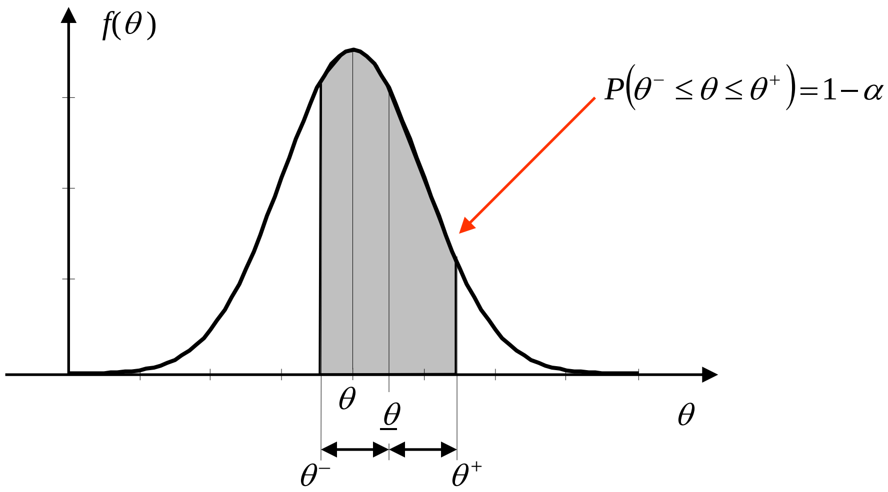
3. ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Estymacja punktowa wyznacza wartość nieznanego parametru rozkładu populacji generalnej ale nie daje oceny dokładności tego szacowania. Ocenę taką daje *estymacja przedziałowa*.

Niech θ jest szacowanym na podstawie próby parametrem populacji a $\underline{\theta}$ jest jego estymatorem. *Estymacja przedziałowa* wyznacza przedział $\left[\theta^-, \theta^+\right]$ nazywany *przedziałem ufności* o którym z prawdopodobieństwem (1 – α) można twierdzić, że zawiera parametr θ:

$$P\left(\theta^- \le \theta \le \theta^+\right) = 1 - \alpha$$

gdzie: (1 – α) – zadane prawdopodobieństwo nazywane *poziomem ufności*; parametr α określa prawdopodobieństwo popełnienia błędu, jest nazywany *poziomem istotności*; θ–, θ+ – wyznaczone dla wybranego *poziomu ufności* dolna i górna granica *przedziału ufności*.



Rys. 1. Konstrukcja przedziału ufności dla wartości oczekiwanej μ.

3.1. Przedziały ufności

3.1.1 Przedziału ufności dla dla μ

Znane odchylenie standardowe rozkładu lub duży rozmiar próby

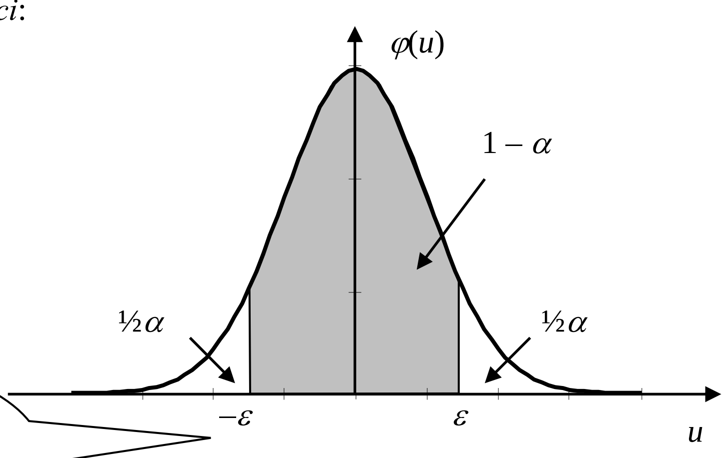
Rozkład średniej z próby dla $n \to \infty$ jest zbieżny do $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (patrz *centralne twierdzenie graniczne*).

Po utworzeniu unormowanej zmiennej (o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$):

$$U = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

można zdefiniować symetryczny *przedział ufności*:

$$P(-\varepsilon \le U \le \varepsilon) = 1-\alpha.$$



ε wyznacza się z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:
$\varepsilon = -\Phi^{-1}(½\alpha)$

Do określenia *przedziału ufności* niezbędne jest przekształcenie powyższej zależności do postaci zgodnej z definicją (estymowany parametr w środkowym członie nierówności). Po podstawieniu do wzoru zmiennej U i po wykonaniu przekształceń otrzymuje się kolejno:

$$P\left(-\varepsilon \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \varepsilon\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\bar{x}-\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Zależność ta definiuje *przedział ufności* dla wartości oczekiwanej μ na *poziomie ufności* $(1-\alpha)$ jako:

$$\left[\bar{x}-\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Gdy odchylenie standardowe rozkładu nie jest znane ale próba jest duża, przyjmuje się, że:

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad \text{lub} \quad \sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Nieznane odchylenie standardowe rozkładu i mały rozmiar próby

Gdy odchylenie standardowe rozkładu nie jest znane i próba jest mała zamiast σ przyjmuje się odchylenie z próby:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Podstawiając szacowane odchylenie do zmiennej umożliwiającej wyznaczenie przedziału ufności otrzymuje się jej nową postać:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}.$$

Zmienna ta ma rozkład t – *Studenta* o (n – 1) stopniach swobody. Dla zmiennej definiowany jest *przedział ufności*:

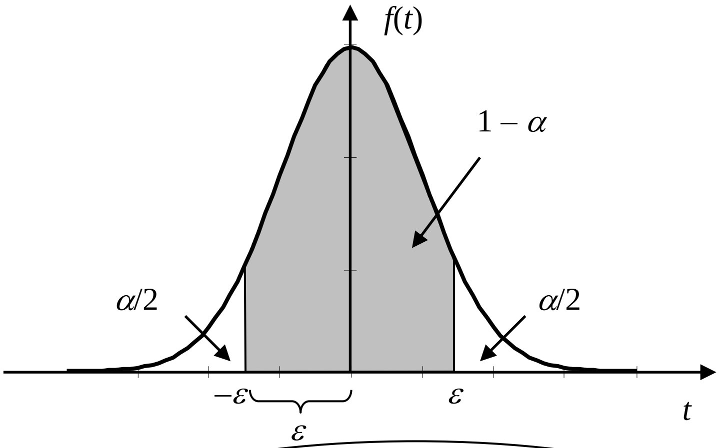
$$P\left(-\varepsilon \le \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} \le \varepsilon\right) = 1-\alpha.$$

Po przekształceniu zależności do postaci zgodnej z definicją:

$$P\left(\bar{x}-\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

otrzymuje się *przedział ufności*:

$$\left[\bar{x}-\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$



ε wyznacza się z odwrotności dystrybuanty rozkładu t – *Studenta* o (n – 1) stopniach swobody

Analiza błędów i niepewności pomiarów

Wyniki pomiarów, ze względu na występowanie błędów i niepewności pomiarowych, mogą być traktowane jako ***zmienne losowe***. Wynik pomiaru stanowi przybliżenie rzeczywistej wartości mierzonej wartości.

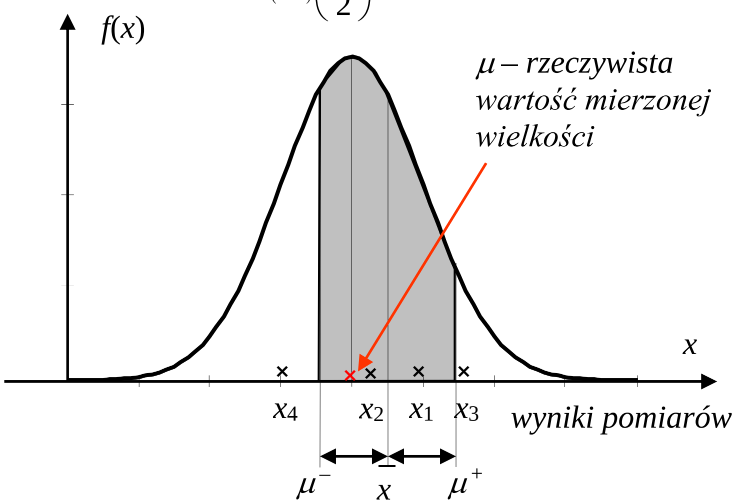
Przedział niepewności wyniku pomiaru to *przedział ufności* o którym z prawdopodobieństwem (1 – α) można twierdzić, że zawiera parametr rzeczywistą wartość mierzonej wartości, np.: dla estymowanego odchylenia standardowego σ przedział niepewności wyniku pomiaru wynosi:

$$\left[\bar{x}-\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right], \qquad \varepsilon = -F^{-1}_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Wartość $\frac{s}{\sqrt{n}}$ nazywana jest ***niepewnością standardową*** typu A;

ε to ***współczynnik rozszerzenia***,

$\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}$ to ***niepewność rozszerzona***.



Przykład 1.

Na podstawie zebranych w poniższej tabeli pomiarów długości pewnego detalu wykonanych z dokładnością $\sigma = 1.5$ oszacować na *poziomie ufności* $(1 - \alpha) = 0.99$ rzeczywistą długość tego detalu.

21.9	17.8	23	21.3	19.4	18	21	22.4	21	17.6

Rzeczywista wartość mierzonej wielkości jest wartością oczekiwaną populacji wszystkich możliwych wyników pomiarów a średnia arytmetyczna wykonanych pomiarów jest estymatorem rzeczywistej wartości. Przedział, który z zadanym prawdopodobieństwem zawiera rzeczywistą długość detalu jest *przedziałem ufności*:

$$\left[\bar{x} - \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Najpierw wyznacza się wielkość ε:

$$\alpha = 0.01 \quad \rightarrow \quad 1 - \alpha = 0.99 \qquad \varepsilon = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \approx 2.58.$$

Rzeczywista długość detalu znajduje się z prawdopodobieństwem 0.99 w przedziale:

$$\bar{x} = 20.34, \qquad \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2.58\,\frac{1.5}{\sqrt{10}} \approx 1.22,$$

$$\left[\bar{x} - \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \approx [20.34 - 1.22,\ 20.34 + 1.22] = [19.12,\ 21.56].$$

Przykład 2.

Rozwiązać zadanie z przykładu 1. zakładając, że dokładność pomiarów nie jest znana.
Dla nieznanej dokładności pomiarów *przedział ufności* wynosi:

$$\left[\bar{x} - \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Wielkość ε wyznacza się z odwrotności dystrybuanty rozkładu *t – Studenta* o $(n - 1)$ stopniach swobody:

$$\varepsilon = -F^{-1}_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -F^{-1}_{t(9)}\left(\frac{0.01}{2}\right) \approx 3.25\,.$$

Rzeczywista długość detalu znajduje się z prawdopodobieństwem 0.99 w przedziale:

$$\bar{x} = 20.34, \qquad s \approx 1.996, \qquad \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}} \approx 3.25\,\frac{1.996}{\sqrt{9}} \approx 2.05,$$

$$\left[\bar{x} - \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x} + \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] = [20.34 - 2.05,\ 20.34 + 2.05] = [18.29,\ \ 22.39].$$

Wartość ε wyznaczona w przypadku nieznanej dokładności pomiarów σ jest większa od analogicznej wartości wyznaczonej dla znanej wartości σ, *przedział ufności* jest więc szerszy.

Uwaga!

Dla dużych prób (czasem również dla małych) dane mogą być zebrane w szereg rozdzielczy, w takim przypadku średnią i odchylenie standardowe wylicza się z wzorów:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} \overline{x_i}\, n_i \ , \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 n_i - h^2/12}\ ,$$

gdzie: $\overline{x_i}$ – środek i-tego przedziału, $\overline{x_i} = \frac{x_{pi} + x_{ki}}{2}$, x_{pi}, x_{ki} – początek i koniec i-tego przedziału, n_i – liczebność i-tego przedziału, n – liczebność próby; r – ilość klas szeregu rozdzielczego; h – rozpiętość przedziału klasowego; $h^2/12$ – *poprawka Sheparda*, wprowadzana by zmniejszyć wielkość błędu popełnianego przy wyznaczaniu wariancji szeregu rozdzielczego.

Przykład 3.

Wykonano 100 pomiarów wytrzymałości pewnego materiału, wyniki pomiarów zebrano w postaci szeregu rozdzielczego. Oszacować na *poziomie ufności* (1 – α) = 0.99 wytrzymałość tego materiału.

Wytrzymałość	Liczba pomiarów
96-98	6
98-100	25
100-102	50
102-104	15
104-106	4

Obliczenia $\overline{x}$ i s wygodnie jest przeprowadzić w formie tabelarycznej:

x_i	n_i	$\overline{x_i}$	$\overline{x_i} n_i$	$\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2$	$\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 n_i$
96-98	6	97	582	13.84	83.03
98-100	25	99	2475	2.96	73.96
100-102	50	101	5050	0.08	3.92
102-104	15	103	1545	5.20	77.98
104-106	4	105	420	18.32	73.27
Σ	**100**		**10072**		**312.16**

$\overline{x}$ i s wynoszą więc:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} \overline{x_i}\, n_i = \frac{10072}{100} = 100.72\,, \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 n_i - h^2/12} = \sqrt{\frac{312.16}{100} - \frac{4}{12}} \approx 1.67\,.$$

Przedział ufności, ze względu na duży rozmiar próby, wyznacza się w oparciu o rozkład normalny:

$$\alpha = 0.01 \quad \rightarrow \quad \varepsilon = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \approx 2.58.$$

Ostatecznie:

$$\left[\overline{x} - \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + \varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \approx [100.72 - 0.43, 100.72 + 0.43] = [100.29, 101.15].$$

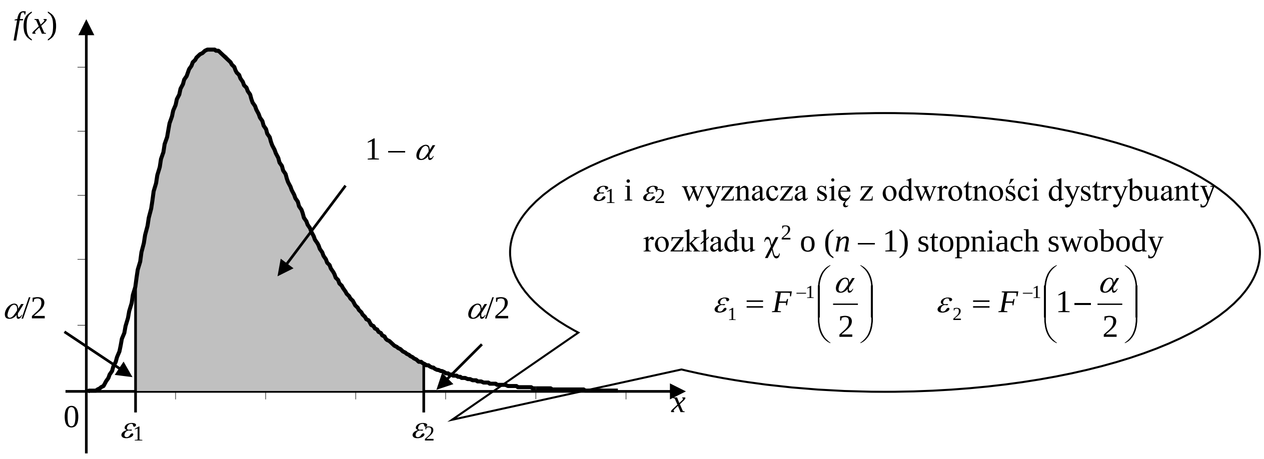
3.1.2. Przedział ufności dla σ, σ^2

Mały rozmiar próby

Przy szacowaniu *przedziału ufności* dla wariancji σ^2 wykorzystywana jest zmienna losowa:

$$V^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}, \qquad \text{gdzie:} \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Zmienna ta ma rozkład χ^2 o $(n-1)$ *stopniach swobody*.



Dla zmiennej tej definiowany jest *przedział ufności*:

$$P\left(\varepsilon_1 \le V^2 \le \varepsilon_2\right) = 1-\alpha.$$

Zwykle przyjmuje się, że:

$$P\left(V^2 < \varepsilon_1\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad P\left(V^2 > \varepsilon_2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Po przekształceniu zależności do postaci zgodnej z definicją:

$$P\left(\varepsilon_1 \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \varepsilon_2\right) = 1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_1}\right) = 1-\alpha,$$

otrzymuje się *przedział ufności*:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_2}, \frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_1}\right].$$

Przedział ufności dla σ otrzymuje się licząc $\sqrt{}$ z otrzymanych końców przedziałów dla wariancji σ^2.

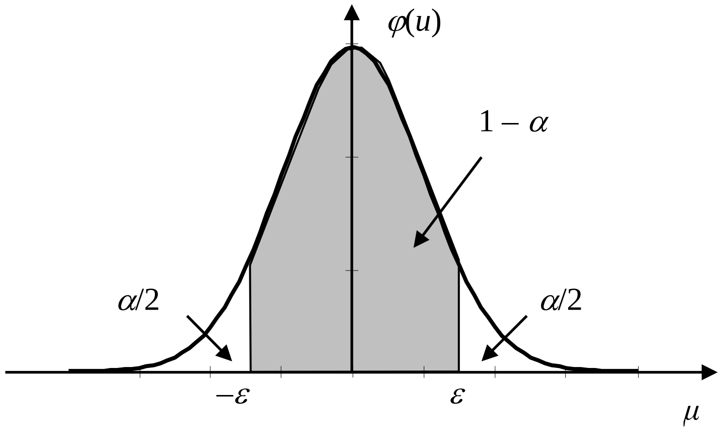
Duży rozmiar próby

W przypadku dużej próby *przedział ufności* dla σ można określić wykorzystując fakt, że rozkład s odchylenia z próby jest zbieżny do $\mathcal{N}(\sigma,\ \sigma/\sqrt{2n})$. Po utworzeniu unormowanej zmiennej (o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\ 1)$):

$$U=\frac{s-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}},$$

można zdefiniować symetryczny *przedział ufności*:

$$P(-\varepsilon\le U\le\varepsilon)=1-\alpha.$$



ε wyznacza się z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\varepsilon = -\,\Phi^{-1}(\alpha/2)$$

Po przekształceniu zależności do postaci zgodnej z definicją otrzymuje się kolejno:

$$P\left(-\varepsilon\le\frac{s-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}\le\varepsilon\right)=1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{s}{1+\varepsilon/\sqrt{2n}}\ \le\ \sigma\ \le\ \frac{s}{1-\varepsilon/\sqrt{2n}}\right)=1-\alpha.$$

Ostatecznie *przedział ufności* wynosi:

$$\left[\frac{s}{1+\varepsilon/\sqrt{2n}},\ \frac{s}{1-\varepsilon/\sqrt{2n}}\right].$$

Przedział ufności dla σ^2 otrzymuje się po podniesieniu do kwadratu końców przedziałów dla odchylenia σ.

Przykład 4.

Oszacować na poziomie ufności (1 – α) = 0.99 średni błąd kwadratowy σ pomiarów długości detalu z przykładu 1.

Przedział ufności ze względu na niewielki rozmiar próby (n=10) należy wyznaczyć posługując się zmienną o rozkładzie χ^2. Wielkości ε_1 i ε_2 wyznaczone dla *poziomu ufności* (1 – α) = 0.99 i 9 stopni swobody wynoszą:

$$\varepsilon_1 = F^{-1}_{\chi^2(9)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 1.73 \qquad \varepsilon_2 = F^{-1}_{\chi^2(9)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \approx 23.59 .$$

Błąd σ znajduje się z prawdopodobieństwem 0.99 w przedziale:

$$s \approx 1.996, \qquad \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_2}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_1}}\right] \approx [1.23,\ 4.55].$$

Przykład 5.

Oszacować na poziomie ufności (1 – α) = 0.99 średni błąd kwadratowy σ pomiarów wytrzymałości materiału z przykładu 3.

Przedział ufności ze względu na duży rozmiar próby (n=100) należy wyznaczyć posługując się zmienną o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\varepsilon = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 2.58, \qquad s \approx 1.67, \qquad \left[\frac{s}{1+\varepsilon/\sqrt{2n}},\ \frac{s}{1-\varepsilon/\sqrt{2n}}\right] \approx [1.41,\ 2.04].$$

3.1.3. Przedział ufności dla frakcji

Badania statystyczne mogą być prowadzone nie tylko ze względu na cechy mierzalne ale również na *niemierzalne (jakościowe)*. Jeżeli cecha jest niemierzalna to zamiast wartości liczbowej badanej cechy uzyskuje się tylko informację czy element populacji ma tą cechę czy nie. Elementy populacji tworzą więc dwie klasy: elementy wyróżnione (posiadające badaną cechę) i elementy niewyróżnione.

Podstawowe badania cech niemierzalnych dotyczą badań frakcji elementów wyróżnionych. Frakcja jest estymowana zależnością:

$$\hat{p} = \frac{m}{n},$$

gdzie: m – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n.

Frakcja $\hat{p}$ nazywana jest też *wskaźnikiem struktury*.

Wyznaczenie przydziału ufności dla frakcji w przypadku małej próby jest trudne. W przypadku dużej próby $(n \geq 100)$ rozkład frakcji z próby jest zbieżny do $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Przedział ufności konstruuje się tworząc unormowaną zmienną (o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$):

$$U = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}},$$

$$P(-\varepsilon \le U \le \varepsilon) = 1 - \alpha.$$

Po przekształceniu zależności do postaci zgodnej z definicją otrzymuje się kolejno:

$$P\left(-\varepsilon \le \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \le \varepsilon \right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le \hat{p} - p \le \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(\hat{p} - \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

Ostatecznie *przedział ufności* wynosi:

$$\left[\hat{p} - \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right].$$

Przykład 6.

Oszacować na poziomie ufności (1 – α) = 0.99 procent braków w wyprodukowanej partii produktów. Do badania wylosowana została próbka n=100 sztuk w której wykryto 16 produktów wadliwych.

Wielkość ε dla *poziomu ufności* $(1 - \alpha) = 0.99$ wynosi:

$$\varepsilon = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \approx 2.58,$$

a frakcja produktów wadliwych:

$$\hat{p} = \frac{m}{n} = \frac{16}{100} = 0.16\,.$$

Procent braków wyznaczony dla przyjętego poziomu ufności mieści się w przedziale:

$$\left[\hat{p} - \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + \varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \approx [0.16 - 0.094,\ 0.16 + 0.094] = [0.066,\ 0.254].$$

3.1.4. Przedziały ufności – podsumowanie

Lp.	*Parametr*	*Uwagi*	*Przedział ufności*	*Parametry*
1.	μ	znane σ	$\left[\bar{x}-\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$,	$\varepsilon=-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
2.	μ	nieznane σ duża próba	*jak w 1.*	$\sigma\approx S$ lub $\sigma\approx s$
3.	μ	nieznane σ mała próba	$\left[\bar{x}-\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\varepsilon\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\varepsilon=-F^{-1}_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
4.	σ	duża próba	$\left[\frac{s}{1+\varepsilon/\sqrt{2n}},\ \frac{s}{1-\varepsilon/\sqrt{2n}}\right]$	ε *jak w 1.*
5.	σ^2	duża próba	$\left[\left(\frac{s}{1+\varepsilon/\sqrt{2n}}\right)^2,\ \left(\frac{s}{1-\varepsilon/\sqrt{2n}}\right)^2\right]$	ε *jak w 1.*
6.	σ	mała próba	$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_2}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_1}}\right]$	$\varepsilon_1=F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\varepsilon_2=F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
7.	σ^2	mała próba	$\left[\frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_2},\ \frac{(n-1)s^2}{\varepsilon_1}\right]$	ε_1 i ε_2 *jak w 6.*
8.	p	duża próba	$\left[\hat{p}-\varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+\varepsilon\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$	$\hat{p}=\frac{m}{n}$, ε *jak w 1.*

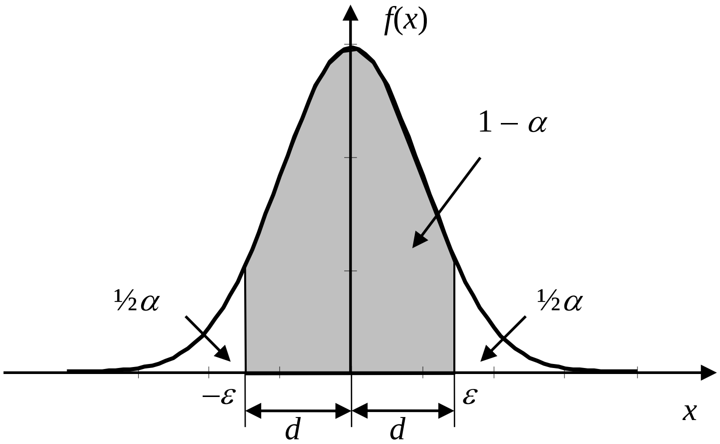
$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\ ,\ S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\ .$$

3.2. Wyznaczanie minimalnej liczby pomiarów

Przy szacowaniu przedziału ufności $\left[\theta^-, \theta^+\right]$ który z prawdopodobieństwem $(1 - \alpha)$ zawiera parametr θ:

$$P\left(\theta^- \le \theta \le \theta^+\right) = 1 - \alpha$$

zakłada się, że dane są wyniki próby o ustalonej liczebności n.



Wyznaczony przedział ufności ma określoną długość, załóżmy, że $2d$. Połowa długości tego przedziału (tzn. d) jest miarą ***maksymalnego błędu szacunku*** parametru θ. Dla ustalonej liczebności próby n maksymalny błąd szacunku może być na tyle duży, że dyskwalifikuje on wykorzystanie szacunku parametru θ.

Wzory na minimalną liczebność próby można uzyskać zakładając określoną wielkość maksymalnego błędu szacunku.

3.2.1. Minimalna liczebność próby przy szacowaniu μ

Znane odchylenie standardowe σ rozkładu lub duży rozmiar próby

Przedział ufności dla średniej ma postać:

$$\left[\bar{x} - \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Maksymalny błąd szacunku wynosi więc:

$$d = \varepsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Po przekształceniach otrzymuje się minimalną liczebność próby:

$$n = \left(\varepsilon\frac{\sigma}{d}\right)^2.$$

Uwaga! Wielkość otrzymaną z powyższego wzoru należy zaokrąglić w górę do najbliższej całkowitej.

Gdy odchylenie standardowe rozkładu nie jest znane ale próba jest duża, przyjmuje się, że:

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad \text{lub} \quad \sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}.$$

Nieznane odchylenie standardowe σ rozkładu i mały rozmiar próby

Przedział ufności dla średniej ma w tym przypadku postać:

$$\left[\bar{x} - \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Maksymalny błąd szacunku wynosi więc w tym przypadku:

$$d = \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}},$$

a minimalna liczebność próby:

wielkości należy zaokrąglić w górę

$$n = \left(\varepsilon \frac{s}{d}\right)^2.$$

Nieznane odchylenie standardowe σ – dwuetapowa procedura Steina

Odchylenie standardowe rozkładu nie jest znane – jest szacowane na podstawie małej wstępnej próby o liczebności n_0:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}.$$

Minimalną liczebność próby wyznacza się taj jak w punkcie poprzednim:

$$n = \left(\varepsilon \frac{s}{d}\right)^2.$$

Jeśli liczebność wstępnej próby spełnia zależność $n_0 \geq n$ to liczebność n_0 jest wystarczająca, w przeciwnym przypadku należy dolosować jeszcze $(n - n_0)$ elementów.

3.2.2. Minimalna liczebność próby przy szacowaniu frakcji p

Przedział ufności dla frakcji ma postać:

$$\left[\hat{p} - \varepsilon \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + \varepsilon \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

Maksymalny błąd szacunku wynosi więc:

$$d = \varepsilon \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

po przekształceniach otrzymuje się minimalną liczebność próby:

wielkość należy zaokrąglić w górę

$$n = \frac{\varepsilon^2\, \hat{p}(1-\hat{p})}{d^2}.$$

W sytuacji gdy nie można oszacować frakcji na podstawie próby, zakłada się najbardziej niekorzystny wariant:

$$\hat{p} = (1 - \hat{p}) = 0.5\,,$$

Minimalna liczebność próby wynosi w tym przypadku:

$$n = \frac{\varepsilon^2}{4d^2}\,.$$

wielkość należy zaokrąglić w górę

3.2.3. Minimalna liczebność próby – podsumowanie

Lp.	***Szacowanie***	***Uwagi***	***Minimalna liczebność***	***Parametry***
1.	$\boldsymbol{\mu}$	znane σ	$n = \left(\varepsilon \frac{\sigma}{d}\right)^2$	$\varepsilon = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
2.	$\boldsymbol{\mu}$	nieznane σ duża próba	*jak w 1.*	$\sigma \approx S$
3.	$\boldsymbol{\mu}$	nieznane σ mała próba	$n = \left(\varepsilon \frac{s}{d}\right)^2$	$\varepsilon = -F^{-1}_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
4.	$\boldsymbol{\mu}$	metoda Steina nieznane σ mała próba	*jak w 3.* *jeśli* $n_0 < n$ to *dolosować* $(n - n_0)$	ε *jak w 3.*
5.	$\boldsymbol{p}$	*można oszacować* $\hat{p}$	$n = \frac{\varepsilon^2\, \hat{p}(1-\hat{p})}{d^2}$	$\hat{p} = \frac{m}{n}$, ε *jak w 1.*
6.	$\boldsymbol{p}$	*nie można oszacować* $\hat{p}$, *przyjmuje się:* $\hat{p} = 0.5$	$n = \frac{\varepsilon^2}{4d^2}$	ε *jak w 1.*