1 \quad 1], \qquad \mathbf{b}^{II} = -0.5$$

Sprawdzenie

Zapisując wyrażenia (6a), (6b), (7) wektorowo i łącząc je ze sobą można opisać wartości zwracane przez sieć zależnością:

$$y = sign\left(\mathbf{w}^{II} \cdot sign\left(\mathbf{w}^I \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^I\right) + \mathbf{b}^{II}\right) \tag{8}$$

Korzystając z zależności (8) można sprawdzić działanie sieci:

a) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = sign\left([1 \quad 1] \cdot sign\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) - 0.5\right) = -1$

b) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad y = sign\left([1 \quad 1] \cdot sign\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) - 0.5\right) = 1$

c) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = sign\left([1 \quad 1] \cdot sign\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) - 0.5\right) = 1$

d) $x=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \qquad y = sign\left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\cdot sign\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}\right)-0.5\right) = \ -1$

Już w latach 60-tych udało się udowodnić, że za pomocą sieci dwuwarstwowej można przeprowadzić klasyfikację dowolnych podzbiorów skończonych (o skończonej liczbie elementów). Omawiane w tym punkcie przykłady pokazują, że jedna warstwa sieci pozwala na przekształcenie podzbioru ciągłego (nieskończonego) do przestrzeni odwzorowań (czyli w podzbiory skończone). Z tych dwóch faktów wynika, że sieć trójwarstwowa potrafi dokonać dowolnej klasyfikacji podzbiorów ciągłych: pierwsza warstwa sieci przekształca podzbiory ciągłe do podzbiorów skończonych, które są klasyfikowane przez warstwy drugą i trzecią. Zastosowanie sieci o większej liczbie warstw nie zwiększa możliwości tego typu klasyfikatorów, jest jednak spotykane w praktyce, ponieważ może przyczynić się do zmniejszenia ogólnej liczby neuronów.

Zadania

Zad. 1. Dany jest neuron bez biasu o dwóch wejściach i unipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji. Zadaniem neuronu jest klasyfikacja punktów: $x_I = [-1, 1]^T$, $x_{II} = [0, 1]^T$, $x_{III} = [1, -1]^T$. Dobierz wagi w taki sposób, aby punkty I i II zostały przypisane do pierwszego obszaru decyzyjnego (sygnał wyjściowy o wartości 1), a punkt III do drugiego obszaru decyzyjnego (sygnał wyjściowy o wartości 0).

Wskazówka: zadanie można rozwiązać na dwa sposoby: przez wyznaczenie równania prostej separującej obszary decyzyjne lub korzystając z własności wektora wag.

Zad. 2. Dany jest neuron z biasem o dwóch wejściach i unipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji. Zadaniem neuronu jest klasyfikacja punktów: $x_I = [1, 1]^T$, $x_{II} = [-1, 1]^T$, $x_{III} = [-1, -1]^T$, $x_{IV} = [1, -1]^T$. Dobierz wagi w taki sposób, aby punkty I, II i IV zostały przypisane do pierwszego obszaru decyzyjnego (sygnał wyjściowy o wartości 1), a punkt III do drugiego obszaru decyzyjnego (sygnał wyjściowy o wartości 0).

Zad. 3. Korzystając z przykładu 5. wyznacz inne wartości wag, przy których sieć o przedstawionej tam strukturze realizuje funkcję logiczną XOR.

Zad. 4. Przeanalizuj rozwiązanie zadania z przykładu 5. w przypadku, gdy sieć została zbudowana z neuronów o unipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji.

Zad. 5. Dane są dwa zbiory punktów na płaszczyźnie:

$$\mathbf{A} = \{A_1(-1,3),\ A_2(0,1),\ A_3(2,0)\}$$

$$\mathbf{B} = \{B_1(-2,0),\ B_2(0,5),\ B_3(0,-4),\ B_4(5,0)\}$$

Zaprojektuj sieć, która będzie klasyfikowała te punkty przypisując elementy zbioru **A** do jednej, a elementy zbioru **B** do drugiej klasy. Wykorzystaj neurony o bipolarnej funkcji skoku jako funkcji aktywacji.