

5. ZDOLNOŚĆ PROCESU PRODUKCYJNEGO

Karty kontrolne pozwalają ocenić czy monitorowany proces jest:

- stabilny (przebiega pomiędzy granicami kontrolnymi),
- wycentrowany (wartość średnia \bar{x} odpowiada, z akceptowalną dokładnością, nominalnej).

Proces, który jest jednocześnie stabilny i wycentrowany nazywany jest procesem uregulowanym.

Na przykładowym procesie omówione zostanie omówione kolejne pojęcie – zdolność procesu.

Przykład 1. (na podstawie [2])

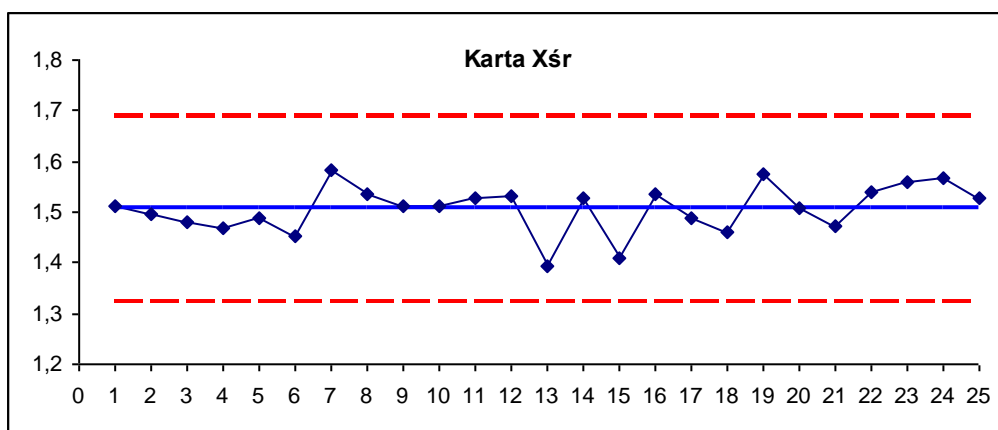
W procesie fotolitografii co godzinę pobierano po 5 płytek do kontroli grubości warstwy fotorezystu. Wyniki 25 kolejnych kontroli zostały zebrane w poniższej tabeli. Biorąc pod uwagę specyfikację według której grubość warstwy fotorezystu powinna wynosić $1,50 \pm 0,50$ mikronów, należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów. Zakłada się, że cel ten zostanie osiągnięty jeżeli wytwarzane produkty będą spełniały wymogi określone w specyfikacji.

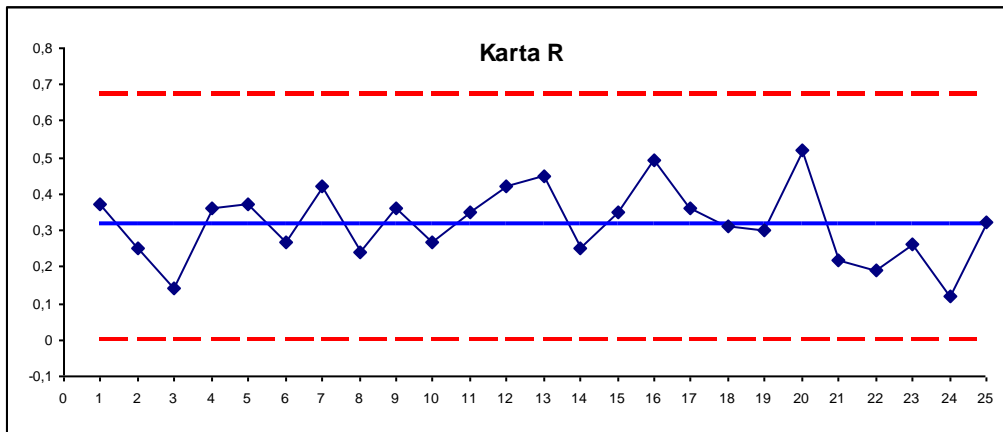
kontrola	1	2	3	4	5	Xśr	R
1	1,32	1,41	1,67	1,46	1,69	1,51	0,37
2	1,43	1,36	1,61	1,47	1,61	1,5	0,25
3	1,43	1,49	1,49	1,43	1,57	1,48	0,14
4	1,5	1,64	1,38	1,28	1,55	1,47	0,36
5	1,56	1,27	1,53	1,44	1,64	1,49	0,37
...
25	1,58	1,37	1,62	1,37	1,69	1,53	0,32
					Średnie	1,5061	0,3184

Karta Xśr		
CL	UCL	LCL
1,506	1,6898	1,3223

Karta R		
CL	UCL	LCL
0,3184	0,6731	0

Kontrola stabilności procesu z pomocą kart $\bar{X} - R$ wykazała, że proces jest statystycznie stabilny.





Dodatkowo, biorąc pod uwagę specyfikację, można również uznać że proces jest wycentrowany (wyliczona z próbek średnia wynosi $\bar{x} \approx 1,5061$ a wartość nominalna $T = 1,50$). Z analizy karty \bar{X} wynika, że grubość mierzonej warstwy mieści się w granicach $1,3223 \leq \bar{x} \leq 1,6898$ a więc tym bardziej w granicach wynikających ze specyfikacji $1,0 \leq \bar{x} \leq 2,0$.

Zakładając, że rozkład grubości jest rozkładem normalnym można wyznaczyć liczbę płytek dla których nie są spełnione założone wymagania. Wartość średnią rozkładu można oszacować w oparciu o średnią z próbek, tzn.: $\hat{\mu} = 1,506$. Odchylenie standardowe może być szacowane z zależności:

$$\hat{\sigma}_{\bar{R}/d_2} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (1a)$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{s}/c_4} = \frac{\bar{s}}{c_4}, \quad (1b)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)} \quad (1c)$$

gdzie: x_i – wynik i -tego pomiaru, $i = 1 \dots n$; n – liczba wszystkich pomiarów, \bar{R} , \bar{s} –wartość średnia z rozstępów i odchyłeń standardowych w próbkach, d_2 , c_4 – współczynniki statystyczne zależne od rozmiaru próbki (patrz dodatek03_1).

Odchylenie standardowe szacowane na podstawie zależności (1a) i (1b) nazywane jest *sigmą wewnątrzpróbkową* (ang. *sigma within*, σ_{within}) i przedstawia średnią zmienność wewnątrz analizowanych próbek. Odchylenie standardowe szacowane na podstawie zależności (1c) nazywane jest *sigmą całkowitą* (ang. *sigma overall*, $\sigma_{overall}$) i przedstawia całkowitą zmienność analizowanych danych. Na *całkowitą* zmienność procesu składa się zmienność *wewnątrzpróbkowa* i zmienność *międzypróbkowa*. Zmienność *całkowita* odpowiada zmienności *wewnątrzpróbkowej* gdy zmienność *międzypróbkowa* jest niewielka.

Analiza procesu była przeprowadzana w oparciu o kartę $\bar{X} - R$, więc odchylenie standardowe rozkładu wygodnie będzie oszacować z zależności (1a): $\hat{\sigma} = 0,3184/2,326 \approx 0,1369$. Odchylenie standardowe liczone na podstawie zależności (1c) ma w tym przypadku zbliżoną wartość: $\hat{\sigma} = \sqrt{2,0896/124} \approx 0,1298$.

Ilość płytek niespełniających wymogów specyfikacji można wyznaczyć wykorzystując *sigmę wewnątrzpróbkową*:

$$p = P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,5061}{0,1369}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,5061}{0,1369}\right) \approx 0,000109 + 0,000154 \approx 0,000263,$$

lub dla *sigmy całkowitej*:

$$p = P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,5061}{0,1298}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,5061}{0,1298}\right) \approx 0,000048 + 0,000071 \approx 0,000119.$$

Oznacza to, że w pierwszym przypadku na milion płytek około 263 nie będzie spełniało założonych wymagań, w drugim przypadku oczekiwania są lepsze na milion płytek 119 znajdzie się poza granicami specyfikacji.

W rozważanym przykładzie różnica pomiędzy odchyleniem wewnątrzpróbkowym a całkowitym była niewielka, niewielka więc również była różnica pomiędzy szacowanymi liczbami elementów odstających. W poniższym przykładzie przedstawione zostały wyniki kolejnych 25 kontroli rozważanego procesu ale zmienność międzypróbkowa jest na tyle duża, że szacowane liczby elementów odstających różnią się o rząd wielkości.

Przykład 1. cd.

Wyniki 25 kolejnych kontroli grubości warstwy fotorezystu zostały zebrane w poniższej tabeli. Należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów, przy założeniu, że specyfikacja techniczna jest taka sama jak w przykładzie poprzednim.

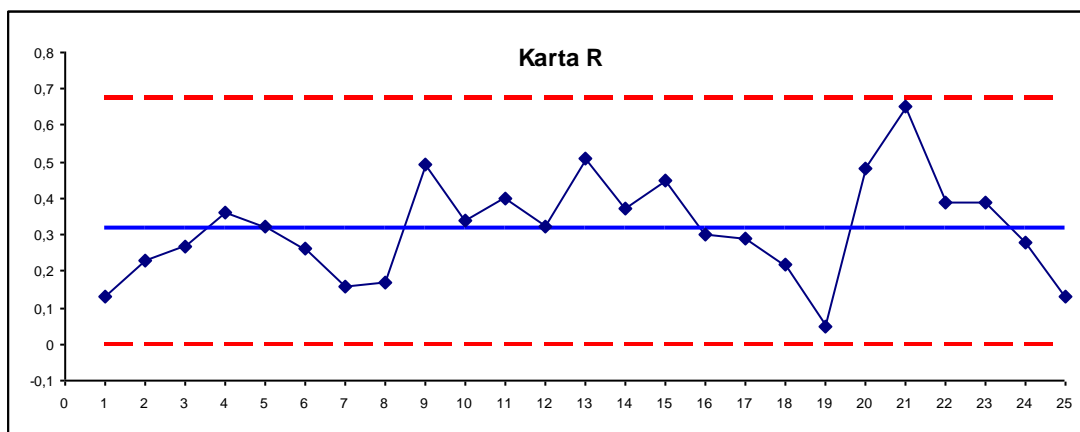
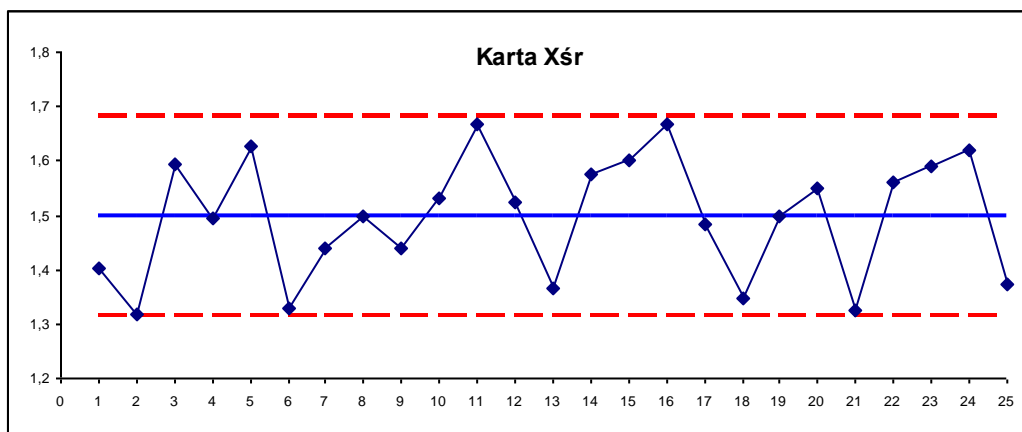
kontrola	1	2	3	4	5	Xśr	R
1	1,35	1,42	1,37	1,4	1,48	1,404	0,13
2	1,22	1,33	1,33	1,45	1,26	1,318	0,23
3	1,6	1,59	1,77	1,5	1,51	1,594	0,27
4	1,38	1,8	1,35	1,69	1,78	1,6	0,45
5	1,04	1,33	1,55	1,52	1,39	1,366	0,51
...
25	1,43	1,79	1,4	1,78	1,55	1,59	0,39
					Średnie	1,4969	0,3184

Karta Xśr		
CL	UCL	LCL
1,4969	1,6806	1,3132

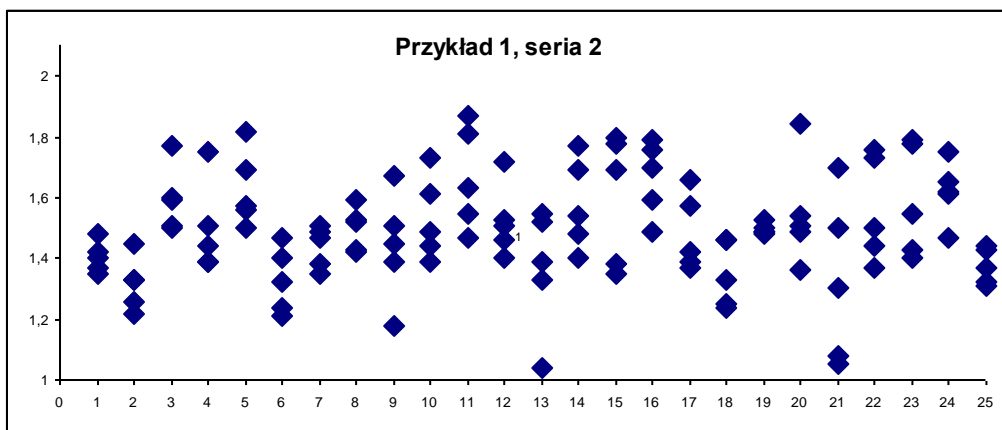
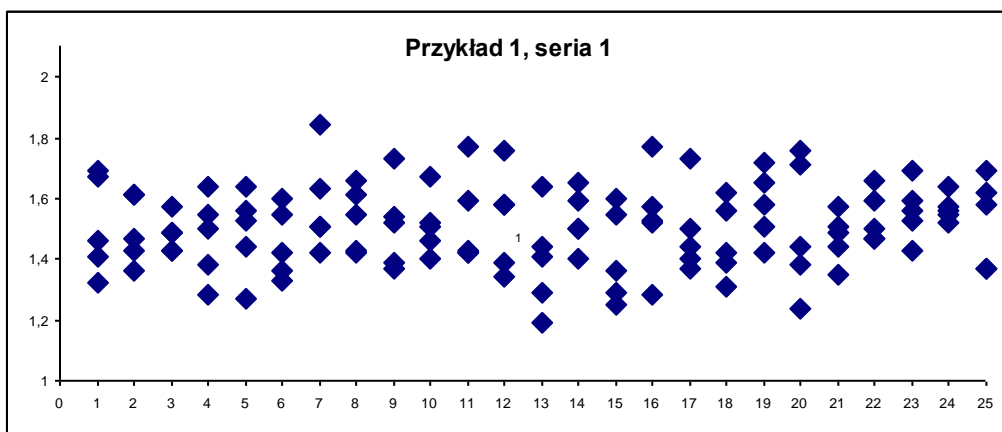
Karta R		
CL	UCL	LCL
0,3184	0,6731	0

Karta $\bar{X} - R$ podobnie jak w przykładzie 1., wskazuje, że proces jest statystycznie stabilny. Odchylenie standardowe wewnątrzpróbkowe jest w tym przypadku identyczne do tego wyznaczonego w przykładzie poprzednim $\hat{\sigma} = 0,3184/2,326 \approx 0,1369$. Odchylenie całkowite jest większe od wyznaczonego poprzednio i wynosi $\hat{\sigma} = \sqrt{3,5451/124} \approx 0,1691$. Rozbieżność pomiędzy szacowanymi wartościami odchylenia standardowego wynika z dużej zmienności międzypróbkowej.





Na przedstawionych poniżej rysunkach przedstawiono wykresy rozrzutu pokazujące zmienność pomiarów dla pierwszej i drugiej serii danych.



W drugiej serii danych występują znacznie większe skoki wartości pomiędzy próbkami niż w pierwszej. Rozbieżność szacowanych wartości odchylenia standardowego wpływa na większą niż w przykładzie poprzednim rozbieżność szacowanej liczby wyrobów niespełniających wymogów specyfikacji. Wykorzystując *sigmę wewnątrzpróbkową* otrzymuje się:

$$p = P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,4969}{0,1369}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,4969}{0,1369}\right) \approx 0,000142 + 0,000119 \approx 0,000261,$$

lub dla *sigmy całkowitej*:

$$p = P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,4969}{0,1691}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,4969}{0,1691}\right) \approx 0,001648 + 0,001462 \approx 0,003110.$$

Oznacza to, że w pierwszym przypadku na milion płytek około 261 nie będzie spełniało założonych wymagań, w drugim przypadku oczekiwania są dużo gorsze – na milion płytek 3110 znajdzie się poza granicami specyfikacji.

5.1. Wskaźniki zdolności procesu

Wskaźnik zdolności C_p

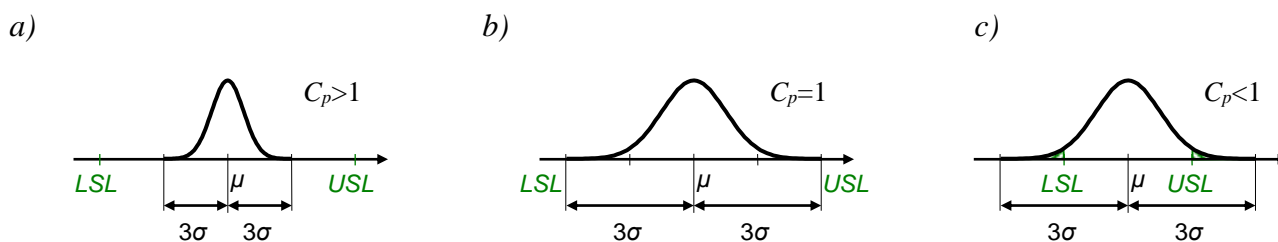
Inną metodą oceny procesu jest wykorzystanie **wskaźnika zdolności (rozrzutu) procesu** C_p . Wskaźnik ten wyznacza stosunek długości przedziału narzuconego przez specyfikację do naturalnej zmienności procesu równej 6σ (3σ poniżej i 3σ powyżej średniej):

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad (2)$$

gdzie: USL , LSL – odpowiednio górna i dolna granica specyfikacji (*Upper Specification Limit*, *Lower Specification Limit*); σ – odchylenie standardowe zmienności własnej procesu.

W zależności od ustalonych granic specyfikacji i naturalnej zmienności procesu możliwe są trzy podstawowe przypadki (patrz Rys. 1):

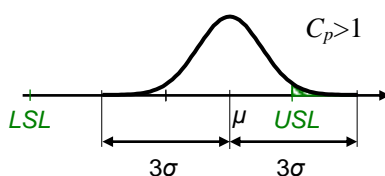
- granice specyfikacji są szersze od przedziału naturalnej zmienności procesu: $C_p > 1$ (prawdopodobieństwo wystąpienia elementów niezgodnych z wymaganiami jest mniejsze od 0,0027),
- granice specyfikacji pokrywają się z przedziałem naturalnej zmienności procesu: $C_p = 1$ (prawdopodobieństwo wystąpienia elementów niezgodnych jest równe 0,0027),
- granice specyfikacji znajdują się wewnątrz przedziału wyznaczonego przez naturalną zmienność procesu: $C_p < 1$ (prawdopodobieństwo wystąpienia elementów niezgodnych z jest większe od 0,0027).



Rys.1. Wartość wskaźnika zdolności procesu

Żeby zapewnić małą liczbę elementów niezgodnych wartość wskaźnika C_p powinna być większa od 1, na ogół wymaga się aby była większa od 1,33.

Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw wystąpienia elementów niezgodnych w zależności od wartości wskaźnika C_p założono, że proces jest idealnie wycentryowany. W przypadku procesu niewycentryowanego nawet duża wartość wskaźnika C_p nie zapewnia małej liczby elementów niezgodnych.



Rys.2. Wartość wskaźnika zdolności procesu

Frakcja zdolności procesu: C_r

Odwrotność wskaźnika zdolności:

$$C_r = \frac{1}{C_p} \quad (3)$$

przedstawia stopień wykorzystania przedziału specyfikacji przez naturalną zmienność procesu.

Dolna/górna zdolność: C_{pl} , C_{pu}

Do wyznaczenia wartości wskaźnika (1) niezbędna jest dolna i górna granica specyfikacji, w przypadku procesów dla których tylko jedna z tych wartości jest określona stosowane są odpowiednio wskaźniki:

- dla procesu z zadaną dolną granicą specyfikacji

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \quad (4)$$

- dla procesu z zadaną górną granicą specyfikacji

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}. \quad (5)$$

Wskaźnik wycentrowania procesu C_{pk}

Wskaźnikiem, który bierze pod uwagę wycentrowanie procesu jest:

$$C_{pk} = \min \{C_{pl}, C_{pu}\}, \quad (6)$$

wskaźnik ten nazywany jest **wskaźnikiem wycentrowania procesu**.

Wykorzystując fakt, że $\min \{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, C_{pk} można zapisać jako:

$$\begin{aligned} C_{pk} = \min \{C_{pu}, C_{pl}\} &= \frac{1}{2}(C_{pu} + C_{pl} - |C_{pu} - C_{pl}|) = \frac{1}{2} \frac{1}{3\sigma} (USL - \mu + \mu - LSL - |USL - \mu - \mu + LSL|) = \\ &= \frac{1}{6\sigma} (USL - LSL - |USL + LSL - \mu - \mu|) = \frac{1}{6\sigma} \left(USL - LSL - 2 \left| \frac{USL + LSL}{2} - \mu \right| \right). \end{aligned}$$

Dodatkowo, zakładając, że wartość nominalna $T = \frac{1}{2}(USL + LSL)$, zależność powyższą można uprościć:

$$C_{pk} = \frac{1}{6\sigma} (USL - LSL - 2|T - \mu|) = \frac{USL - LSL}{6\sigma} - \frac{2|T - \mu|}{6\sigma}.$$

Powyższa postać wskaźnika pozwala na uzależnienie go od wartości wskaźnika C_p . Z zależności (2) wynika, że $6\sigma = (USL - LSL)/C_p$, ostatecznie więc C_{pk} może być zapisany jako:

$$C_{pk} = \frac{USL - LSL}{USL - LSL} C_p - \frac{2|T - \mu|}{USL - LSL} C_p = \left(1 - \frac{2|T - \mu|}{USL - LSL} \right) C_p.$$

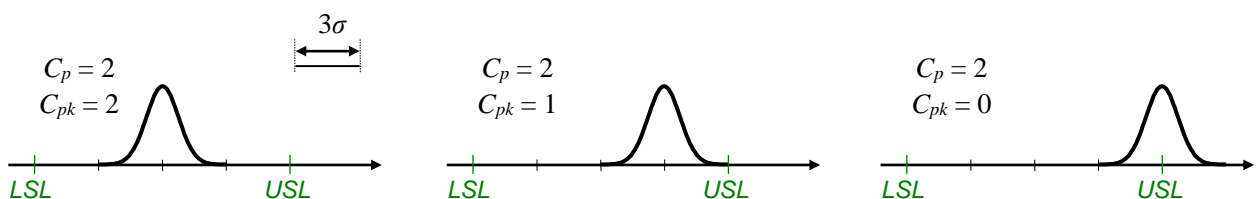
Po zdefiniowaniu **współczynnika niewycentrowania**:

$$K = \frac{|T - \mu|}{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$$

wskaźnik wycentrowania C_{pk} może być zapisany w uproszczonej postaci jako:

$$C_{pk} = (1 - K)C_p.$$

W przypadku gdy $C_{pk} = C_p$ - proces jest wycentrowany, jeśli $C_{pk} < C_p$ proces nie jest wycentrowany a jego odchylenie od zadanej wartości nominalnej jest tym większe im większa jest różnica $C_p - C_{pk}$ (patrz Rys. 3).



Rys.3. Wskaźnik zdolności procesu C_p i wskaźnik wycentrowania procesu C_{pk}

Wskaźnik C_{pk} pozwala określić stopień wycentrowania procesu tylko poprzez porównanie jego wartości z wartością wskaźnika C_p . Dodatkowo, wartość liczbową wskaźnika nie określa położenia średniej wewnątrz przedziału specyfikacji.



Rys.4. Dwa przykładowe procesy o $C_{pk} = 1$

Wskaźnik położenia procesu C_{pm}

Stopień wycentrowania procesu określany jest też przy pomocy **wskaźnika położenia procesu** C_{pm} :

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau}, \quad (7a)$$

gdzie: τ^2 odpowiada kwadratowi odchylenia od wartości nominalnej T czyli $\tau^2 = E[(x - T)^2]$, więc:
 $E[(x - T)^2] = E[(x - \mu + \mu - T)^2] = E[(x - \mu)^2 + 2(x - \mu)(\mu - T) + (\mu - T)^2] = E[(x - \mu)^2] + E[(\mu - T)^2] + E[2(x - \mu)(\mu - T)] = \sigma^2 + (\mu - T)^2$, wskaźnik C_{pm} jest także zapisywany jako:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \quad (7b)$$

a po prowadzeniu oznaczenia $\xi = (\mu - T)/\sigma$ również jako:

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (7c)$$

Wskaźnik C_{pm} odpowiada wskaźnikowi C_p w przypadku, gdy średnia procesu pokrywa się z wartością nominalną. Stopień wycentrowania procesu uwzględniający położenie średniej procesu względem wartości nominalnej może być też oceniany przy pomocy wskaźnika C_{pkm} definiowanego analogicznie

do wskaźnika $C_{pk} = \min \{C_{pk}, C_{pu}\} = \min \left\{ \frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \frac{USL - \mu}{3\sigma} \right\}$:

$$C_{pkm} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \min \left\{ \frac{C_{pl}}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \frac{C_{pu}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right\} = \min \left\{ \frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right\}.$$

Wskaźniki zdolności – nieznanne odchylenie standardowe

Gdy odchylenie standardowe σ procesu nie jest znane wartości wskaźników zdolności wyznacza się wykorzystując odchylenie standardowe wewnątrzpróbkowe (1a) i (1b) lub odchylenie całkowite (1c).

Wskaźniki szacowane na podstawie odchylenia wewnątrzpróbkowego nazywane są *wskaźnikami zdolności procesu* a szacowane na podstawie odchylenia całkowitego *wskaźnikami wykonania procesu*.

<i>Wskaźniki zdolności procesu</i>	<i>Wskaźniki wykonania procesu</i>
$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p}$	$\hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p}$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_{pk} = \min \{ \hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu} \}$	$\hat{P}_{pk} = \min \{ \hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu} \}$
$\hat{C}_{pk} = (1 - K)\hat{C}_p, \quad K = \frac{ T - \mu }{\frac{1}{2}(USL - LSL)}$	$\hat{P}_{pk} = (1 - K)\hat{P}_p$
$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{within}^2 + (\mu - T)^2}}$	
$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}}, \quad \hat{\xi} = \frac{\mu - T}{\sigma_{within}}$	
$\hat{C}_{pkm} = \frac{\hat{C}_{pk}}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}}$	

Przykład 1. cd.

Dla procesu z przykładu 1. wyznaczone zostały wskaźniki zdolności i wykonania:

<i>Wskaźniki zdolności procesu</i>	<i>Wskaźniki wykonania procesu</i>
$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1}{6 \cdot 0,1369} \approx 1,2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1}{6 \cdot 0,1298} \approx 1,2839$
$\hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p} \approx 0,8213$	$\hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p} \approx 0,7789$



$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,5061}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2027$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,5061}{3 \cdot 0,1298} \approx 1,2683$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,5061 - 1}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2324$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,5061 - 1}{3 \cdot 0,1298} \approx 1,2995$
$\hat{C}_{pk} = \min \{ \hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu} \} \approx 1,2027$	$\hat{P}_{pk} = \min \{ \hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu} \} \approx 1,2683$
$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{1,2175}{\sqrt{1 + (0,0444)^2}} \approx 1,2163$ $\hat{C}_{pkm} = \frac{\hat{C}_{pk}}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{1,2027}{\sqrt{1 + (0,0444)^2}} \approx 1,2016$ $\left(\hat{\xi} = \frac{\mu - T}{\hat{\sigma}} = \frac{1,5061 - 1,5}{0,1369} \approx 0,0444 \right)$	

Wszystkie otrzymane wartości wskaźników zdolności są większe od 1, co oznacza, że proces można uznać za zdolny. Ocena tak niesie za sobą pewne ryzyko. Wartości wskaźników są bliskie 1 więc naturalna zmienność procesu wypełnia prawie w całości (w około 82%, $\hat{C}_r \approx 0,8213$) założone przez specyfikację granice. Wystąpienie nielosowej przyczyny specjalnej może w tym przypadku szybko doprowadzić do przesunięcia procesu i w efekcie może przyczynić się do powstania dużej liczby braków, z tego względu a na ogół wymaga się aby wartości wskaźników były większe od 1,33. Wskaźniki wykonania mają trochę większe wartości ale wszystkie są mniejsze od zalecanej 1,33.

Dla drugiej serii danych, ze względu na znacznie większą różnicę pomiędzy odchyleniem wewnątrzpróbkowym a całkowitym, różnice pomiędzy wskaźnikami zdolności i wykonania są znacząco większe.

<i>Wskaźniki zdolności procesu</i>	<i>Wskaźniki wykonania procesu</i>
$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1}{6 \cdot 0,1369} \approx 1,2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1}{6 \cdot 0,1691} \approx 0,9857$
$\hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p} \approx 0,8213$	$\hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p} \approx 1,0145$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,4969}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2251$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2 - 1,4969}{3 \cdot 0,1691} \approx 0,9919$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,4969 - 1}{3 \cdot 0,1369} \approx 1,2099$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1,4969 - 1}{3 \cdot 0,1691} \approx 0,9796$
$\hat{C}_{pk} = \min \{ \hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu} \} \approx 1,2099$	$\hat{P}_{pk} = \min \{ \hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu} \} \approx 0,9796$



$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{1,2175}{\sqrt{1 + (-0,0228)^2}} \approx 1,2172$ $\hat{C}_{pkn} = \frac{\hat{C}_{pk}}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{1,2099}{\sqrt{1 + (-0,0228)^2}} \approx 1,2096$ $\left(\hat{\xi} = \frac{\mu - T}{\hat{\sigma}} = \frac{1,4969 - 1,5}{0,1369} \approx -0,0228 \right)$	
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Wartości wskaźników zdolności są zbliżone do tych otrzymanych dla pierwszej serii danych – proces może być więc uznany za zdolny. Rozbieżność wartości odpowiadających sobie wskaźników zdolności i wykonania wskazuje jednak, że proces charakteryzuje się dużą zmiennością międzypróbkową która powoduje niestabilność średniej procesu więc pomimo tego, że wskaźniki zdolności mają wartości wyższe od 1 proces wymaga korekty.

Szacowanie liczby elementów odstających

Wartości wskaźników zdolności pozwalają na oszacowanie liczby elementów odstających. Załóżmy, że dany jest wskaźnik zdolności dla procesu z określoną dolną granicą specyfikacji:

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}.$$

Zakładając, że znane są parametry procesu μ i σ można wyznaczyć wartość dolnej granicy specyfikacji:

$$LSL = \mu - 3C_{pl} \sigma.$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia elementów o wymiarach mniejszych niż wynikające z wartości granicy specyfikacji można wyznaczyć jako:

$$P(x < LSL) = P(x < \mu - 3C_{pl} \sigma) = F_{N(\mu, \sigma)}(\mu - 3C_{pl} \sigma) = \Phi\left(\frac{\mu - 3C_{pl} \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(-3C_{pl}).$$

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla procesu z określoną górną granicą specyfikacji:

$$P(x > USL) = \Phi(-3C_{pu}).$$

W przypadku procesu o zadanych obydwu granicach prawdopodobieństwo wystąpienia elementów odstających można oszacować na podstawie wskaźnika C_p jako:

$$P((x < LSL) \cup (x > USL)) \approx 2\Phi(-3C_p).$$

W poniższej tabeli zestawiono zostały liczby elementów odstających w przeliczeniu na 1 mln wyliczone na podstawie wskaźników zdolności: dla procesu o zadanych obydwu granicach – na podstawie C_p , dla procesu o określonej górnej bądź dolnej granicy C_{pu} , C_{pl} .

Wskaźnik C_p , C_{pu} lub C_{pl}	Ilość odstających na 1 mln	
	proces o 1 granicy	proces o 2 granicach
0,25	226 627	453 255
0,5	66 807	133 614
0,75	12 224	24 449
1	1 350	2 700
1,25	88,42	176,83
1,5	3,40	6,80
1,75	0,076	0,152
2	0,00099	0,002

Przykład 1. cd.

Wykorzystaj wskaźniki \hat{C}_p i \hat{P}_p do obliczenia prawdopodobieństwa $P((x < 1) \cup (x > 2))$ wystąpienia elementów odstających procesu z przykładu 1.

Dla pierwszej serii danych, w zależności od wykorzystanego szacowania odchylenia standardowego, otrzymano następujące prawdopodobieństwa:

$$P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,5061}{0,1369}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,5061}{0,1369}\right) \approx 0,000263,$$

$$P((x < 1) \cup (x > 2)) = \Phi\left(\frac{1-1,5061}{0,1298}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2-1,5061}{0,1298}\right) \approx 0,000119.$$

Prawdopodobieństwa te oszacowane na podstawie wskaźnika zdolności i wykonania wynoszą w tym przypadku odpowiednio:

$$p(\hat{C}_p) = 2\Phi(-3 \cdot 1,2175) = 0,000260,$$

$$p(\hat{P}_p) = 2\Phi(-3 \cdot 1,2839) = 0,000117.$$

Różnica w otrzymanych wynikach wynika z niewycentrowania procesu. Podobne niewielkie różnice otrzymuje się również dla drugiej serii danych.

Przykład 2. (na podstawie [1])

Parametry produkowanego elementu według specyfikacji powinny wynosić: $25,8 \pm 0,6$. Wyniki kontroli z wykorzystaniem karty $\bar{X} - R$ wykazały, że proces produkcji jest stabilny. Wyznacz wskaźniki zdolności procesu przyjmując, że: $\bar{x} = 25,6$, $\bar{R} = 0,2059$ i $n = 4$ (rozmiar próbki na karcie).

Odchylenie standardowe procesu szacuje się jako:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(4)} = \frac{0,2059}{2,059} = 0,1.$$

Wartości wskaźników zdolności wynoszą odpowiednio:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{26,4 - 25,2}{6 \cdot 0,1} = 2,$$

$$\hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p} = 0,5,$$

$$\hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{26,4 - 25,6}{3 \cdot 0,1} \approx 2,6667,$$

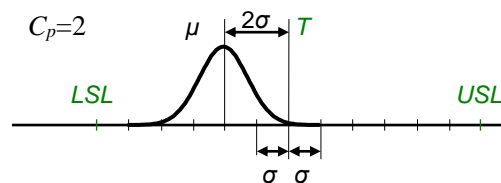
$$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{25,6 - 25,2}{3 \cdot 0,1} \approx 1,3333,$$

$$\hat{C}_{pk} = \min \{ \hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu} \} \approx 1,3333,$$

$$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (-2)^2}} \approx 0,8944, \quad \left(\hat{\xi} = \frac{\mu - T}{\hat{\sigma}} = \frac{25,6 - 25,8}{0,1} = -2 \right)$$

$$\hat{C}_{pkm} = \frac{\hat{C}_{pk}}{\sqrt{1 + \hat{\xi}^2}} = \frac{1,3333}{\sqrt{1 + (-2)^2}} \approx 0,5963.$$

Wskaźniki \hat{C}_p , \hat{C}_{pk} osiągają zalecaną (wyższą od 1) wartość. Z porównania wartości tych wskaźników widać, że proces nie jest wycentrowany $\hat{C}_p \neq \hat{C}_{pk}$. Średnia procesu znajduje się w odległości 2σ od wartości nominalnej ($\hat{\xi} = -2$) co przekłada się na małe wartości wskaźników C_{pm} i C_{pkm} i powoduje że elementy odległe o σ od wartości nominalnej będą się pojawiały tylko z prawdopodobieństwem 0,16 ($p = \Phi(3) - \Phi(1) \approx 0,16$).



5.2. Wskaźniki zdolności dla rozkładu innego niż normalny

Wszystkie omówione wskaźniki zdolności procesu zakładały, że proces ma rozkład normalny. Dla rozkładów innych niż normalny wykorzystanie powyższych wskaźników może prowadzić do błędnych wniosków.

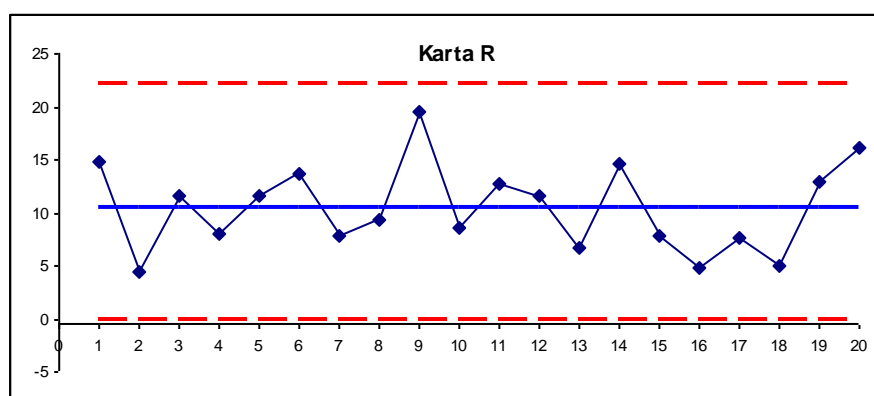
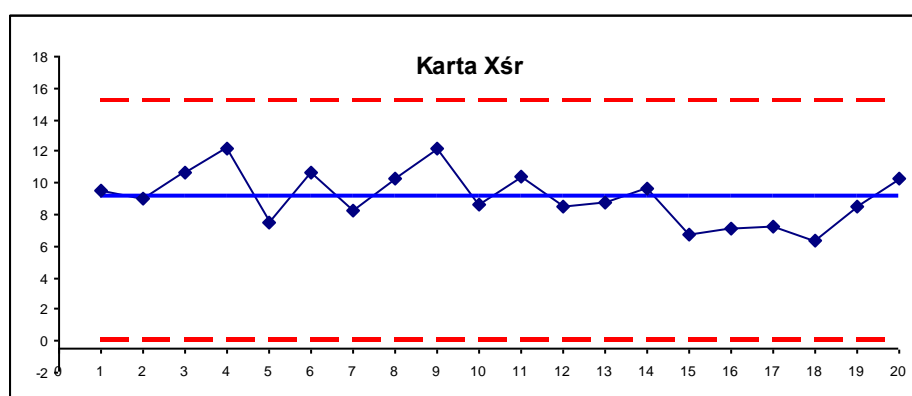
Przykład 3.

Dla potrzeb przykładu wylosowano 100 liczb z rozkładu logarymiczno normalnego o parametrach $\mu = 2$, $\sigma = 0,5$. Dane zostały podzielone na 20 5–elementowych grup. Zakładając normalność rozkładu, w oparciu o kartę $\bar{X} - R$, zbadana została stabilność tego procesu.

Lp	1	2	3	4	5	X \bar{s} r	R	
1	7,33	6,11	6,15	20,87	7,26	9,544	14,76	
2	7,32	8,55	10,49	7,22	11,7	9,056	4,48	
3	8,59	11,2	14,92	3,35	14,95	10,602	11,6	
4	13,12	8,01	15,97	9,35	14,22	12,134	7,96	
5	13,64	10,44	2	4,38	6,91	7,474	11,64	
...	
20	12,17	2,08	14,05	4,66	18,22	10,236	16,14	
						Średnie	9,1279	10,4805

Karta X \bar{s} r		
CL	UCL	LCL
9,1279	15,17515	0

Karta R		
CL	UCL	LCL
10,4805	22,15578	0



Wyniki analizy pokazały, że proces jest stabilny. Zakładając, że zadana została jedynie górna granica specyfikacji $USL = 25$, wyznaczono wartości współczynników \hat{C}_{pu} i \hat{P}_{pu} .

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{10,4805}{2,326} \approx 4,5048, \quad \hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{25 - 9,1279}{3 \cdot 4,5048} \approx 1,1742,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 4,4795, \quad \hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{25 - 9,1279}{3 \cdot 4,4795} \approx 1,1811.$$

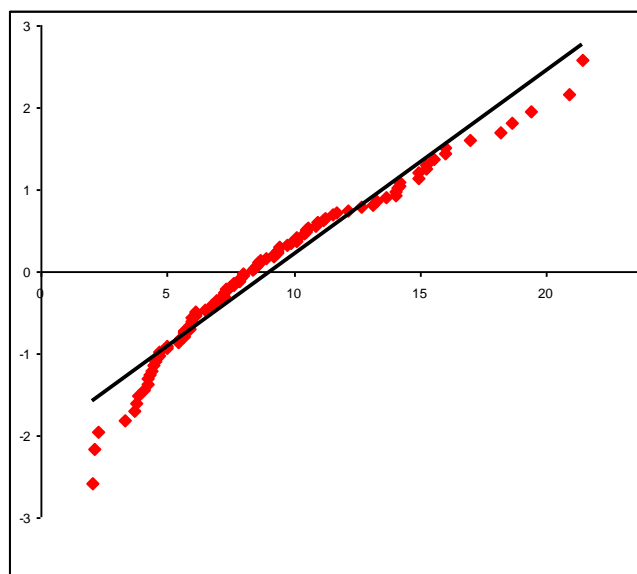
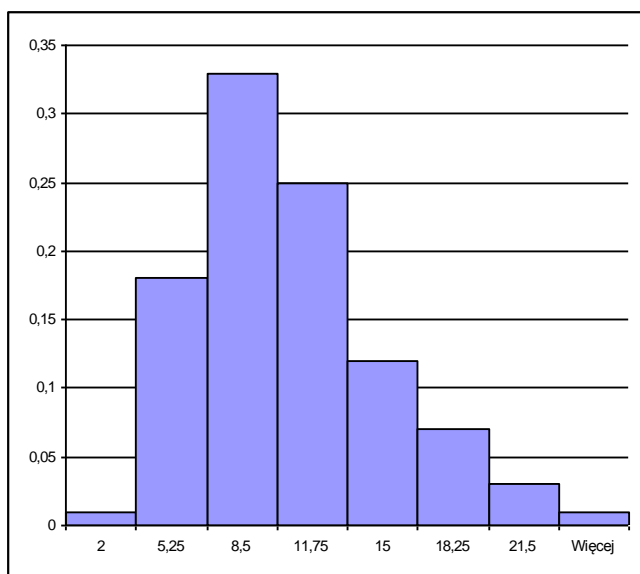
Wykorzystując obliczone odchylenia standardowe można oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia elementów odstających:

$$P(x > USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 9,1279}{4,5048}\right) \approx 0,000214, \quad P(x > USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25 - 9,1279}{4,4795}\right) \approx 0,000198,$$

Identyczne wyniki otrzymuje się szacując prawdopodobieństwa na podstawie wskaźników \hat{C}_{pu} i \hat{P}_{pu} :

$$P(x > USL) = \Phi(-3\hat{C}_{pu}) \approx 0,000214, \quad P(x > USL) = \Phi(-3\hat{P}_{pu}) \approx 0,000198.$$

Z obliczeń wynika, że w 100–elementowej próbkę powinno wystąpić 0,0214 lub 0,0198 elementów odstających a w analizowanym zbiorze jest jeden taki element – rozbieżność wyników jest więc duża. Wykorzystując histogram i wykres Q-Q sprawdzono normalność rozkładu.



Obydwa wykresy jednoznacznie wskazują, że dane nie mają z rozkładu normalnego. Cała dotychczasowa analiza (karta $\bar{X} - R$ i współczynniki \hat{C}_{pu} i \hat{P}_{pu}) była oparta na założeniu, że rozkład danych jest rozkładem normalnym. Wnioski dotyczące stabilności procesu były więc niewłaściwe a wyznaczone wskaźniki sugerowały zbyt małą liczbę elementów odstających.

Transformacja rozkładu do rozkładu normalnego

Jednym z często wykorzystywanych podejść w takiej sytuacji jest wykonanie takiego przekształcenia danych, np. wykorzystując transformację Boxa–Coxa, aby nowe dane miały już rozkład normalny. W takim przypadku badanie stabilności można prowadzić już przy pomocy zwykłych kart Shewhart-a, a zdolność procesu można wyznaczać z wykorzystaniem wcześniej omówionych wskaźników.

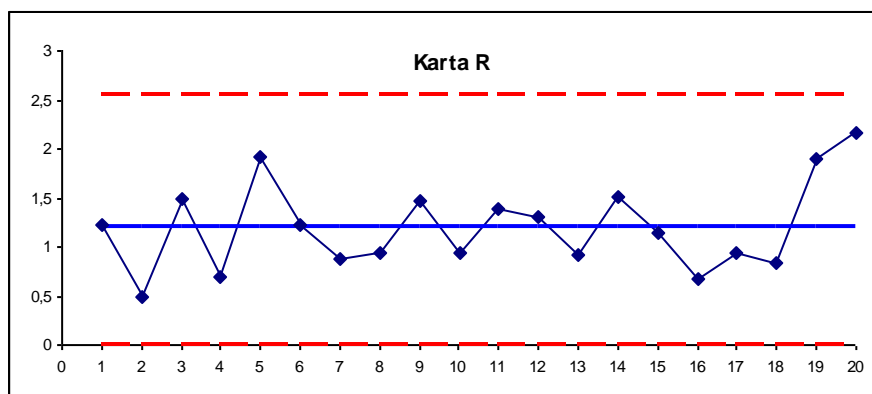
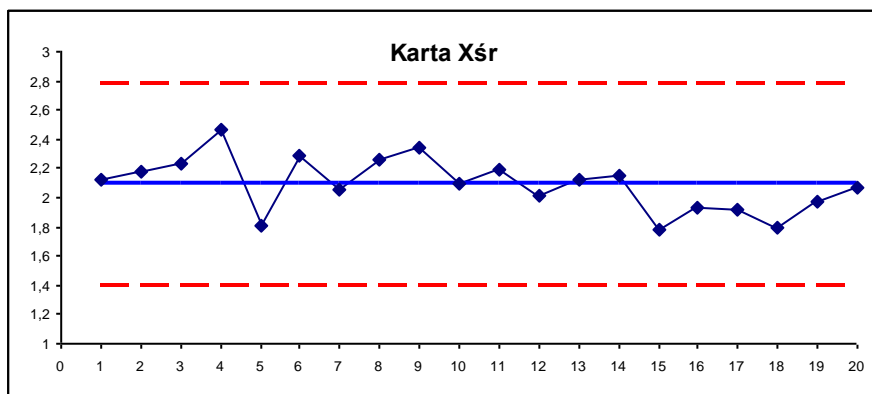
Przykład 3. cd.

W rozważanym przykładzie dane zostały wylosowane z rozkładu logarytmiczno normalnego o parametrach: $\mu = 2$, $\sigma = 0,5$. Dane można w takim przypadku sprowadzić do rozkładu normalnego używając transformacji logarytmicznej, przekształcając wyniki i granice specyfikacji przy pomocy logarytmu normalnego.

Lp	1	2	3	4	5	Xśr	R
1	1,9920	1,8099	1,8165	3,0383	1,9824	2,1278	1,2284
2	1,9906	2,1459	2,3504	1,9769	2,4596	2,1847	0,4827
3	2,1506	2,4159	2,7027	1,2090	2,7047	2,2366	1,4958
4	2,5741	2,0807	2,7707	2,2354	2,6546	2,4631	0,6900
5	2,6130	2,3456	0,6931	1,4770	1,9330	1,8124	1,9199
...
20	2,4990	0,7324	2,6426	1,5390	2,9025	2,0631	2,1702
						Średnie	1,2035

Karta Xśr		
CL	UCL	LCL
2,0908	2,7853	1,3964

Karta R		
CL	UCL	LCL
1,2035	2,5442	0



Wyniki analizy pokazują, podobnie jak poprzednio, że proces jest stabilny. Wartości współczynników \hat{C}_{pu} i \hat{P}_{pu} wynoszą w tym przypadku.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{1,2035}{2,326} \approx 0,5174, \quad \hat{C}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{\ln(25) - 2,0908}{3 \cdot 0,5174} \approx 0,7267,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 0,5071, \quad \hat{P}_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{\ln(25) - 2,0908}{3 \cdot 0,5071} \approx 0,7414.$$

Wskaźniki są więc mniejsze od 1, proces nie może być uznany za zdolny.

Wykorzystując obliczone odchylenia standardowe można oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia elementów odstających:

$$P(x > USL) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(25) - 2,0908}{0,5174}\right) \approx 0,0146, \quad P(x > USL) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(25) - 2,0908}{0,5071}\right) \approx 0,0131,$$

Identyczne wyniki otrzymuje się szacując prawdopodobieństwa na podstawie wskaźników \hat{C}_{pu} i \hat{P}_{pu} :

$$P(x > USL) = \Phi(-3\hat{C}_{pu}) \approx 0,0146, \quad P(x > USL) = \Phi(-3\hat{P}_{pu}) \approx 0,0131,$$

oraz wykorzystując fakt, że dane pochodzą z rozkładu logarytmiczno normalnego $\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)$ lub $\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5071)$:

$$P(x > USL) = 1 - F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)}(25) \approx 0,0146, \quad P(x > USL) = 1 - F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5071)}(25) \approx 0,0131.$$

Z obliczeń wynika, że w 100-elementowej próbkę powinno wystąpić 1,46 lub 1,31 elementów odstających, dane zawierają jeden taki element – więc można uznać że szacowania są prawidłowe.

Wskaźniki zdolności dla rozkładów innych niż normalny

W przypadku wyznaczania zdolności procesu wprowadzono również specjalne wskaźniki zdolności dla rozkładów innych niż normalny. We wskaźnikach tych zastępuje się parametry rozkładu normalnego (μ, σ) kwantylami. Średnia jest zastępowana medianą (czyli kwantylem rzędu 0,5: $q_{0,5}$), w zależności od wskaźnika odchylenie standardowe zastępuje się wykorzystując kwantyle $q_{0,00135}$ i $q_{0,99865}$.

W rozkładzie normalnym, jak pokazano poniżej, kwantyle $q_{0,00135} = \mu - 3\sigma$, $q_{0,99865} = \mu + 3\sigma$, $q_{0,5} = \mu$:

$$P(x < \mu - 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(-3) = 0,00135,$$

$$P(x < \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 0,99865,$$

$$P(x < \mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0}{\sigma}\right) = \Phi(0) = 0,5.$$

Korzystając z zależności:

$$6\sigma = (\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma) = q_{0,99865} - q_{0,00135},$$

$$3\sigma = (\mu + 3\sigma) - \mu = q_{0,99865} - q_{0,5},$$

$$3\sigma = \mu - (\mu - 3\sigma) = q_{0,5} - q_{0,00135},$$

wskaźniki zdolności można zapisać w bardziej uniwersalnej postaci:

$$C_p(q) = \frac{USL - LSL}{q_{0,99865} - q_{0,00135}},$$

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}},$$

$$C_{pl}(q) = \frac{q_{0,5} - LSL}{q_{0,5} - q_{0,00135}},$$

$$C_{pk}(q) = \min \{C_{pl}(q), C_{pu}(q)\},$$

$$C_{pm}(q) = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{q_{0,99865} - q_{0,00135}}{6}\right)^2 + (q_{0,5} - T)^2}} \quad \text{lub} \quad C_{pm}(q) = \frac{C_p(q)}{\sqrt{1 + \xi(q)^2}},$$

$$C_{pkm}(q) = \frac{C_{pk}(q)}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \left(\xi(q) = 6 \frac{q_{0,5} - T}{q_{0,99865} - q_{0,00135}} \right).$$

W przypadku rozkładu normalnego wskaźniki obliczone na podstawie powyższych wzorów mają takie same wartości jak wskaźniki zdefiniowane w punkcie 4.1.

Kwantyle rozkładów innych niż normalny można wyznaczyć znając typ i parametry rozkładu. Rozkład o nieznanym typie może być dopasowany do jednego ze znanych rozkładów, można też wykorzystać dopasowanie do ogólnych rodzin rozkładów takich jak krzywe Johnsona czy Pearsona, których kwantyle mogą już być bez problemu wyznaczone.

Przykład 3. cd.

Znając parametry rozkładu logarymiczno normalnego można wyznaczyć jego kwantyle. Wartości odpowiednich kwantyli rozkładu $\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)$ wynoszą:

$$q_{0,5} = F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)}^{-1}(0,5) \approx 8,0917,$$

$$q_{0,99865} = F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)}^{-1}(0,99865) \approx 37,0494,$$

a rozkładu $\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5071)$:

$$q_{0,5} = F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5071)}^{-1}(0,5) \approx 8,0917,$$

$$q_{0,99865} = F_{\ln \mathcal{N}(2,0908, 0,5174)}^{-1}(0,99865) \approx 38,2084.$$

Po podstawieniu do wzorów otrzymuje się następujące wartości wskaźników:

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}} = \frac{25 - 8,0917}{37,0494 - 8,0917} \approx 0,5614,$$

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}} = \frac{25 - 8,0917}{38,2084 - 8,0917} \approx 0,5839.$$

Wskaźniki podobnie jak przy transformacji rozkładu mają wartości mniejsze od 1, proces nie może być więc uznany za zdolny.

LITERATURA

1. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, OWPW, Warszawa 2009,
2. Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009,
3. Wild C. J., Seber G. A. F. – *Chance Encounters: A First Course in Data Analysis and Inferencje* – John Wiley & Sons, New York 1999,
4. Devore J., Farnym N., Doi J. – *Applied Statistics for Engineers and Scientists*, Cengage Learning, Stamford, 2000.