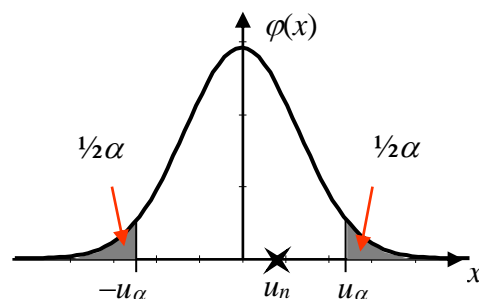


## 2. KARTY KONTROLNE – SKUTECZNOŚĆ

Idea karty kontrolnej jest podobna do idei testu statystycznego. Rozważmy kartę  $\bar{X}$ , na którą nanoszone są średnie z kolejnych próbek. Zakładając, że karta została wcześniej skonfigurowana, tzn. wyznaczone zostały średnia procesu  $\mu_0$ , jego odchylenie standardowe  $\sigma$  oraz położenia linii kontrolnych to analiza próbki na karcie sprowadza się do przeprowadzenia testu istotności dla wartości średniej w tej próbce.

Stawiana jest hipoteza zerowa, że średnia w  $k$ -tej próbce nie uległa zmianie  $H_0: \bar{x}_k = \mu_0$  wobec hipotezy alternatywnej że różnica średnich jest istotna  $H_1: \bar{x}_k \neq \mu_0$ . Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie  $\mathcal{N}(0, 1)$   $u_n = \frac{\bar{x}_k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ . Hipoteza zerowa jest odrzucana gdy średnia z próbki znajdzie się w obszarze krytycznym wyznaczonym na podstawie przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  ( $u_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha/2)$ ).



Linie kontrolne  $UCL$  i  $LCL$  wyznaczone są zwykle w odległości trzech odchyłeń standardowych od linii centralnej, tzn.  $u_\alpha = 3$ , co odpowiada poziomowi istotności  $\alpha = 0.0027$ . Zakładając występowanie wyłącznie losowych przyczyn zmienności próbek, oznacza to, że 99.73% próbek powinno znaleźć się pomiędzy liniami kontrolnymi, a tylko 0.27% poza nimi. Losowe przyczyny zmienności powodują więc, że 0.27% próbek wypada poza linie kontrolne. Oznacza to, że karta kontrolna sygnalizuje nieistniejący problem w 1 na 370 próbek ( $1/370 = 0.0027$ ).

Poziom istotności  $\alpha$  jest nazywany również prawdopodobieństwem popełnienia **błędu I rodzaju**. Błąd ten polega na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa. Przy testowaniu hipotez można również popełnić **błąd II rodzaju**. Błąd ten polega na nieodrzuconiu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa. Prawdopodobieństwo popełnienia **błędu II rodzaju** oznaczane jest jako  $\beta$ .

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	Decyzja	
	nie odrzucać $H_0$	odrzuć $H_0$
prawdziwa	decyzja poprawna	błąd I rodzaju
fałszywa	błąd II rodzaju	decyzja poprawna

W statystycznej kontroli jakości błąd I rodzaju jest nazywany **ryzykiem producenta**. Ryzyko to związane jest z kosztem poszukiwania przyczyny nieistniejącego problemu. Wprowadzona ewentualnie korekta nie zmieni dalszej analizy procesu, błąd ten nie jest więc niebezpieczny.

Poważniejszy w skutkach jest błąd II rodzaju polegający na przeoczeniu niestabilności procesu. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego błędu  $\beta$  oznacza, że karta kontrolna nie jest w stanie wykryć znaczącej zmiany procesu bezpośrednio po jej wystąpieniu. Prawdopodobieństwo  $(1 - \beta)$  określające szanse na wykrycie znaczącej zmiany bezpośrednio po jej wystąpieniu jest nazywane **mocą testu**. W statystycznej kontroli jakości błąd II rodzaju jest nazywany **ryzykiem odbiorcy**.

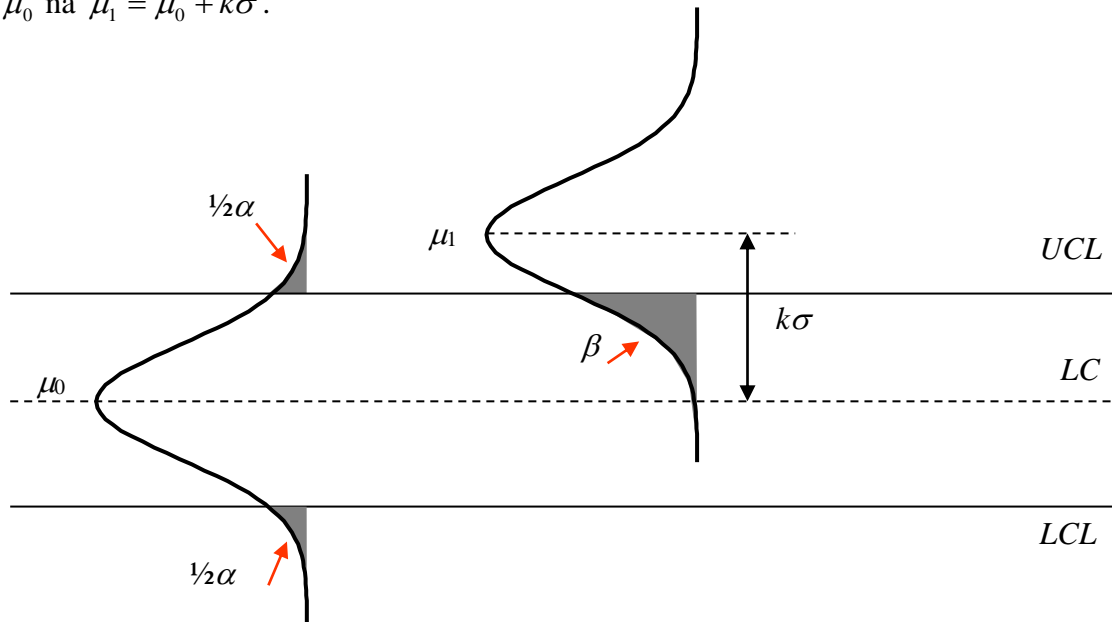
Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju można obliczyć. Poniżej zostanie przedstawiona analiza dla karty  $\bar{X}$  przy założeniu, że istotną zmianę procesu sygnalizuje przekroczenie linii kontrolnej (nie są sprawdzane specjalne układy punktów które również świadczą o nielosowych zmianach procesu).

Założmy, że dla procesu stabilnego została zaprojektowana została karta  $\bar{X}$  o parametrach:

$$LC = \mu_0, \quad UCL = \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n}, \quad LCL = \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n},$$

gdzie:  $\mu_0$ ,  $\sigma$  to średnia i odchylenie standardowe cechy obliczone dla procesu stabilnego,  $n$  to rozmiar próbki,  $L$  jest odległością granic kontrolnych od linii środkowej wyrażoną w jednostkach odchyłeń standardowych, zwykle przyjmuje się  $L = 3$ .

Przyjmijmy, że analizowany na karcie proces uległ przesunięciu, tzn. średnia procesu zmieniła swoją wartość z  $\mu_0$  na  $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$ .



Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju wynosi więc:

$$\begin{aligned} \beta &= P(LCL \leq \bar{x} \leq UCL) = P(\bar{x} \leq UCL) - P(\bar{x} \leq LCL) = \\ &= F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma/\sqrt{n})}(UCL) - F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma/\sqrt{n})}(LCL) = \Phi\left(\frac{UCL - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{LCL - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}). \end{aligned}$$

**Przykład 1.**

Porównaj wielkości błędu II rodzaju dla karty  $\bar{X}$  budowanej dla  $n = 4, 5, 6, 9$  próbek przy założeniu, że proces uległ przesunięciu o  $k = 1$ .

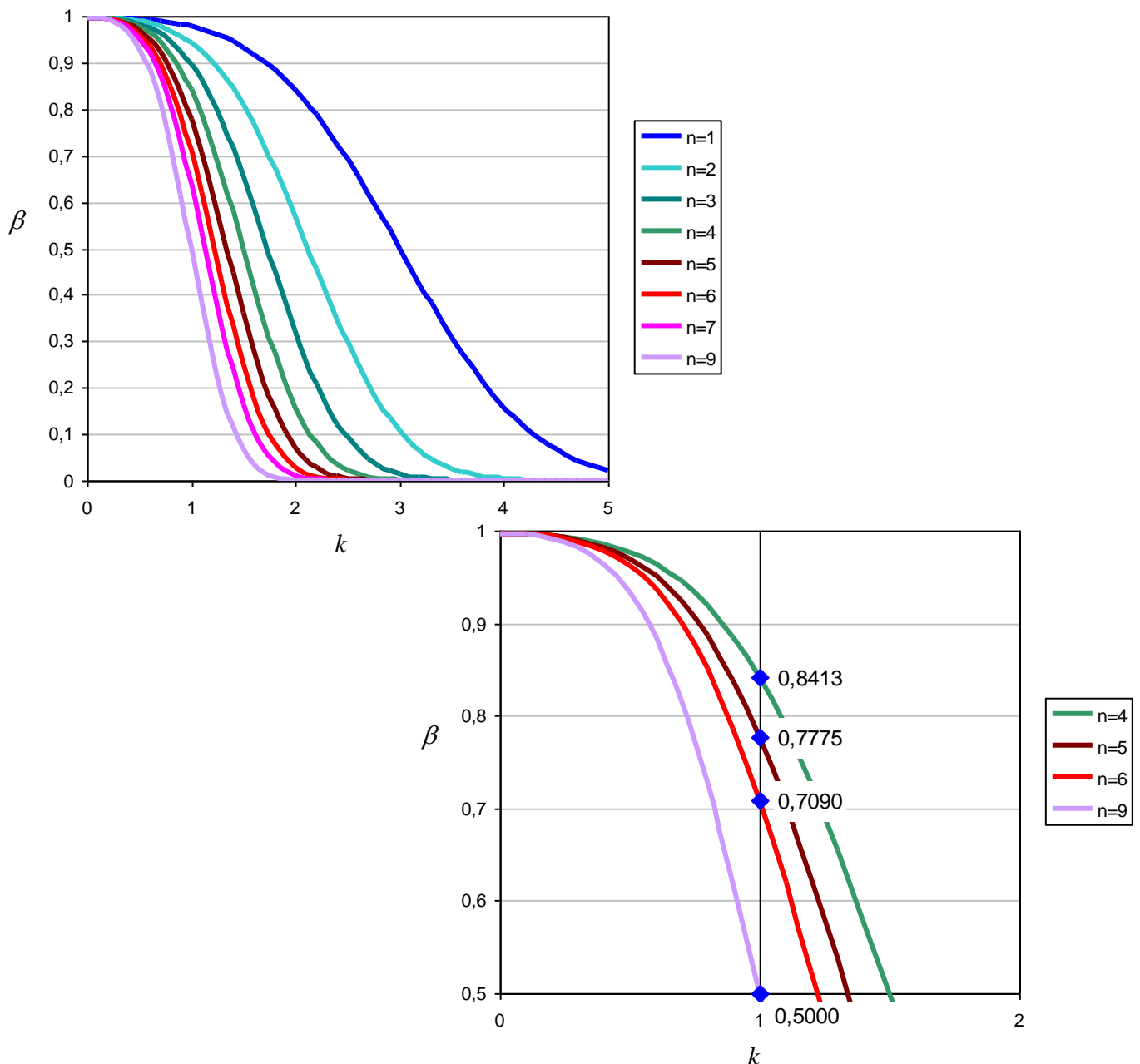
$$\beta_{(n=4)} = \Phi(3 - \sqrt{4}) - \Phi(-3 - \sqrt{4}) = \Phi(1) - \Phi(-5) \approx 0.8413,$$

$$\beta_{(n=5)} = \Phi(3 - \sqrt{5}) - \Phi(-3 - \sqrt{5}) \approx 0.7775,$$

$$\beta_{(n=6)} = \Phi(3 - \sqrt{6}) - \Phi(-3 - \sqrt{6}) \approx 0.709,$$

$$\beta_{(n=9)} = \Phi(3 - \sqrt{9}) - \Phi(-3 - \sqrt{9}) = \Phi(0) - \Phi(-6) = 0.5.$$

W przypadku karty  $\bar{X}$  zależność błędu II rodzaju od wielkości przesunięcia procesu jest przedstawiana za pomocą *krzywych operacyjno charakterystycznych OC* (ang. *operating characteristic curve*) wykreślanych dla różnych rozmiarów próbek.



Przedstawione powyżej przykład i wykresy OC pozwalają na wyciągnięcie wniosku opisującego wpływ rozmiaru próbki na wielkość błędu II rodzaju: zwiększanie rozmiaru próbki prowadzi do zmniejszania błędu II rodzaju. Wielkość próbek i częstotliwości ich pobierania wpływa na szybkość wykrywania zmian które mogą prowadzić do obniżania jakości produkcji. Im większe próbki i większa częstotliwość ich pobierania tym szybciej można wykryć nieprawidłowości. Ale z drugiej strony zwiększanie liczby kontroli pociąga za sobą dodatkowe koszty. Ustalenie rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek wymaga kompromisu pomiędzy kosztami kontroli a ryzykiem że część wyprodukowanych wyrobów nie będzie spełniać wymogów specyfikacji.

Prawdopodobieństwa wystąpienia błędów I i II rodzaju pozwalają na wyznaczenie wskaźników *ARL*, definiujących średnie długości serii (*ang. average run length*) albo inaczej średnią liczbę próbek po których wystąpi sygnał o przekroczeniu linii kontrolnej.

Wskaźnik  $ARL_0$  jest średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę.

Wskaźnik  $ARL_1$  jest średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie rozregulowany wygeneruje odstającą próbkę.

### **Wskaźnik $ARL_0$**

Wyznamy średnią liczbą próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie uregulowanego. Niech  $l$  oznacza numer pierwszej odstającej próbki.

Prawdopodobieństwo, że  $l=1$ , tzn. że pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia błędu I rodzaju, tzn.  $\alpha$ .

Prawdopodobieństwo, że  $l=2$ , tzn. że pierwsza próbka znajdzie się w granicach wyznaczonych przez linie kontrolne a druga próbka wypadnie poza granicami wynosi  $(1-\alpha)\alpha$ .

Prawdopodobieństwo, że  $l=3$ , tzn. że pierwsze dwie próbki znajdą się w granicach a trzecia próbka wypadnie poza granicami wynosi  $(1-\alpha)^2\alpha$ .

Zmienna  $l$  ma rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo że  $k$ -ta próbka da pierwszy sygnał o rozregulowaniu procesu wynosi:

$$P(l = k) = (1 - \alpha)^{k-1} \alpha .$$

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu geometrycznego:

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(l = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - \alpha)^{k-1} \alpha = \frac{1}{\alpha} .$$

Ostatecznie więc wskaźnik  $ARL_0$  wynosi:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} .$$

**Przykład 2.**

Wyznacz wartość wskaźnika  $ARL_0$  dla karty  $\bar{X}$  o liniach kontrolnych znajdujących się w odległości trzech odchyłeń standardowych od linii centralnej.

Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu wynosi w tym przypadku:

$$\alpha = 0.0027,$$

średnia liczba próbek po której pojawi się próbka odstająca wyniesie więc:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \approx 370.$$

**Wskaźnik  $ARL_1$** 

Podobne rozważania jak te przeprowadzone powyżej pozwalają na wyznaczenie wartości wskaźnika  $ARL_1$ . Niech  $l$  oznacza numer pierwszej odstającej próbki.

Prawdopodobieństwo, że pierwsza próbka nie przekroczy linii kontrolnej jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia błędu II rodzaju, tzn.  $\beta$ . Prawdopodobieństwo, że  $l = 1$ , tzn. że pierwsza próbka przekroczy linie kontrolne wynosi więc  $(1 - \beta)$ .

Prawdopodobieństwo, że  $l = 2$ , tzn. że pierwsza próbka znajdzie się w granicach wyznaczonych przez linie kontrolne a druga próbka wypadnie poza granicami wynosi  $\beta(1 - \beta)$ .

Prawdopodobieństwo, że  $l = 3$ , tzn. że pierwsze dwie próbki znajdą się w granicach a trzecia próbka wypadnie poza granicami wynosi  $\beta^2(1 - \beta)$ .

Zmienna  $l$  ma rozkład geometryczny, prawdopodobieństwo że  $k$ -ta próbka da pierwszy sygnał o rozregulowaniu procesu wynosi:

$$P(l = k) = \beta^{k-1}(1 - \beta).$$

Wartość wskaźnika  $ARL_1$  wyznacza się w oparciu o wartość oczekiwaną rozkładu geometrycznego, wynosi ona w tym przypadku:

$$E(l) = \frac{1}{1 - \beta},$$

Wskaźnik  $ARL_1$  wynosi więc:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

**Przykład 3.**

Porównaj dla karty  $\bar{X}$  z przykładu 1. średnie liczby próbek po których pojawia się próbka odstająca przy założeniu, że proces uległ przesunięciu o jedno odchylenie standardowe.

$n$	$ARL_1$
4	$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.8413} \approx 6.3012$
5	$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.7775} \approx 4.4944$
6	$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.7090} \approx 3.4364$
9	$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.5} = 2$