

3. SEKWENCYJNE KARTY KONTROLNE

Skuteczność karty kontrolnych $\bar{X} - R$ i $\bar{X} - S$ maleje wraz ze zmniejszaniem rozregulowania monitorowanego procesu. Stosowanie kart $\bar{X} - R$ i $\bar{X} - S$ zaleca się w pierwszej fazie wprowadzania kart kontrolnych gdy monitorowany proces nie jest statystycznie uregulowany i występują duże (tzn. $\geq 1.5\sigma$) przesunięcia kontrolowanych parametrów.

W przypadku karty \bar{X} o liniach kontrolnych w odległości trzech odchyłeń standardowych, gdy monitorowany proces ulegnie przesunięciu o wartość 1.5σ , średnio dla karty o liczności próbek $n = 4, 5, 6, 9$ potrzebne są dwie próbki aby karta zasygnalizowała rozregulowanie procesu – wartość ARL_1 dla $n = 4, 5, 6, 9$ wynosi odpowiednio 2.0, 1.5665, 1.3335 i 1.0716. Oznacza to, że rozregulowanie zostanie wykryte średnio po wykonaniu $I = nARL_1$ pomiarów. Dla $n = 4, 5, 6, 9$ sygnał rozregulowania pojawia się więc średnio po 8.0, 7.8325, 8.0, 9.6443 pomiarach. Zwiększanie liczności próbki karty prowadzi w tym przypadku już tylko do zwiększania średniej liczby pomiarów (dla $n = 11$ $ARL_1 = 1.0247$ więc $I = 11.2721$).

Podobną analizę można przeprowadzić dla przesunięcia procesu o wartość 1.0σ . Wartość ARL_1 dla $n = 4, 5, 6, 9$ wynosi w tym przypadku odpowiednio 6.303, 4.4953, 3.4366, 2.0, co oznacza, że rozregulowanie zostanie wykryte średnio po wykonaniu 25.2119, 22.4766, 20.6196, 18.0 pomiarów. Zwiększanie liczności próbki karty do wartości $n = 11$ doprowadzi w tym przypadku tylko niewielkiego zmniejszenia średniej liczby pomiarów ($ARL_1 = 1.602$ i $I = 17.6215$), większe liczności próbek dadzą natomiast zwiększenie liczby pomiarów.

Skuteczność kart $\bar{X} - R$ i $\bar{X} - S$ na etapie monitorowania procesu kiedy jest on już uregulowany i występują tylko małe przesunięcia (tzn. $< 1.5\sigma$) jest już mniejsza. Wada ta wynika z faktu, że karty te w małym stopniu wykorzystują informacje ukryte w sekwencji próbek posługując się głównie bieżącymi informacjami o stanie procesu (wartość ostatniej próbki). Do wykrywania małych przesunięć średniej procesu wykorzystywane są karty sekwencyjne: CuSum, MA, EWMA. Karty te są jednak mniej czułe na duże przesunięcia (tzn. $\geq 1.5\sigma$) monitorowanego procesu.

3.1. Karta CuSum

Karta CuSum (*ang. Cumulative Sum Control Chart*) jest nazywana też kartą sum skumulowanych. Karta może być wykreslana dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$), częściej jednak wykorzystywana jest do obserwacji odchyłeń pojedynczych pomiarów ($n = 1$) od wartości założonej. Idea konstrukcji karty dla pojedynczych obserwacji zostanie omówiona na przedstawionym poniżej przykładzie.

Przykład 1. Idea karty CuSum

W arkuszu dane1 zebrane zostały wartości wylosowane z rozkładu normalnego. Pierwszych 10 wyników wylosowano z rozkładu $\mathcal{N}(5,1)$, 22 kolejne wyniki pochodzą z rozkładu przesuniętego o jedno odchylenie standardowe tzn. $\mathcal{N}(6,1)$.

dane1

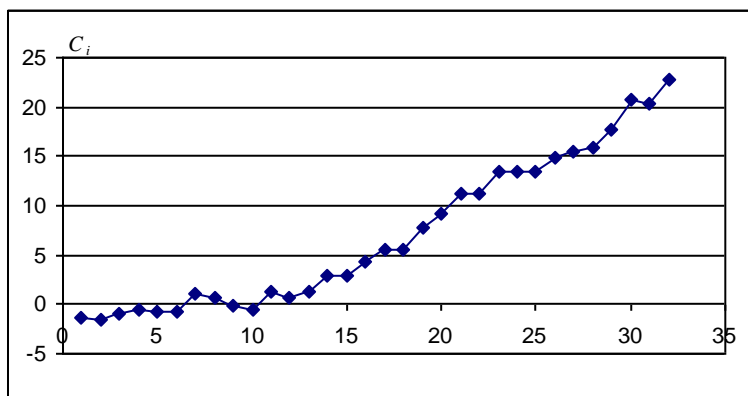
wynik	x_i	x_i-5	$C_i = C_{i-1} + (x_i-5)$
1	3.6	-1.4	-1.4
2	4.9	-0.1	-1.5
3	5.6	0.6	-0.9
4	5.4	0.4	-0.5
5	4.8	-0.2	-0.7
6	4.9	-0.1	-0.8
7	6.9	1.9	1.1
8	4.6	-0.4	0.7
9	4.1	-0.9	-0.2
10	4.6	-0.4	-0.6
11	6.9	1.9	1.3
12	4.3	-0.7	0.6
13	5.6	0.6	1.2
14	6.8	1.8	3
15	5	0	3
16	6.3	1.3	4.3

wynik	x_i	x_i-5	$C_i = C_{i-1} + (x_i-5)$
17	6.2	1.2	5.5
18	5	0	5.5
19	7.2	2.2	7.7
20	6.5	1.5	9.2
21	7	2	11.2
22	5.1	0.1	11.3
23	7.1	2.1	13.4
24	5.1	0.1	13.5
25	5	0	13.5
26	6.4	1.4	14.9
27	5.5	0.5	15.4
28	5.4	0.4	15.8
29	6.9	1.9	17.7
30	8.1	3.1	20.8
31	4.6	-0.4	20.4
32	7.3	2.3	22.7

W przypadku gdy karta sum skumulowanych wykorzystywana jest do monitorowania odchyień pojedynczych pomiarów od wartości założonej $\hat{\mu}$, każdy punkt wykresu zawiera informację o odchyleniu bieżącego wyniku oraz o wszystkich poprzedzających odchyleniach od wartości założonej:

$$C_i = (x_i - \hat{\mu}) + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - \hat{\mu}) = (x_i - \hat{\mu}) + C_{i-1}.$$

W przykładzie założono, że założona wartość jest nominalną średnią monitorowanego procesu $\hat{\mu} = 5$. W przedstawionych powyżej tabelach dla każdej obserwacji x_i wyznaczone zostało odchylenie od wartości założonej ($x_i - 5$) oraz wartość skumulowanej sumy odchyień C_i . Zmiany wartości sum C_i zostały pokazane na poniższym wykresie. Dla pierwszych 10 obserwacji pochodzących z rozkładu $\mathcal{N}(5,1)$ wartości C_i układają się wokół wartości 0, kolejne wyniki z procesu przesuniętego dają wzrost C_i .



Na przedstawiony wykresie brakuje jeszcze linii kontrolnych które sygnalizowałyby nielosowe przesunięcie średniej procesu.

Karta CuSum – Algorytm tabelaryczny

Uzupełnienie wykresu o linie kontrolne gdy obliczenia wykonywano ręcznie, realizowane było z wykorzystaniem tzw. maskownicy w kształcie litery V. Aktualnie powszechnie wykorzystywany jest algorytm tabelaryczny.

Idea algorytmu tabelarycznego sprowadza się do wyznaczania dwóch skumulowanych sum C_i^+ i C_i^- :

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max(0, x_i - (\hat{\mu} + K) + C_i^+), \\ C_i^- &= \max(0, (\hat{\mu} - K) - x_i + C_i^-), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: K to tzw. wartość odniesienia, często przyjmowana w postaci połowy odległości pomiędzy wartością założoną $\hat{\mu}$ a niedopuszczalną wartością $\tilde{\mu}$:

$$K = \frac{|\tilde{\mu} - \hat{\mu}|}{2}.$$

W przypadku gdy niedopuszczalne przesunięcie procesu wyrażane jest w odchyleniach standardowych procesu wzorcowego $\tilde{\mu} = \hat{\mu} + k\hat{\sigma}$, wartość K jest przyjmowana jako:

$$K = \frac{1}{2} k^* \hat{\sigma}.$$

Z analizy wzorów (1) wynika, że skumulowane sumy C_i^+ , C_i^- sumują odchylenia przekraczające wartość odniesienia K , w C_i^+ liczone są odległości pomiędzy wartością obserwacji a wartością $(\hat{\mu} + K)$, w C_i^- liczone są odległości pomiędzy wartością $(\hat{\mu} - K)$ a wartością obserwacji, jeśli skumulowana odległość spada poniżej 0 sumy C_i^+ , C_i^- są zerowane.

Przyjmuje się, że w przypadku gdy sumy C_i^+ , C_i^- przekraczają pewną zadaną wartość H proces jest statystycznie niestabilny. Ostatecznie, linie kontrolne i linia centralna karty wyznaczane są jako:

$$CL = 0, \quad UCL = H, \quad LCL = -H.$$

Na karcie mogą być rysowane obydwie sumy C_i^+ , C_i^- . W programie MiniTab suma C_i^- jest wyznaczana z zależności $\bar{C}_i^- = \min(0, x_i - (\hat{\mu} - K) + \bar{C}_i^-)$, co oznacza, że $\bar{C}_i^- = -C_i^-$. STATISTICA nanosi dla każdej obserwacji punkt liczony jako:

$$C_i = \begin{cases} C_i^+ & \text{gdy } C_i^+ > C_i^- \\ -C_i^- & \text{gdy } C_i^+ \leq C_i^- \end{cases}. \quad (2)$$

Karta CuSum może być wykreślana również dla próbek, tzn. dla $n > 1$. W takim przypadku wartość i -tej obserwacji x_i we wzorze (1) należy zastąpić średnią próbkę \bar{x}_i a odchylenie standardowe $\hat{\sigma}$ odchyleniem dla średnich $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$.

Parametrami karty CuSum są oprócz założonej średniej procesu $\hat{\mu}$ również wartość odniesienia K oraz wielkość przedziału decyzyjnego H . Parametry te wpływają na wartość średniej długości serii ARL .

Wartość $K = \frac{1}{2} k^* \sigma$ przyjmuje się w oparciu o wielkość przesunięcia procesu, które powinno być przez kartę wykryte, zwykle $k^* = 1$. Wielkość przedziału decyzyjnego $H = h\sigma$ może być przyjmowana tak aby wskaźnik ARL_0 uzyskiwał taką samą wartość jak w przypadku kart Shewharta tzn. $ARL_0 = 370$. W poniższej tabeli zestawione zostały wartości k i odpowiadające im wartości h dla $ARL_0 = 370$ [1].

k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3
h	8.01	4.77	3.34	2.52	1.99	1.61

Wyznaczenie wartości wskaźnika ARL nie jest proste. Ze względu na prostotę i dobre przybliżenie dokładnych wartości tego wskaźnika do określania ARL dla jednostronnej karty CuSum, monitorującej zmiany C_i^+ lub C_i^- , często wykorzystywany jest wzór opracowany przez Siegmunda:

$$ARL = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

gdzie: dla C_i^+ $\Delta = k - k^*/2$, dla C_i^- $\Delta = -k - k^*/2$, k to przesunięcie procesu dla którego ARL jest wyznaczane, k^* wyrażane jest w jednostkach odchylenia standardowego: $k = (\tilde{\mu} - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$, $b = h + 1.166$, dla $\Delta = 0$ przyjmuje się $ARL = b^2$.

Dla karty dwustronnej średnią długość serii wyznacza się wykorzystując ARL^+ obliczone dla C_i^+ i ARL^- obliczone dla C_i^- :

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}.$$

Przykład 2.

Wyznacz ARL_0 i ARL_1 dla karty CuSum zaprojektowanej w oparciu o parametry $k^* = 1$ i $h = 5$. Przyjmij, że rzeczywiste przesunięcie procesu jest równe przyjętemu w projekcie karty $k = 1$.

ARL_0 oznacza średnią długość serii po której karta wygeneruje fałszywy sygnał o rozregulowaniu. Na karcie wykreślony zostanie więc punkt poza granicami kontrolnymi pomimo braku rzeczywistego przesunięcia procesu: $k = 0$.

Podstawiając parametry karty do wzoru Siegmunda otrzymuje się dla wartości ARL_0^+ kolejno:

$$b = 6.166, \quad \Delta = 0 - 1/2 = -0.5, \quad ARL_0^+ = \frac{e^{-2(-0.5)6.166} + 2(-0.5)6.166 - 1}{2(-0.5)^2} \approx 932.22,$$

Δ dla ARL_0^- jest taka sama jak dla ARL_0^+ więc $ARL_0^- \approx 932.22$.

Ostatecznie ARL_0 otrzymuje się jako: $ARL_0 = (1/ARL_0^+ + 1/ARL_0^-)^{-1} \approx 469.11$.

Zastosowanie wzoru Siegmunda dla $k = 1$ daje wartość $ARL_1 \approx 10.34$.



Przykład 1. cd. – Karta CuSum: algorytm tabelaryczny

Wykonaj analizę procesu z przykładu 1. z wykorzystaniem karty CuSum. Przyjmij, że: $\hat{\mu} = 5$, $\hat{\sigma} = 1$, $k^* = 1$ i $h = 5$.

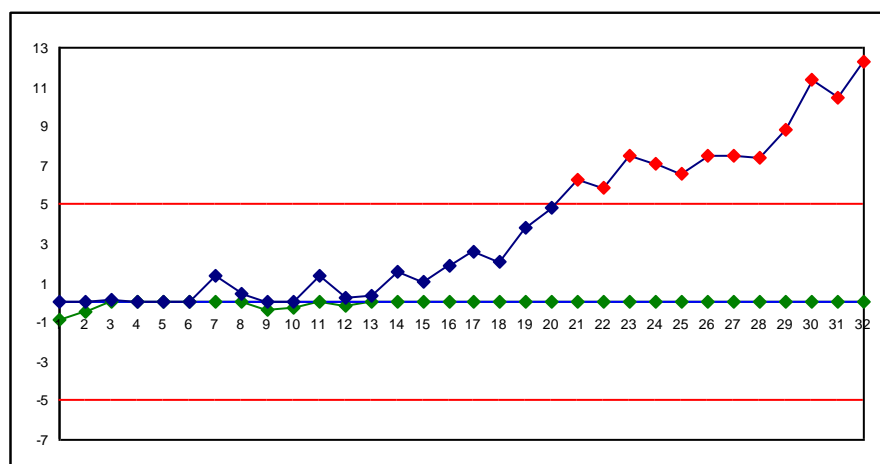
W przykładzie 1. przedstawiona została idea karty CuSum. Przygotowany tam wykres nie mógł być wykorzystywany do kontroli stabilności monitorowanego procesu w taki sam sposób jak karty Shewharta z powodu braku linii kontrolnych. Wady tej nie ma omówiony powyżej algorytm tabelaryczny. W przedstawionych poniżej tabelach zebrane zostały wyniki obliczeń dla danych z arkusza *dane1*, skumulowane sumy C_i^+ , C_i^- i C_i wyznaczone zostały z wzorów (1)–(2).

wyNIK	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
1	3.6	0	0.9	-0.9
2	4.9	0	0.5	-0.5
3	5.6	0.1	0	0.1
4	5.4	0	0	0
5	4.8	0	0	0
6	4.9	0	0	0
7	6.9	1.4	0	1.4
8	4.6	0.5	0	0.5
9	4.1	0	0.4	-0.4
10	4.6	0	0.3	-0.3
11	6.9	1.4	0	1.4
12	4.3	0.2	0.2	-0.2
13	5.6	0.3	0	0.3
14	6.8	1.6	0	1.6
15	5	1.1	0	1.1
16	6.3	1.9	0	1.9

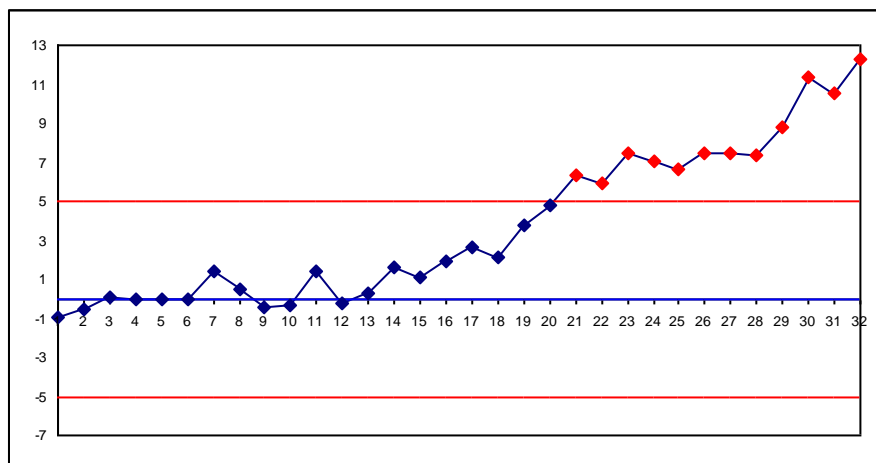
wyNIK	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
17	6.2	2.6	0	2.6
18	5	2.1	0	2.1
19	7.2	3.8	0	3.8
20	6.5	4.8	0	4.8
21	7	6.3	0	6.3
22	5.1	5.9	0	5.9
23	7.1	7.5	0	7.5
24	5.1	7.1	0	7.1
25	5	6.6	0	6.6
26	6.4	7.5	0	7.5
27	5.5	7.5	0	7.5
28	5.4	7.4	0	7.4
29	6.9	8.8	0	8.8
30	8.1	11.4	0	11.4
31	4.6	10.5	0	10.5
32	7.3	12.3	0	12.3

W oparciu o otrzymane wyniki narysowana została karta CuSum, na rysunku *a)* przedstawione zostały sumy C_i^+ , \tilde{C}_i^- , suma C_i została pokazana na rysunku *b)*.

a)



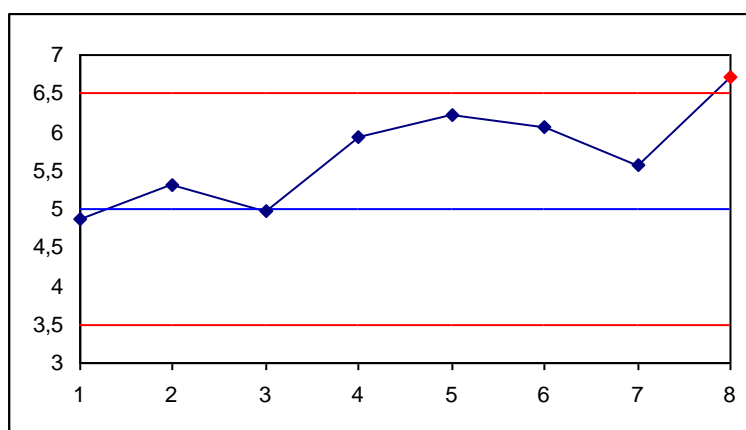
b)



Przesunięcie procesu które pojawiło się w po raz pierwszy w obserwacji 11 (tak zostały wylosowane dane) dało sygnał o rozregulowaniu w obserwacji 21 (wartość C_i^+ przekroczyła górną linię kontrolną). Do wykrycia przesunięcia o jedno odchylenie standardowe potrzebnych więc było 10 wyników. Wartość ta jest zgodna z przybliżoną w przykładzie 2. wartością średniej długości serii $ARL_1 \approx 10.34$.

Dla porównania skuteczności karty CuSum sprawdzono również efektywność karty \bar{X} dla próbki o liczności $n = 4$. Zgodnie z teorią karta ta powinna wykryć przesunięcie o wartość 1.0σ po około 7 próbkach ($ARL_1 \approx 6.303$), co oznacza, że rozregulowanie powinno zostać wykryte średnio po wykonaniu $I \approx 25.2119$ pomiarów.

Przeprowadzone obliczenia i otrzymana w rezultacie karta potwierdziły prognozowane wcześniej wyniki. Przesunięcie procesu które pojawiło się w po raz pierwszy w obserwacji 11 zostało naniesione na kartę w próbce 3, przesunięcie zostało wykryte w próbce 8 tzn. było potrzebnych 20 pomiarów do wykrycia rozregulowania procesu. Karta CuSum zareagowała w tym przypadku dwa razy szybciej od karty \bar{X} .



3.2. Karta EWMA

Do wykrywania małych przesunięć średniej procesu wykorzystywana jest również karta EWMA (*ang. Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*) nazywana też kartą wykładniczo ważonych średnich ruchomych. Karta może być wykreślana dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$), oraz dla pojedynczych obserwacji ($n = 1$). Na początek omówiona zostanie karta pojedynczych obserwacji.

Karta EWMA wykorzystuje średnią wykładniczą liczoną z wzoru

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}, \quad (3)$$

gdzie: x_i – i -ta obserwacja, z_i – wartość średniej wykładniczej obliczona dla pierwszych i obserwacji, z_0 – początkowa wartość średniej, przyjmuje się ją jako $z_0 = \hat{\mu}$, $\hat{\mu}$ to znana średnia procesu $\hat{\mu} = \mu_0$ lub średnia przybliżona na podstawie obserwacji $\hat{\mu} = \bar{x}$, λ – parametr karty $0 < \lambda < 1$.

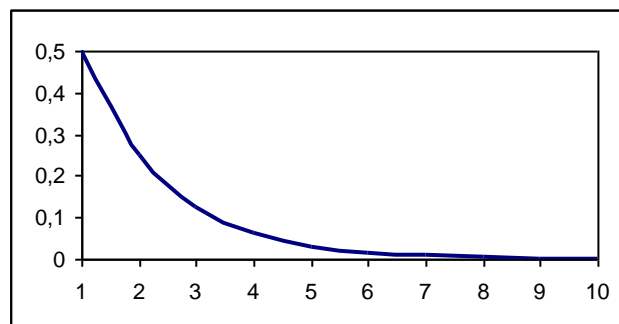
Zależność (3) można rozwinąć pozbywając się z prawej strony średniej z_{i-1} :

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)(\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}) = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2},$$

kontynuując powyższy sposób postępowania dla z_{i-2}, \dots, z_1 otrzymuje się:

$$z_i = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 x_{i-2} + \lambda(1 - \lambda)^3 x_{i-3} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1} x_1 + (1 - \lambda)^i z_0.$$

Z powyższej zależności wynika, że z_i sumuje wszystkie dotychczasowe obserwacje przypisując im odpowiednie wagi: waga bieżącej obserwacji wynosi λ , waga poprzedniej jest równa $\lambda(1 - \lambda)$, waga wcześniejszej $\lambda(1 - \lambda)^2$, waga pierwszej obserwacji wynosi $\lambda(1 - \lambda)^{i-1}$. Wagi tworzą ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy λ a iloraz wynosi $(1 - \lambda)$. Biorąc pod uwagę, że $0 < \lambda < 1$ można stwierdzić, że kolejne wyrazy ciągu maleją do zera w postępie geometrycznym. Na poniższym rysunku pokazane zostały wagi kolejnych dziesięciu obserwacji dla parametru $\lambda = 0.5$, „1” na osi poziomej to bieżąca obserwacja, „2” – poprzednia itd.



Średnia z_i jest więc średnią ważoną wszystkich dotychczasowych obserwacji z wagami malejącymi w postępie geometrycznym. Największy wpływ na wartość średniej ma wartość ostatniej obserwacji – ma największą wagę, najmniejszy wpływ ma pierwsza obserwacja, której waga jest najmniejsza.

Granice kontrolne karty są wyznaczane podobnie jak w przypadku innych kart Shewharta – w oparciu o odchylenie standardowe monitorowanej wartości, którą w tym przypadku jest średnia z_i . Zakładając, że odchylenie standardowe pomiarów x_i wynosi $\hat{\sigma}$ (jest znane lub estymowane na podstawie dostępnych obserwacji), odchylenie standardowe średniej z_i wyznacza się z zależności:

$$\sigma_{z_i} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1-(1-\lambda)^{2i})}$$

Biorąc pod uwagę, że ze wzrostem czasu obserwacji, przy wzroście i , składnik $(1-\lambda)^{2i}$ maleje do zera odchylenie standardowe σ_{z_i} można również przybliżać z wzoru:

$$\sigma_{z_i} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}.$$

Ostatecznie linie kontrolne i linia centralna karty wyznaczane są jako:

$$CL = \hat{\mu}, \quad UCL = \hat{\mu} + L\hat{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1-(1-\lambda)^{2i})}, \quad LCL = \hat{\mu} - L\hat{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1-(1-\lambda)^{2i})}, \quad (4)$$

gdzie L to odległość granic kontrolnych od linii środkowej wyrażoną w jednostkach odchyżeń standardowych, zwykle $L = 3$.

Karta EWMA może być wykreślana również dla próbek, tzn. dla $n > 1$. Podobnie jak w przypadku karty CuSum, wartość i -tej obserwacji x_i należy zastąpić średnią próbki \bar{x}_i , a odchylenie standardowe $\hat{\sigma}$ odchyleniem dla średnich $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$.

Czułość karty EWMA zależy od parametrów λ i L . W poniższej tabeli zestawiono zostały wartości ARL dla wybranych parametrów λ i L oraz określonego przesunięcia procesu [1].

przesunięcie procesu k^* $(\tilde{\mu} - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$	$L=3.054$ $\lambda=0.40$	$L=2.998$ $\lambda=0.25$	$L=2.962$ $\lambda=0.20$	$L=2.814$ $\lambda=0.10$	$L=2.615$ $\lambda=0.05$
0	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.50	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
1.00	14.3	11.1	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

W praktyce najczęściej wykorzystywane są λ równe 0.05, 0.1 i 0.2. Jak wynika z tabeli mniejsze wartości λ pozwalają na szybsze wykrycie małych przesunięć procesu. Parametr $L = 3$ może być wykorzystywany z większymi wartościami λ , dla wartości $\lambda \leq 0.1$ należy wybierać $L \in [2.6, 2.8]$.

Dodatkową zaletą karty EWMA jest to, że jest ona mniej wrażliwa na rozkład danych monitorowanej wartości. Skuteczność karty została potwierdzona również dla danych o rozkładach bardziej skośnych czy bardziej spłaszczonych w stosunku do rozkładu normalnego.

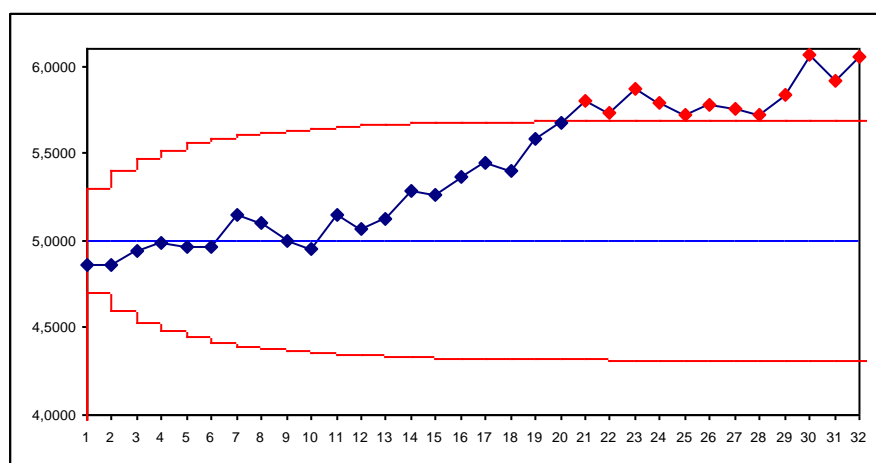
Przykład 3.

Wykonaj analizę procesu z przykładu 1. z wykorzystaniem karty EWMA dla pojedynczych obserwacji. Przyjmij, że: $\hat{\mu} = 5$, $\lambda = 0.1$ i $L = 3$.

W przedstawionych poniżej tabelach zebrane zostały wyniki obliczeń dla danych z arkusza *dane1*, punkty karty oraz granice kontrolne wyznaczone zostały z wzorów (3)–(4).

wynik	x_i	z_i	UCL	LCL
1	3.6	4.8600	5,3000	4,7000
2	4.9	4.8640	5,4036	4,5964
3	5.6	4.9376	5,4711	4,5289
4	5.4	4.9838	5,5194	4,4806
5	4.8	4.9655	5,5554	4,4446
6	4.9	4.9589	5,5830	4,4170
7	6.9	5.1530	5,6044	4,3956
8	4.6	5.0977	5,6212	4,3788
9	4.1	4.9979	5,6345	4,3655
10	4.6	4.9582	5,6451	4,3549
11	6.9	5.1523	5,6535	4,3465
12	4.3	5.0671	5,6602	4,3398
13	5.6	5.1204	5,6656	4,3344
14	6.8	5.2884	5,6700	4,3300
15	5	5.2595	5,6735	4,3265
16	6.3	5.3636	5,6763	4,3237

wynik	x_i	z_i	UCL	LCL
17	6.2	5.4472	5,6786	4,3214
18	5	5.4025	5,6805	4,3195
19	7.2	5.5822	5,6819	4,3181
20	6.5	5.6740	5,6831	4,3169
21	7	5.8066	5,6841	4,3159
22	5.1	5.7360	5,6849	4,3151
23	7.1	5.8724	5,6855	4,3145
24	5.1	5.7951	5,6861	4,3139
25	5	5.7156	5,6865	4,3135
26	6.4	5.7840	5,6868	4,3132
27	5.5	5.7556	5,6871	4,3129
28	5.4	5.7201	5,6873	4,3127
29	6.9	5.8381	5,6875	4,3125
30	8.1	6.0643	5,6876	4,3124
31	4.6	5.9178	5,6877	4,3123
32	7.3	6.0561	5,6878	4,3122



Wykreślona na podstawie otrzymanych wyników karta zareagowała na przesunięcie procesu identycznie jak karta CuSum w 21 obserwacji. Do wykrycia przesunięcia o jedno odchylenie standardowe potrzebnych więc było 10 wyników. Wartość ta odpowiada wartości $ARL_1 = 10.3$ odczytanej z przedstawionej na poprzedniej stronie tabeli (dla $k^* = 1$, $\lambda = 0.1$ i $L = 2.814$ $ARL_1 = 10.3$).

3.3. Karta MA

Karta ruchomej średniej MA (*ang. Moving Average Control Chart*) należy tak jak CuSum i EWMA do grupy kart sekwencyjnych. Wykorzystując w obliczeniach informacje ukryte w sekwencji obserwacji, karta podobnie jak pozostałe karty tej grupy jest wykorzystywana do wykrywania małych przesunięć średniej procesu. Karta może być wykreślana dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$), oraz dla pojedynczych obserwacji ($n = 1$). Na początek omówiona zostanie karta pojedynczych obserwacji.

Koncepcja karty oparta jest na idei przesuwanego się po obserwacjach okna. Podobne okno było podstawą działania karty EWMA. Z każdą kolejną obserwacją okno karty EWMA zwiększało swój wymiar, co pozwalało na uwzględnianie obserwacji x_i w obliczeniach od momentu gdy obserwacja ta stała się widoczna w oknie. Okno karty MA na początku powiększa się do ustalonej wcześniej szerokości, która jest parametrem karty, następnie jest już tylko przesuwane w kierunku nowszych obserwacji. Obserwacja x_i jest uwzględniana w obliczeniach tylko gdy znajduje się wewnątrz okna. Na poniższym rysunku pokazane zostały dwie kolejne pozycje okna kart EWMA i MA, szerokość okna karty MA została ustalona na 4.

<i>karta EWMA</i>							<i>karta MA</i>						
i	1	2	3	4	5	6	i	1	2	3	4	5	6
x_i	3.6	4.9	5.6	5.4	4.8	4.9	x_i	3.6	4.9	5.6	5.4	4.8	4.9
i	1	2	3	4	5	6	i	1	2	3	4	5	6
x_i	3.6	4.9	5.6	5.4	4.8	4.9	x_i	3.6	4.9	5.6	5.4	4.8	4.9

Karta MA wykorzystuje średnią liczoną z wzoru:

$$M_i = \frac{x_{i-w+1} + \dots + x_{i-1} + x_i}{w}, \quad (5)$$

gdzie w jest szerokością okna karty, na początku jest zmienne, po osiągnięciu ustalonej szerokości pozostaje stałe.

Zakładając, że odchylenie standardowe pomiarów x_i wynosi $\hat{\sigma}$ (jest znane lub estymowane na podstawie dostępnych obserwacji), odchylenie standardowe średniej M_i wyznacza się z zależności:

$$\sigma_{M_i} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{w}}$$

Ostatecznie linie kontrolne i linia centralna karty wyznaczane są jako:

$$CL = \hat{\mu}, \quad UCL = \hat{\mu} + 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{w}}, \quad LCL = \hat{\mu} - 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{w}}, \quad (6)$$

gdzie $\hat{\mu}$ to znana średnia procesu $\hat{\mu} = \mu_0$ lub średnia przybliżona na podstawie obserwacji $\hat{\mu} = \bar{x}$.

Karta MA może być wykreszana również dla próbek, tzn. dla $n > 1$. Podobnie jak w przypadku karty CuSum i EWMA, wartość i -tej obserwacji x_i należy zastąpić średnią próbki \bar{x}_i a odchylenie standardowe $\hat{\sigma}$ odchyleniem dla średnich $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$.

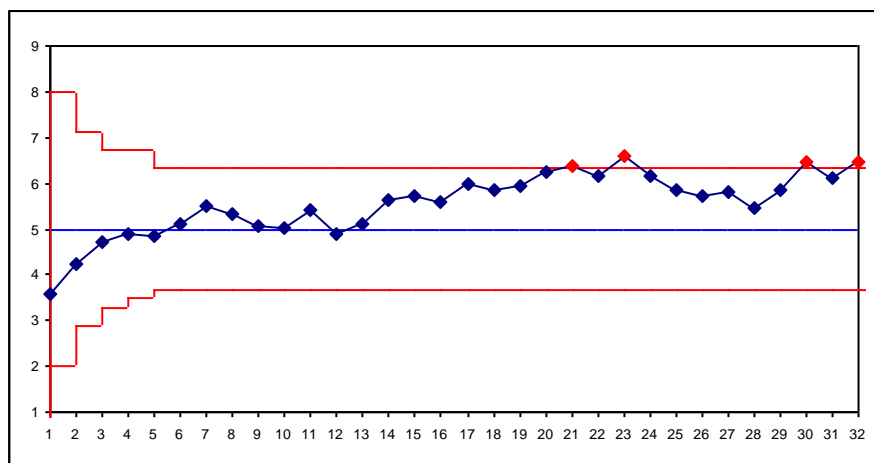
Przykład 4.

Wykonaj analizę procesu z przykładu 1. z wykorzystaniem karty MA dla pojedynczych obserwacji. Przyjmij, że: $\hat{\mu} = 5$, $\hat{\sigma} = 1$, $w = 5$.

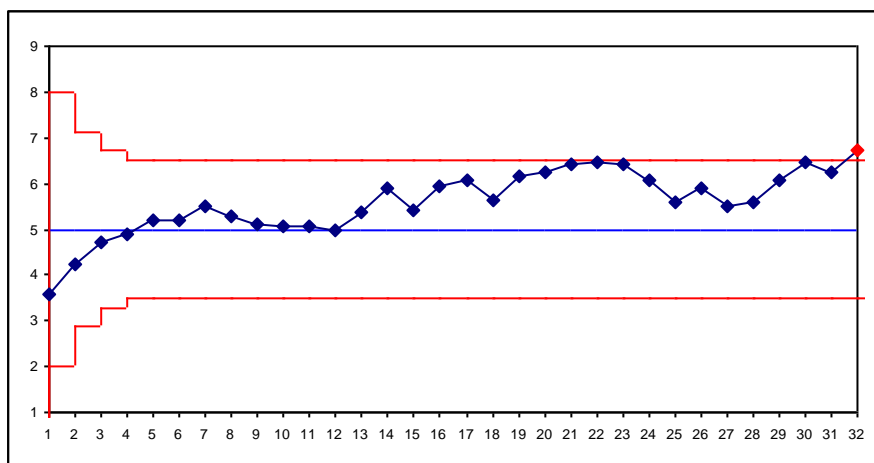
W przedstawionych poniżej tabelach zebrane zostały wyniki obliczeń dla danych z arkusza *dane1*, punkty karty oraz granice kontrolne wyznaczone zostały z wzorów (5)–(6).

wynik	x_i	M_i	UCL	LCL
1	3.6	3,60	8,0000	2,0000
2	4.9	4,25	7,1213	2,8787
3	5.6	4,70	6,7321	3,2679
4	5.4	4,88	6,7321	3,5000
5	4.8	4,86	6,3416	3,6584
6	4.9	5,12	6,3416	3,6584
7	6.9	5,52	6,3416	3,6584
8	4.6	5,32	6,3416	3,6584
9	4.1	5,06	6,3416	3,6584
10	4.6	5,02	6,3416	3,6584
11	6.9	5,42	6,3416	3,6584
12	4.3	4,90	6,3416	3,6584
13	5.6	5,10	6,3416	3,6584
14	6.8	5,64	6,3416	3,6584
15	5	5,72	6,3416	3,6584
16	6.3	5,60	6,3416	3,6584

wynik	x_i	M_i	UCL	LCL
17	6.2	5,98	6,3416	3,6584
18	5	5,86	6,3416	3,6584
19	7.2	5,94	6,3416	3,6584
20	6.5	6,24	6,3416	3,6584
21	7	6,38	6,3416	3,6584
22	5.1	6,16	6,3416	3,6584
23	7.1	6,58	6,3416	3,6584
24	5.1	6,16	6,3416	3,6584
25	5	5,86	6,3416	3,6584
26	6.4	5,74	6,3416	3,6584
27	5.5	5,82	6,3416	3,6584
28	5.4	5,48	6,3416	3,6584
29	6.9	5,84	6,3416	3,6584
30	8.1	6,46	6,3416	3,6584
31	4.6	6,10	6,3416	3,6584
32	7.3	6,46	6,3416	3,6584



Wykreślona na podstawie otrzymanych wyników karta zareagowała na przesunięcie procesu identycznie jak poprzednie karty w 21 obserwacji. Czulość karty zależy od szerokości okna. Na następnym rysunku wykreślona została karta dla okna o rozmiarze $w = 4$. Karta ta wykryła rozregulowania procesu dopiero w ostatniej obserwacji.



3.4. Karta MR

Karty CuSum, EWMA i MA umożliwiają monitorowanie zmian średniej procesu. Podobnie do klasycznych kart Shewharta mogą być łączone z kartami monitorującymi zmiany rozproszenia procesu. Karty dla próbek o większej liczności $n > 1$ łączone są z klasycznymi kartami R i S . Karty pojedynczych obserwacji łączone są z kartą ruchomego rozstępu MR (*ang. Moving Range Control Chart*). Karta ta pozwala na obserwację zmian tzw. ruchomego rozstępu definiowanego jako:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|, \quad (7)$$

Sposób wyznaczania parametrów karty zależy od tego czy parametry monitorowanego procesu są zadane czy też są estymowane. Dla estymowanych parametrów procesu granice wyznacza się jako:

$$CL = \overline{MR}, \quad UCL = D_4 \overline{MR}, \quad LCL = D_3 \overline{MR}, \quad (8a)$$

dla ustalonego odchylenia standardowego σ_0 :

$$CL = d_2 \sigma_0, \quad UCL = D_4 d_2 \sigma_0, \quad LCL = D_3 d_2 \sigma_0, \quad (8b)$$

gdzie wartości funkcji współczynników statystycznych odczytuje się z tablic dla $n = 2$, $d_2 = 1.128$, $D_3 = 0$ i $D_4 = 3.267$.

Przykład 5.

Zbadaj proces z przykładu 1. z wykorzystaniem karty MR. Przyjmij, że: $\hat{\mu} = 5$, $\hat{\sigma} = 1$.

wynik	x_i	MR
1	3.6	
2	4.9	1,3
3	5.6	0,7
4	5.4	0,2
5	4.8	0,6
6	4.9	0,1
7	6.9	2,0
8	4.6	2,3

wynik	x_i	MR _i
9	4.1	0,5
10	4.6	0,5
11	6.9	2,3
12	4.3	2,6
13	5.6	1,3
14	6.8	1,2
15	5	1,8
16	6.3	1,3

wynik	x_i	MR _i
17	6.2	0,1
18	5	1,2
19	7.2	2,2
20	6.5	0,7
21	7	0,5
22	5.1	1,9
23	7.1	2,0
24	5.1	2,0

wynik	x_i	MR _i
25	5	0,1
26	6.4	1,4
27	5.5	0,9
28	5.4	0,1
29	6.9	1,5
30	8.1	1,2
31	4.6	3,5
32	7.3	2,7

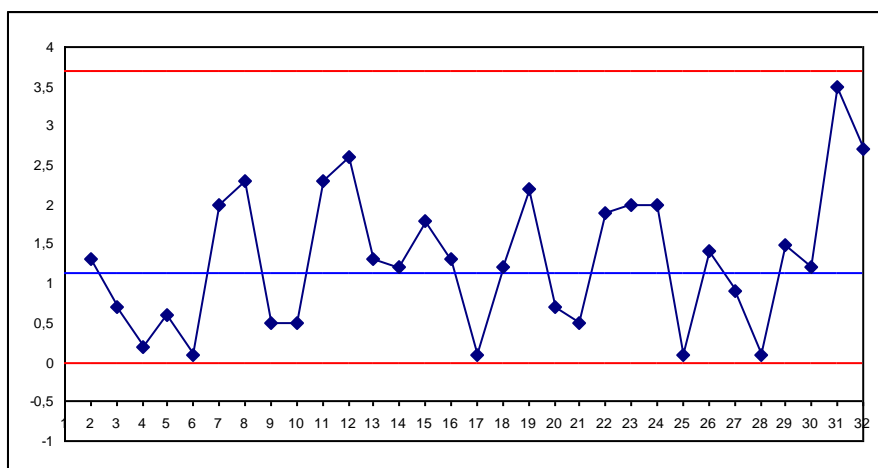
W przedstawionych powyżej tabelach zebrane zostały wartości ruchomych rozstępów wyznaczone dla danych z arkusza *dane1*. Po obliczeniu z wzoru (8b) położenia linii centralnej i linii kontrolnych:

$$CL = 1.1218,$$

$$UCL = 3.6852,$$

$$LCL = 0,$$

narysowana została karta MR. W rozważanym w tym przykładzie przypadku przesunięcie średniej procesu nie dało sygnału o rozregulowaniu na karcie MR.



LITERATURA

1. Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009
2. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, OWPW, Warszawa 2009