

4. KARTY KONTROLNE DLA CECH DYSKRETYNYCH

Dla danych otrzymywanych w wyniku zliczania liczby lub częstości występowania jakiegoś zdarzenia (np. wadliwego produktu) stosowane są tzw. *karty alternatywne*:

- ✧ *karty do kontroli wad w przypadku gdy ocena przyjmuje dwie wartości (jest wada, nie ma wady)*
 - ♦ karta np – karta przedstawia zmiany liczby braków w kolejnych próbkach,
 - ♦ karta p – karta przedstawia zmiany proporcji ilości braków do ilości sprawdzonych produktów dla serii próbek,
- ✧ *karty do kontroli wad dla produktów złożonych (wadliwych może być np. kilka podzespołów produktu)*
 - ♦ karta c – karta przedstawia zmiany liczby wad w kolejnych próbkach,
 - ♦ karta u – karta przedstawia zmiany proporcji ilości wad do ilości sprawdzonych produktów dla serii próbek.

(zalecane są próbki o liczebności co najmniej 50).

4.1. Karta p

Na karcie p każdy punkt wykresu przedstawia proporcję ilości produktów wadliwych do rozmiaru próbki. Zakładając, że:

- proces wytwarzania jest stabilny (prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego produktu wynosi p),
- wykonanie danego produktu w próbce nie jest zależne od pozostałych,

można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę produktów wadliwych jest *rozkładem dwumianowym*.

Dla dużych próbek rozkład ten jest zbieżny do rozkładu normalnego $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Rozkład zmiennej losowej reprezentującej proporcję produktów wadliwych jest zbieżny do $\mathcal{N}(p, \sqrt{p(1-p)/n})$.

Gdyby prawdopodobieństwo (p) wyprodukowania wadliwego produktu było znane, to zgodnie z ogólnym modelem karty kontrolnej Shewhart'a, linie kontrolne i linia centralna mogłyby być wyznaczone na podstawie parametrów otrzymanego rozkładu proporcji produktów wadliwych, tzn:

$$\hat{\mu} = p, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{p(1-p)/n}.$$

W przypadku gdy prawdopodobieństwo (p) wyprodukowania wadliwego produktu nie jest znane musi być ono estymowane w oparciu o dostępne dane. Niech m_i oznacza ilość wadliwych produktów w i -tej próbce a n_i jej liczebność. Proporcja produktów wadliwych w tej próbce wynosi więc:

$$p_i = \frac{m_i}{n_i}.$$

Biorąc pod uwagę cały dostępny zbiór danych, prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego produktu można oszacować jako stosunek łącznej liczby wad (we wszystkich próbkach) do łącznej liczby sprawdzonych elementów:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{\sum_{i=1}^k n_i},$$

gdzie: k – ilość próbek.

Zakładając, że liczebność próbek nie zmienia się i wynosi n , prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego produktu można oszacować jako:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{k n} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}.$$

Ostatecznie, linie kontrolne i linia centralna karty wyznaczane są z zależności:

- dla znanej wadliwości procesu:

$$CL = p, \quad UCL = p + 3\sqrt{p(1-p)/n}, \quad LCL = p - 3\sqrt{p(1-p)/n},$$

- dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o tych samych rozmiarach):

$$CL = \bar{p}, \quad UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}, \quad LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}.$$

- dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o różnych rozmiarach):

$$CL = \bar{p}, \quad UCL_i = \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i}, \quad LCL_i = \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n_i},$$

Uwaga! Granice kontrolne wyznacza się w tym przypadku oddzielnie dla każdej próbki.

Uwaga! Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$ przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Przykład 1.

W tabeli zgromadzono dane dotyczące liczby części odrzuconych w trakcie 8 kontroli. Przeprowadź analizę procesu zakładając, że rozmiary kontrolowanych próbek były równe 60.

| kontrola | liczba wadliwych | frakcja wadliwych |
|--------------|------------------|-------------------|
| 1 | 5 | 0,0833 |
| 2 | 2 | 0,0333 |
| 3 | 12 | 0,2000 |
| 4 | 4 | 0,0667 |
| 5 | 8 | 0,1333 |
| 6 | 10 | 0,1667 |
| 7 | 15 | 0,2500 |
| 8 | 6 | 0,1000 |
| razem | 62 | |

Parametry karty wynoszą w tym przypadku:

$$k = 8, \quad n = 60, \quad \sum_{i=1}^k m_i = 62, \quad \bar{p} = \frac{62}{8 \cdot 60} \approx 0.129,$$

$$UCL = 0.129 + 3\sqrt{0.129 \cdot 0.871/60} \approx 0.259,$$

$$LCL = 0.129 - 3\sqrt{0.129 \cdot 0.871/60} \approx -0.001 \rightarrow LCL = 0.$$

Po przygotowaniu danych dla karty (podobnie jak zostało to omówione w przypadku kart liczbowych) wykreślony został wykres Punktowy (Rys 1a).

Przykład 2.

Przeprowadź analizę procesu z przykładu 1. przyjmując, że rozmiary kontrolowanych próbek były różne, ich rozmiary zostały podane w poniższym arkuszu.

| kontrola | liczba wadliwych | rozmiar próbki | frakcja wadliwych | UCL | LCL |
|--------------|------------------|----------------|-------------------|-------|--------|
| 1 | 5 | 50 | 0,1 | 0,268 | -0,015 |
| 2 | 2 | 60 | 0,0333 | 0,255 | -0,002 |
| 3 | 12 | 80 | 0,15 | 0,238 | 0,015 |
| 4 | 4 | 50 | 0,08 | 0,268 | -0,015 |
| 5 | 8 | 50 | 0,16 | 0,268 | -0,015 |
| 6 | 10 | 70 | 0,1429 | 0,246 | 0,007 |
| 7 | 15 | 80 | 0,1875 | 0,238 | 0,015 |
| 8 | 6 | 50 | 0,12 | 0,268 | -0,015 |
| razem | 62 | 490 | | | |

Parametry karty wynoszą w tym przypadku:

$$k = 8, \quad \sum_{i=1}^k n_i = 490, \quad \sum_{i=1}^k m_i = 62, \quad \bar{p} = \frac{62}{490} \approx 0.127.$$

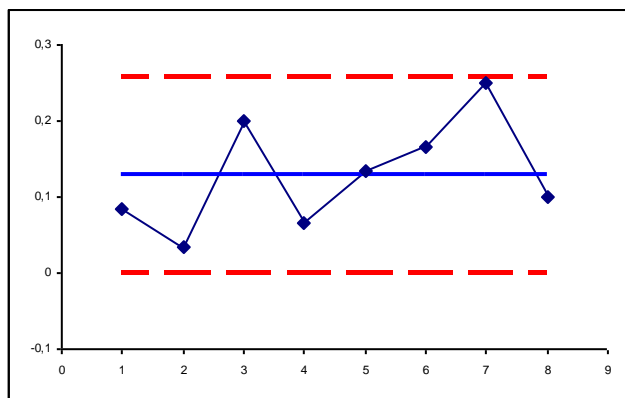
Linie kontrolne ze względu na różny rozmiar próbek muszą być wyznaczone dla każdej próbki oddzielnie. Dla pierwszej próbki otrzymano następujące wyniki:

$$UCL_1 = 0.127 + 3\sqrt{0.127 \cdot 0.873/50} \approx 0.268,$$

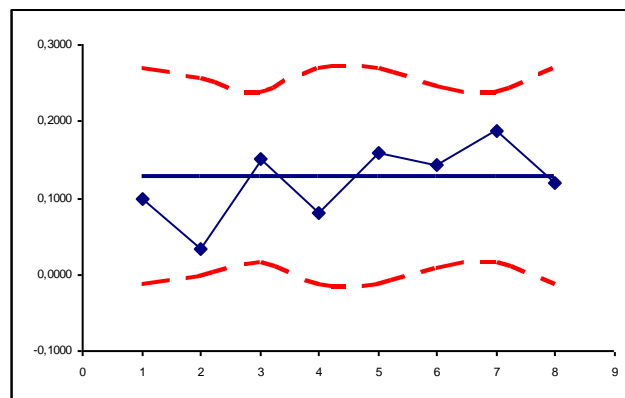
$$LCL_1 = 0.127 - 3\sqrt{0.127 \cdot 0.873/50} \approx -0.015.$$

Wyniki obliczeń dla pozostałych próbek zostały zebrane powyższej tabeli, karta p procesu została wykreślona na Rys. 1.b.

a)



b)



Rys.1. Karty p procesu z przykładu a) 1., b) 2.

W obydwu rozważanych przypadkach karty wskazują na brak nielosowych oddziaływań na proces.

4.2. Karta np

Na karcie np każdy punkt wykresu przedstawia ilość produktów wadliwych w każdej próbie, przy założeniu, że rozmiary próbek są takie same. Przyjmując takie same założenia jak w przypadku karty p, można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę produktów wadliwych jest *rozkładem dwumianowym*, który dla dużych próbek jest zbliżony do rozkładu normalnego $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Średnia i odchylenie standardowe wykreślanej na karcie cechy wynoszą więc:

$$\hat{\mu} = np, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{np(1-p)},$$

Stąd, linie kontrolne i linia centralna karty wyznaczane są z zależności:

- dla znanej wadliwości procesu:

$$CL = np, \quad UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)}, \quad LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)},$$

- dla nieznannej wadliwości procesu:

$$CL = n\bar{p}, \quad UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}, \quad LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}.$$

Uwaga! Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$ przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Przykład 3. Przeprowadź analizę procesu z przykładu 1.

| kontrola | liczba wadliwych |
|----------|------------------|
| 1 | 5 |
| 2 | 2 |
| 3 | 12 |
| 4 | 4 |
| 5 | 8 |
| 6 | 10 |
| 7 | 15 |
| 8 | 6 |
| razem | 62 |

Parametry karty wynoszą w tym przypadku:

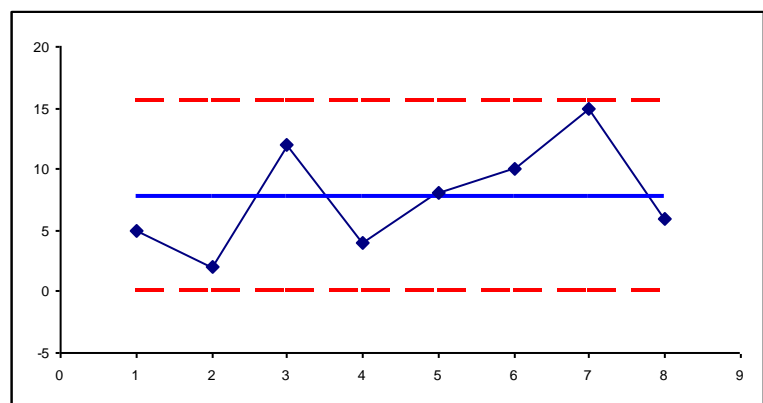
$$k = 8, \quad n = 60, \quad \sum_{i=1}^k m_i = 62, \quad \bar{p} = \frac{62}{8 \cdot 60} \approx 0.129,$$

$$CL = 60 \cdot 0.129 \approx 7.75,$$

$$UCL = 7.75 + 3\sqrt{60 \cdot 0.129 \cdot 0.871} \approx 15.54,$$

$$LCL = 7.75 - 3\sqrt{60 \cdot 0.129 \cdot 0.871} \approx -0.04, \rightarrow LCL = 0.$$

Wnioski z analizy karty są takie same jak w przykładzie 1.: proces jest statystycznie stabilny.



Rys.2. Karta np procesu z przykładu 3.

4.3. Karta c

Na karcie *c*, podobnie jak na karcie *np*, przedstawiana jest ilość (a nie proporcja) wad w próbkach. Na próbkę składa się ustalona liczba tzw. „jednostek kontrolnych”. W każdej jednostce może wystąpić dowolna liczba niezgodności (w przypadku karty *np* jednostką kontrolną był badany element, który w całości był oceniany jako prawidłowy albo nieprawidłowy). Jednostką kontrolną może być określona jednostka miary badanego wyrobu: 100m drutu, 1 m² materiału, strona dokumentu dla której zliczane będą błędy, płytka drukowana dla której liczona będzie ilość zimnych lutów lub ilość uszkodzonych podzespołów.

Zakładając, że:

- rozmiar jednostki kontrolnej jest stały,
- liczba miejsc w których może wystąpić niezgodność jest nieskończenie duża,
- prawdopodobieństwo wystąpienia niezgodności w określonym punkcie jest małe i stałe,

można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę niezgodności jest *rozkładem Poissona*.

Prawdopodobieństwo wystąpienia *k* niezgodności w danej jednostce kontrolnej wynosi w tym przypadku:

$$P(X = k) = \frac{c^k e^{-c}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie: *k* – liczba niezgodności; *c* – oczekiwana liczba niezgodności, parametr rozkładu Poissona, (*c* > 0).

Średnia i wariancja dla tego rozkładu są równe parametrowi *c*, więc:

$$\hat{\mu} = c, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{c}.$$

Jeżeli parametr *c* jest nieznan, może być szacowany jako stosunek łącznej liczby znalezionych niezgodności (we wszystkich próbkach) do liczby próbek:

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{k},$$

gdzie: *m_i* – ilość niezgodności w *i*-tej próbce; *k* – ilość próbek.

Linie kontrolne i linia centralna karty *c* wyznaczane są więc z zależności:

- dla znanego *c*:

$$CL = c, \quad UCL = c + 3\sqrt{c}, \quad LCL = c - 3\sqrt{c}.$$

- dla nieznanego *c*:

$$CL = \bar{c}, \quad UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}, \quad LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}.$$

Uwaga! Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$ przyjmuje się, że $LCL = 0$.



Przykład 4. (na podstawie [2])

W tabeli zgromadzono liczbę niezgodności znalezionych w 26 kolejno pobranych próbkach 100 sztuk płytek drukowanych. Przeprowadź analizę tego procesu.

| próbka | liczba wadliwych | próbka | liczba wadliwych | próbka | liczba wadliwych |
|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|
| 1 | 21 | 10 | 25 | 19 | 18 |
| 2 | 24 | 11 | 20 | 20 | 39 |
| 3 | 16 | 12 | 24 | 21 | 30 |
| 4 | 12 | 13 | 16 | 22 | 24 |
| 5 | 15 | 14 | 19 | 23 | 16 |
| 6 | 5 | 15 | 10 | 24 | 19 |
| 7 | 28 | 16 | 17 | 25 | 17 |
| 8 | 20 | 17 | 13 | 26 | 15 |
| 9 | 31 | 18 | 22 | | |

$$k = 26,$$

$$\sum_{i=1}^k m_i = 516,$$

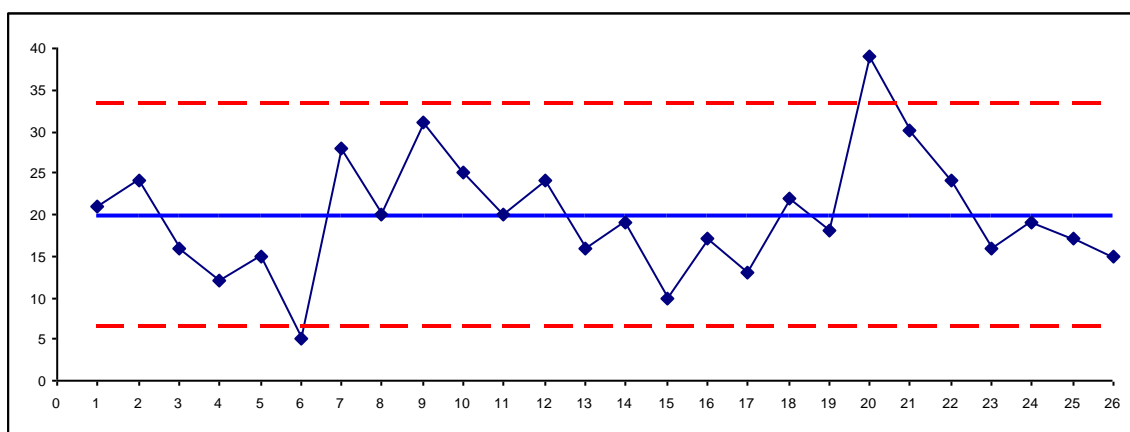
$$\bar{c} = \frac{516}{26} \approx 19.85,$$

$$UCL = 19.85 + 3\sqrt{19.85}$$

$$UCL \approx 33.21$$

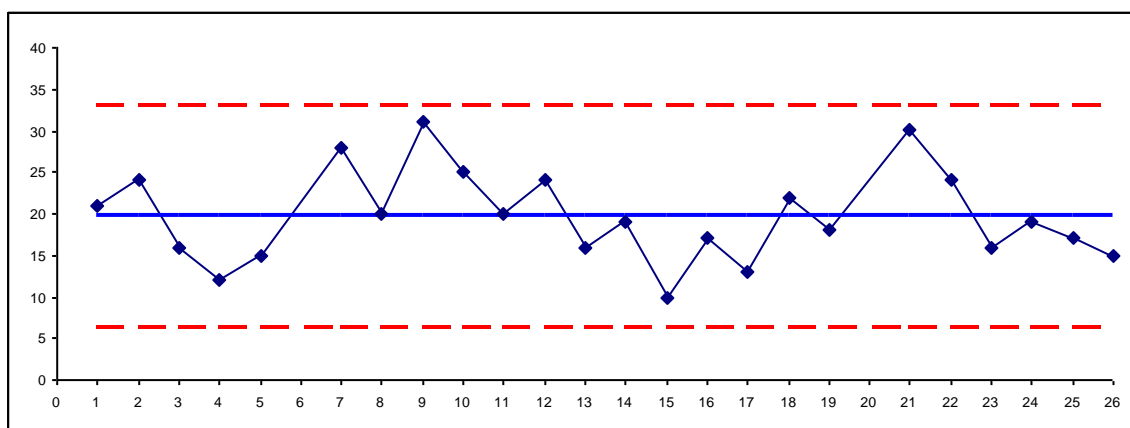
$$LCL = 19.85 - 3\sqrt{19.85}$$

$$LCL \approx 6.84$$



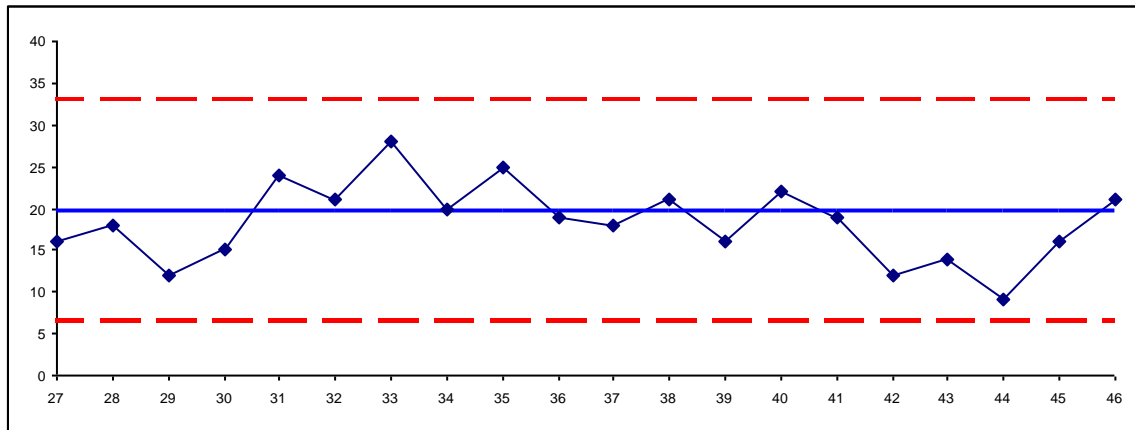
Rys.3. Karta c procesu z przykładu 4.

Po wykreśleniu karty okazało się, że poza granicami kontrolnymi znajduje się punkt przedstawiający dane z 6-tej i 20-tej próbki. Po sprawdzeniu przyczyn statystycznie zbyt małej liczby niezgodności w próbce 6 – okazało się że winny jest nowy kontroler, który nie wykrył wszystkich niezgodności. Zbyt duża liczba niezgodności w próbce 20 wynikała z zepsutej maszyny do lutowania na fali. Ze względu na to, że maszyna została naprawiona a kontroler przebył dodatkowe szkolenie obydwie odstające próbki zostały usunięte i na nowo wyznaczono granice kontrolne: $CL = 19.67$, $UCL = 32.97$, $LCL = 6.36$.



Rys.4. Karta c procesu z przykładu 4. po usunięciu odstających próbek

Po usunięciu odstających danych karta wskazuje, że zmienność procesu może być wyjaśniona przyczynami losowymi, więc można uznać, że została ona prawidłowo skonfigurowana. Zebrano kolejnych 20 próbek (po 100 sztuk płytek) i zbadano stabilność procesu dla parametrów ustalonych na etapie konfiguracji. Wszystkie punkty karty mieszczą się w wyznaczonych granicach kontrolnych – proces jest więc statystycznie stabilny (Rys. 5). Liczba niezgodności w przeliczeniu na płytkę jest jednak stosunkowo duża, należy podjąć działania polegające na zmniejszeniu tej liczby.



Rys.5. Karta c procesu z przykładu 4. dla kolejnych 20 próbek

4.4. Karta u

Na karcie u każdy punkt wykresu przedstawia proporcję ilości wad do rozmiaru próbki. Próbki mogą się różnić liczbą jednostek kontrolnych. W każdej jednostce może wystąpić dowolna liczba niezgodności. Przyjmując takie same założenia jak w przypadku karty c , można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej proporcję wad:

$$u_i = \frac{c_i}{n_i},$$

gdzie: c_i jest liczbą niezgodności w i -tej próbce a składającej się z n_i jednostek kontrolnych, jest rozkładem Poissona. Średnią liczbę niezgodności na jednostkę kontrolną wyznacza się z zależności:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{\sum_{i=1}^k n_i},$$

a przy założeniu, że próbki składają się ze stałej – równej n – liczby jednostek, średnia liczba niezgodności może być wyznaczona jako:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{kn} = \frac{\sum_{i=1}^k u_i}{k}.$$

Linie kontrolne i linia centralna karty u wyznaczane są z zależności:

- dla znanej wadliwości procesu u

$$CL = u,$$

$$UCL = u + 3\sqrt{u/n},$$

$$LCL = u - 3\sqrt{u/n},$$

- dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o tej samej liczbie jednostek):

$$CL = \bar{u}, \quad UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n}, \quad LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n}.$$

- dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o różnych rozmiarach):

$$CL = \bar{u}, \quad UCL_i = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n_i}, \quad LCL_i = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n_i}.$$

Uwaga! Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$ przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Przykład 5. (na podstawie [2])

W tabeli zgromadzono liczbę wad znalezionych w 10 belach materiału. Ze względu na to, że bele nie są równe przyjęto wspólną jednostkę kontrolną równą 50m² materiału. Oceń statystyczną stabilność procesu.

| Lp. | m ² | ilość wad | ilość jednostek | proporcja | UCL | LCL |
|-----|----------------|-----------|-----------------|-----------|------|------|
| 1 | 500 | 14 | 10 | 1,4 | 2,56 | 0,29 |
| 2 | 400 | 12 | 8 | 1,5 | 2,69 | 0,16 |
| 3 | 650 | 20 | 13 | 1,54 | 2,42 | 0,43 |
| 4 | 500 | 11 | 10 | 1,1 | 2,56 | 0,29 |
| 5 | 475 | 7 | 9,5 | 0,74 | 2,58 | 0,26 |
| 6 | 500 | 10 | 10 | 1 | 2,56 | 0,29 |
| 7 | 600 | 21 | 12 | 1,75 | 2,46 | 0,39 |
| 8 | 525 | 16 | 10,5 | 1,52 | 2,53 | 0,32 |
| 9 | 600 | 19 | 12 | 1,58 | 2,46 | 0,39 |
| 10 | 625 | 23 | 12,5 | 1,84 | 2,44 | 0,41 |

Na początek, dla każdej beli materiału należy wyznaczyć liczbę jednostek kontrolnych. Pierwsza bela składa się z $n_1 = 500/50 = 10$ jednostek, wyniki obliczeń dla pozostałych bel materiału zostały zebrane w umieszczonej obok tabeli.

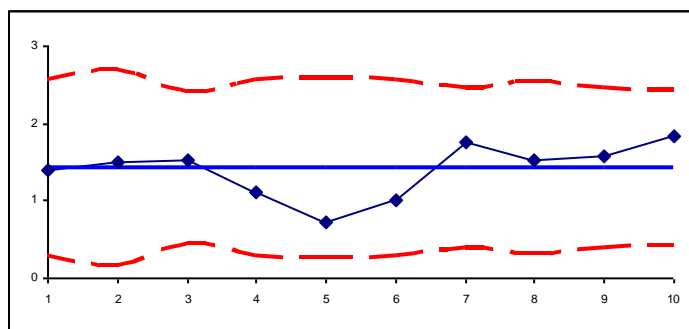
Po wyznaczeniu niezgodności można przejść do obliczenia proporcji wad, dla pierwszej beli wynosi ona np.: $u_1 = 14/10 = 1.4$.

Linia centralna karty przedstawia średnią liczbę niezgodności. Do jej wyznaczenia należy obliczyć sumaryczną liczbę niezgodności $\sum_{i=1}^k c_i = 153$ oraz sumaryczną liczbę jednostek $\sum_{i=1}^k n_i = 107.5$. Średnia liczby niezgodności \bar{u} wynosi więc w tym przypadku $\bar{u} = 153/107.5 \approx 1.42$.

Linie kontrolne dla każdej beli muszą być obliczane indywidualnie ze względu na ich różny rozmiar (różną liczbę jednostek kontrolnych). Dla pierwszej beli granice wynoszą:

$$UCL_1 = 1.42 + 3\sqrt{1.42/10} \approx 2.56, \quad LCL_1 = 1.42 - 3\sqrt{1.42/10} \approx 0.29.$$

Po wyznaczeniu pozostałych granic i wykreśleniu karty okazuje się, że wszystkie punkty wykresu mieszczą się w wyznaczonych granicach kontrolnych – proces jest więc statystycznie stabilny (Rys. 5).



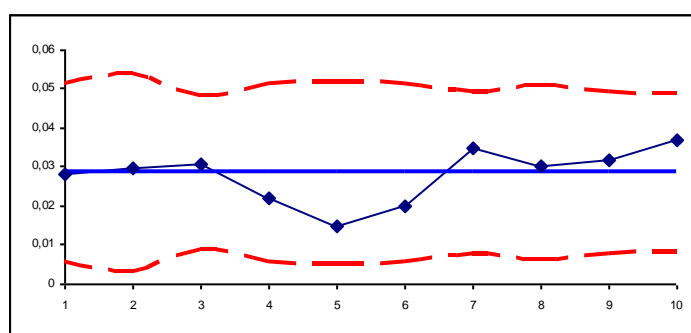
Rys.6. Karta u procesu z przykładu 5. (jednostka kontrolna $50m^2$)

Analogiczne wnioski można wyciągnąć rozwiązując zadanie dla jednostki kontrolnej o wielkości $1m^2$. Poniżej zostały pokazane wyniki obliczeń parametrów karty dla pierwszej beli materiału, w tabeli zostały zebrane wyniki pozostałych bel a wygląd karty został przedstawiony na Rys. 7. Analizując otrzymane wyniki można zauważyć, że przyjęcie 50 razy mniejszej jednostki kontrolnej spowodowało 50-krotne zmniejszenie wszystkich obliczonych wartości.

Pierwsza bela składa się z $n_1 = 500$ jednostek, liczba niezgodności w przeliczeniu na jednostkę wynosi w tym przypadku: $u_1 = 14/500 = 0.028$. Linia centralna karty jest liczona jako średnia liczba niezgodności i jest równa $\bar{u} = 153/5375 \approx 0.285$ ($\sum_{i=1}^k c_i = 153, \sum_{i=1}^k n_i = 5375$). Linie kontrolne pierwszej beli wynoszą:

$$UCL_1 = 0.0285 + 3\sqrt{0.0285/500} \approx 0.051, \quad LCL_1 = 0.0285 - 3\sqrt{0.0285/500} \approx 0.006.$$

| Lp. | m^2 | ilość wad | proporcja | UCL | LCL |
|----------|-------------|------------|-----------|-------|-------|
| 1 | 500 | 14 | 0.028 | 0.051 | 0.006 |
| 2 | 400 | 12 | 0.030 | 0.054 | 0.003 |
| 3 | 650 | 20 | 0.031 | 0.048 | 0.009 |
| 4 | 500 | 11 | 0.022 | 0.051 | 0.006 |
| 5 | 475 | 7 | 0.015 | 0.052 | 0.005 |
| 6 | 500 | 10 | 0.020 | 0.051 | 0.006 |
| 7 | 600 | 21 | 0.035 | 0.049 | 0.008 |
| 8 | 525 | 16 | 0.030 | 0.051 | 0.006 |
| 9 | 600 | 19 | 0.032 | 0.049 | 0.008 |
| 10 | 625 | 23 | 0.037 | 0.049 | 0.008 |
| Σ | 5375 | 153 | | | |



Rys.7. Karta u procesu z przykładu 5. (jednostka kontrolna $1m^2$)

LITERATURA

1. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, OWPW, Warszawa 2009,
2. Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009,
3. Wild C. J., Seber G. A. F. – *Chance Encounters: A First Course in Data Analysis and Inferencje* – John Wiley & Sons, New York 1999.