5. MOC TESTU STATYSTYCZNEGO

W procesie weryfikacji hipotezy statystycznej uwzględniany jest *poziom istotności* α nazywany również prawdopodobieństwem popełnienia ***błędu I rodzaju***. Błąd ten polega na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa. Przy testowaniu hipotez można również popełnić ***błąd II rodzaju***. Błąd ten polega na nieodrzuceniu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa. Prawdopodobieństwo popełnienia ***błędu II rodzaju*** oznaczane jest jako β.

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	**Decyzja**	
	nie odrzucać H_0	**odrzucić H_0**
prawdziwa	*decyzja poprawna*	*błąd I rodzaju* α
fałszywa	*błąd II rodzaju* β	*decyzja poprawna*

Prawdopodobieństwo $(1-\beta)$ określające szanse na podjęcie poprawnej decyzji w przypadku gdy hipoteza zerowa jest fałszywa (tzn. odrzucenie hipotezy na rzecz hipotezy alternatywnej) jest nazywane ***mocą testu***. Moc testu statystycznego opisuje więc zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych. Istnieje ścisła zależność pomiędzy mocą testu a liczebnością próby na podstawie, której przeprowadzane jest badanie: zwiększanie liczebności próby prowadzi do zwiększania mocy testu. Związek pomiędzy mocą testu a liczebnością próby jest wykorzystywany na dwa sposoby:

1. dla określonej liczebności próby wyznaczana jest moc testu
   przyjmuje się, że moc testu powinna wynosić co najmniej 0.8, tzn. prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju nie może być wyższe niż 0.2, wartości te pozwalają na wykrywanie znaczących odchyleń od wartości postulowanych w hipotezie zerowej,
2. dla ustalonej wartości mocy testu wyznaczana jest niezbędna liczebność próby.

Zagadnienia związane z wyznaczaniem mocy testu zostaną szczegółowo omówione na poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Przedmiotem kontroli jest proces napełniania butelek wodą. Zakładając, że rozkład ilości wody jest rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym σ = 0.1, na poziomie istotności α = 0.01 należy sprawdzić czy istnieją dowody na to, że ilość wody w napełnianych butelkach jest mniejsza niż $\mu_0 = 1$.

W zadaniu należy więc zweryfikować *hipotezę zerową*

$$H_0\colon\ \mu = \mu_0,$$

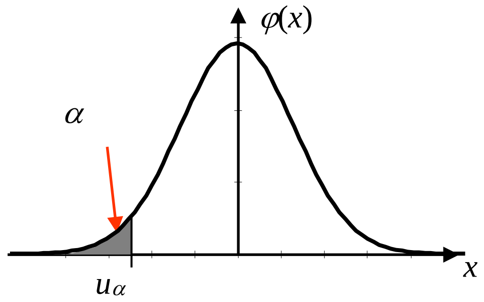
wobec *hipotezy alternatywnej* H_1: $\mu < \mu_0$.

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma/\sqrt{n})$ i do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest standaryzowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\ 1)$:

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}, \tag{1}$$

gdzie $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ – błąd standardowy średniej.

Obszar krytyczny wyznacza się więc korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$ (uwzględniając, że jest on w zadaniu obszarem lewostronnym):



$$u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0.01) \approx -2.33.$$

Otrzymana wartość graniczna u_α jest wartością standaryzowaną (została obliczona z rozkładu normalnego standaryzowanego $\mathcal{N}(0,1)$). Rzeczywistą wartość graniczną $\bar{x}_\alpha$ otrzymuje się wykorzystując zależność (1):

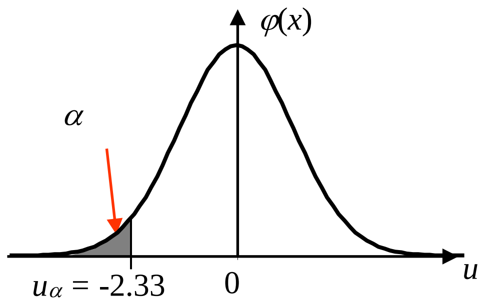
$$u_\alpha = \frac{\bar{x}_\alpha - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}.$$

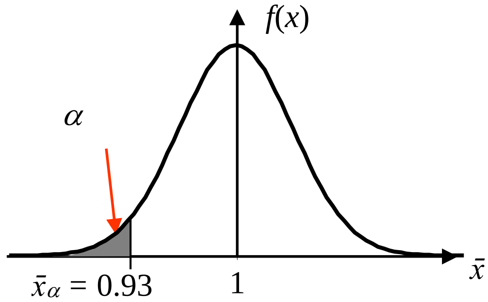
Po przekształceniach otrzymuje się:

$$\bar{x}_\alpha = u_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0.$$

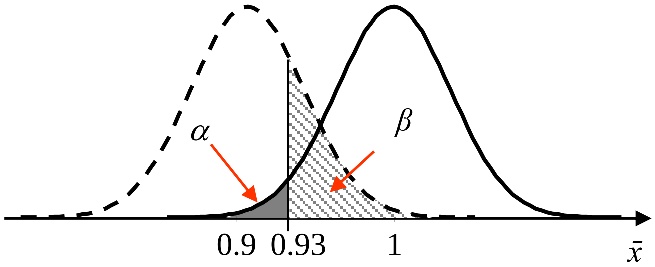
Zakładając, że do kontroli pobranych zostanie 10 butelek, średnia ilość wody w butelkach, która umożliwi odrzucenie hipotezy zerowej wynosi:

$$\bar{x}_\alpha = -2.33\frac{0.1}{\sqrt{10}} + 1 \approx 0.93.$$





Moc testu opisuje zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych. Załóżmy, że hipoteza zerowa jest fałszywa a rzeczywista średnia wynosi $\mu_1 = 0.9$. Prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej opisuje *błąd II rodzaju β*. Na poniższym rysunku linią ciągłą zaznaczony został rozkład średniej przy założeniu, że rzeczywista średnia wynosi $\mu = \mu_0$ (zgodnie z postawioną hipotezą H_0) a linią przerywaną rozkład średniej przy założeniu, że $\mu = \mu_1$.



Przy założeniu, że hipoteza zerowa jest fałszywa, test statystyczny pozwoli odrzucić tą hipotezę dla wartości średnich mniejszych od 0.93 (tzn. na lewo od brzegu obszaru krytycznego). Wartości większe od 0.93 doprowadzą do podjęcia błędnej decyzji nie pozwalając na odrzucenie fałszywej hipotezy zerowej. Przyjmując, że rzeczywista średnia ma wartość $\mu_1 = 0.9$ można wyznaczyć prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji, czyli prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju β*:

$$\beta = P(\bar{x} > \bar{x}_\alpha) = 1 - P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.93 - 0.9}{0.1/\sqrt{10}}\right) \approx 0.2 .$$

Moc testu czyli prawdopodobieństwo $(1-\beta)$ określające szanse na podjęcie poprawnej decyzji w przypadku gdy hipoteza zerowa jest fałszywa jest w tym przypadku akceptowalna i wynosi $(1-\beta) \approx 0.8$.

Dla rozważanego tutaj testu lewostronnego wzór na moc można po przekształceniach:

$$1 - \beta = P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{u_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right),$$

zapisać w postaci ogólnej jako:

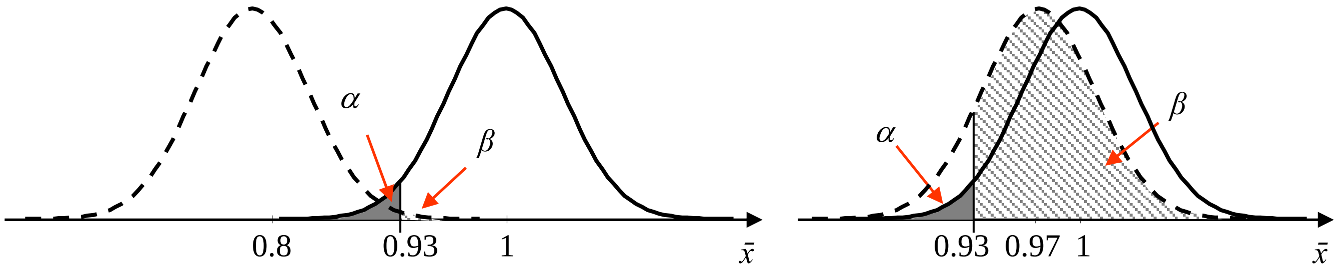
$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + u_\alpha\right), \text{ gdzie: } u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha). \quad (2)$$

Moc rozważanego w tym przykładzie testu przy założeniu, że rzeczywista średnia ma wartość $\mu_1 = 0.8$ byłaby bliska 1:

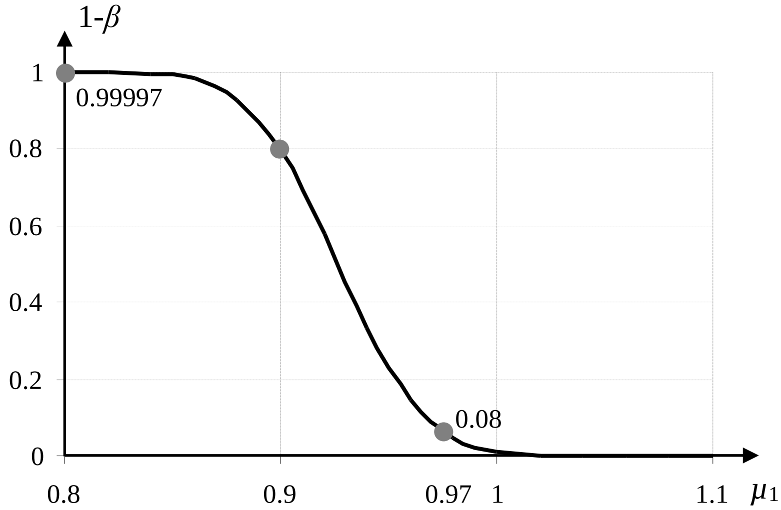
$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{1 - 0.8}{0.1/\sqrt{10}} - 2.33\right) \approx 1,$$

a w przypadku gdyby rzeczywista średnia znajdowała się w niewielkiej odległości od wartości postulowanej w hipotezie zerowej, np.: $\mu_1 = 0.97$, moc spadłaby poza dopuszczalne granice:

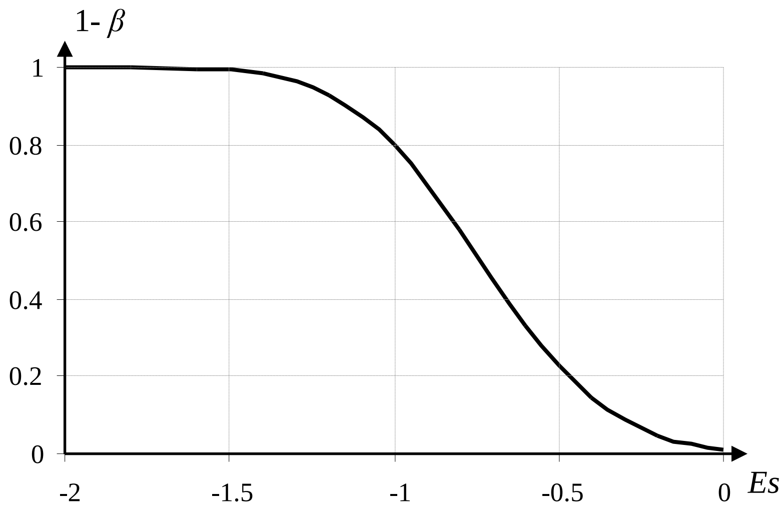
$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{1 - 0.97}{0.1/\sqrt{10}} - 2.33\right) \approx 0.08 .$$



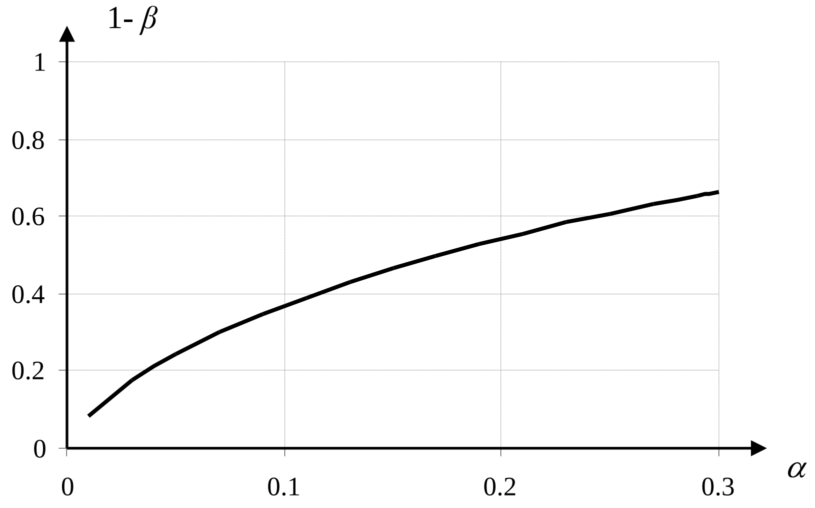
Zmiany mocy testu w zależności od rzeczywistej wartości średniej można przedstawić na wykresie. Wykres ten pokazuje, że im większa odległość rzeczywistej średniej μ_1 od weryfikowanej wartości μ_0 tym większa moc testu.



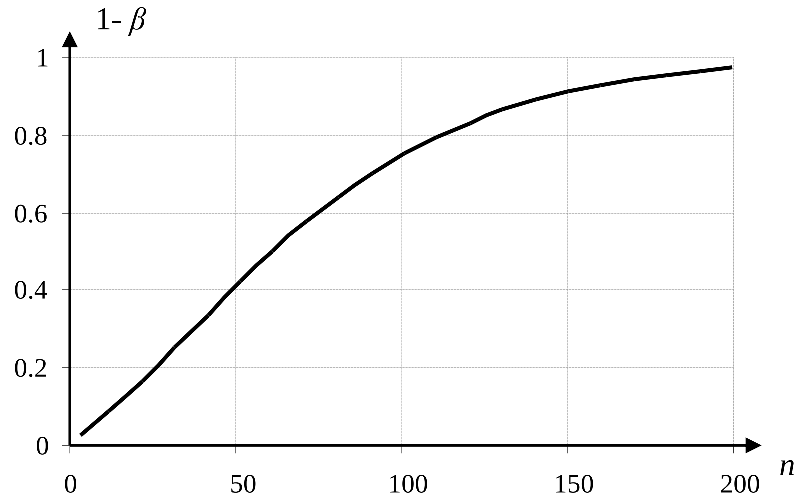
Wykres mocy jest również przedstawiany w funkcji ***efektu*** czyli różnicy pomiędzy wartością postulowaną w hipotezie zerowej a wartością postulowaną w hipotezie alternatywnej, w rozważanym przypadku efekt byłby definiowany jako $E = \mu_1 - \mu_0$. Na wykresach mocy często wykorzystywany jest ***efekt standaryzowany***, tzn. efekt wyrażony w jednostkach standaryzowanych. Żeby uniezależnić się od parametrów rozkładu w rozważanym przykładzie efekt należałoby wyrazić w jednostkach odchylenia standardowego tzn.: $Es = \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$. Z poniższego wykresu można więc wyciągnąć identyczne wnioski jak poprzednio: im większy co do wartości bezwzględnej efekt tym większa moc testu.



Wykres mocy kreślony jest również w funkcji *błędu I rodzaju* i w funkcji liczebności próby. W obydwu przypadkach moc testu jest funkcją rosnącą: moc rośnie wraz ze wzrostem poziomu istotności α, rośnie także wraz ze wzrostem liczebności próby.



Rys. Moc względem błędu I rodzaju ($\mu_1 = 0.97$*, tzn.* $Es = 0.3$*).*



Rys. Moc względem liczebności próby ($\mu_1 = 0.97$*, tzn.* $Es = 0.3$*).*

Związek pomiędzy mocą testu a liczebnością próby wykorzystywany jest na etapie planowania badania. Zakładając określoną wielkość efektu, który powinien być statystycznie istotny (tzn. powinien doprowadzić do odrzucenia hipotezy zerowej) i wysoką moc testu można oszacować liczebność próby przed wykonaniem badania. W rozważanym przypadku wzór na moc testu (2) należy przekształcić do postaci, która umożliwi wyznaczenie niezbędnej liczebność próby dla określonej wartości mocy:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + u_\alpha\right) \rightarrow \Phi^{-1}(1-\beta) = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + u_\alpha,$$

ostatecznie minimalna liczebność może być wyznaczona z zależności:

$$n = \left(\frac{u_{1-\beta} - u_\alpha}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2 \sigma^2 \text{ , gdzie: } u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta). \tag{3}$$

Przedstawiony wcześniej wykres mocy względem liczebności próby pokazuje, że planując badanie którego celem ma być wykazanie, że średnia ilość wody w napełnianych butelkach jest mniejsza od 1*l* o co najmniej 0.03*l* należy, przy założeniu mocy testu na poziomie 0.8, sprawdzić powyżej 110 butelek. Stosując wzór (3) można dokładniej oszacować liczebność próby:

$$n = \left(\frac{\Phi^{-1}(0.8) + 2.33}{1 - 0.97} \right)^2 0.1^2 \approx 111.5 .$$

Podobne rozważania można byłoby przeprowadzić dla testu prawostronnego. W tym przypadku moc testu wyrażałaby się wzorem:

$$1 - \beta = P(\bar{x} \geq \bar{x}_\alpha) = 1 - P(\bar{x} \leq \bar{x}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_{1_1}, \sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + u_{1-\alpha} \right) = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha} \right), \quad (4)$$

minimalną liczebność próby należałoby szacować jako:

$$n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \sigma^2 , \quad (5)$$

gdzie: $u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.

Uwzględniając zależność $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ można zapisać ogólne wzory dla testów lewo i prawostronnych, moc testu wyraża się zależnością:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha} \right), \quad (6)$$

minimalną liczebność próby można natomiast wyznaczyć jako:

$$n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \sigma^2 . \quad (7)$$

Dla testu dwustronnego moc testu jest sumą mocy testów lewo i prawostronnego na poziomie istotności równym połowie poziomu istotności dla testu dwustronnego:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2} \right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2} \right), \text{ gdzie: } u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2). \quad (8)$$

Minimalną liczebność próby wyznacza się z powyższej zależności pomijając składniki mniejsze od $\alpha/2$ (jeśli $\mu_1 < \mu_0$ to pomijana jest moc testu prawostronnego, w przeciwnym przypadku pomijana jest moc testu lewostronnego):

$$n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha/2}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \sigma^2 . \quad (9)$$

5.1. Weryfikacja hipotez dla średniej

Średnia z próby wykorzystywana podczas weryfikacji hipotez o wartości średniej w populacji μ ma rozkład zależny od posiadanej wiedzy o populacji.

5.1.1. Moc i rozmiar próby dla populacji o znanym odchyleniu standardowym

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma/\sqrt{n})$. Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}},$$

Moc i minimalną liczebność próby wyznacza się wykorzystując rozkład normalny tak jak to zostało pokazane w przedstawionym powyżej przykładzie.

Test	*Moc testu i minimalna liczebność próby*
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu < \mu_0$ $H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu > \mu_0$	$1-\beta = \Phi\left(\frac{\lvert\mu_1 - \mu_0\rvert}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha}\right),$ $n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu \neq \mu_0$	$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right),$ $n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha/2}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$

gdzie: $u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta)$, $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

5.1.2. Moc dla populacji o nieznanym odchyleniu standardowym

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$ przy czym nie jest znane odchylenie standardowe populacji σ to do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o $(n – 1)$ stopniach swobody:

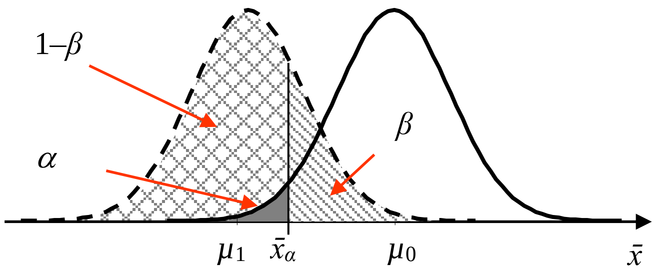
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}, \qquad s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}.$$

Podobnie jak w przykładzie 1. na początek zostanie wyznaczona moc dla testu lewostronnego. *Obszar krytyczny* wyznacza się w tym przypadku korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu *t – Studenta*:

$$t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha).$$

Moc testu to prawdopodobieństwo podjęcia prawidłowej decyzji w sytuacji gdy hipoteza zerowa jest fałszywa, w rozważanym przypadku moc jest więc równa prawdopodobieństwu przyjęcia przez rzeczywistą średnią wartości mniejszych od wartości granicznej $\bar{x}_\alpha$:

$$\bar{x}_\alpha = -t_{1-\alpha} s_{\bar{x}} + \mu_0 .$$



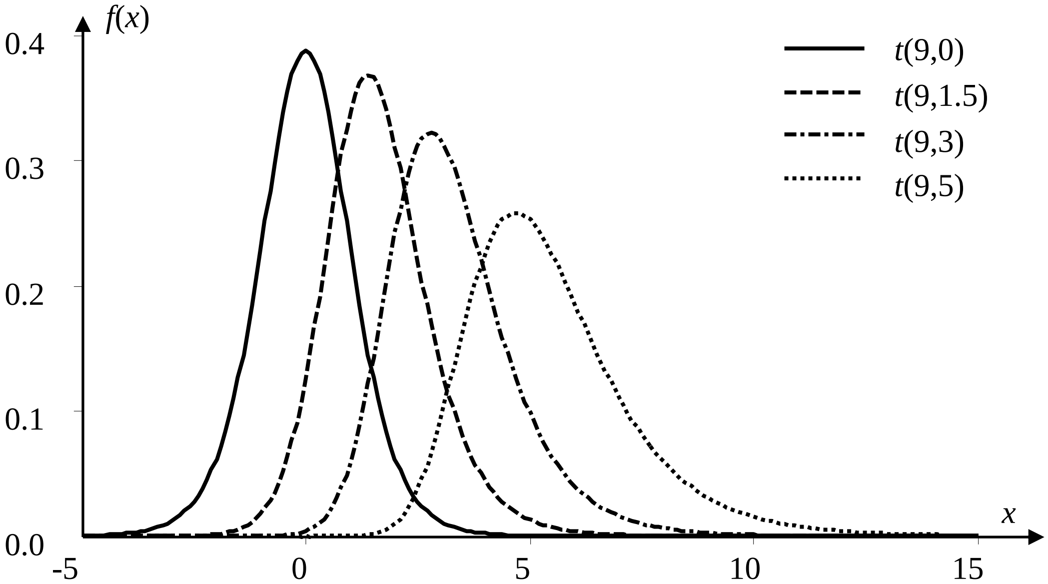
Moc testu wyznacza się z zależności:

$$1-\beta = P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = P(\bar{x} \le -t_{1-\alpha} s_{\bar{x}} + \mu_0) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \le -t_{1-\alpha}\right).$$

Zakładając, że rzeczywista średnia różni się od postulowanej w hipotezie zerowej wartości μ_0, statystyka $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}}$ ma niecentralny rozkład *t–Studenta* o (n – 1) stopniach swobody i parametrze niecentralności:

$$\delta = \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} .$$

Niecentralny rozkład *t–Studenta* uogólnia rozkład *t–Studenta* uwzględniając dodatkowy parametr δ nazywany niecentralnością. W przypadku gdy parametr niecentralności $\delta = 0$ rozkład niecentralny staje się rozkładem centralnym tzn. zwykłym rozkładem *t–Studenta*.



Rys. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa f(x) rozkładów t–Studenta o v=9 stopniach swobody i parametrze niecentralności δ równym 0, 1.5, 3 i 5.

Definicja zmiennej o rozkładzie t–Studenta	
rozkład centralny	***rozkład niecentralny***
$t = \dfrac{U}{\sqrt{\chi^2}}\sqrt{n}$	$t = \dfrac{U+\delta}{\sqrt{\chi^2}}\sqrt{n}$

gdzie: U – zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\,1)$; χ^2 – zmienna o rozkładzie χ^2 o n stopniach swobody; δ – parametr niecentralności, $v = n$ – liczba stopni swobody.

Niecentralny rozkład zmiennej $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}}$ można łatwo pokazać uwzględniając rzeczywistą średnią $\mu = \mu_1$ i odchylenie standardowe populacji σ:

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_1+\mu_1-\mu_0}{\sqrt{s_{\bar{x}}^2}} = \frac{\dfrac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}+\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}}{\sqrt{\dfrac{s^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}}} = \frac{\dfrac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}+\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}}{\sqrt{(n-1)\dfrac{s^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}}}\sqrt{n-1}\,.$$

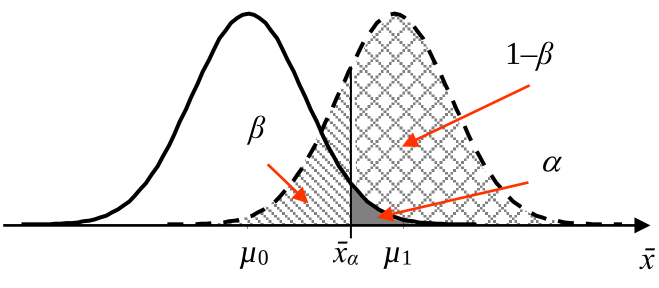
Zmienna $\dfrac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,\,1)$, zmienna $(n-1)\dfrac{s_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}$ rozkład χ^2 o $(n–1)$ stopniach swobody, zgodnie z definicją rozkład zmiennej $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}}$ jest niecentralnym rozkładem *t–Studenta* o $(n–1)$ stopniach swobody i parametrze niecentralności $\delta = \dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$. ■

Ostatecznie, moc testu lewostronnego wyznacza się z dystrybuanty niecentralnego rozkładu *t–Studenta*:

$$1-\beta = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \le -t_{1-\alpha}\right) = F_{t(n-1,\delta)}\left(-t_{1-\alpha}\right).$$

Podobnie wyznacza się moc testu prawostronnego:

$$1-\beta = P\left(\bar{x} \ge \bar{x}_\alpha\right) = P\left(\bar{x} \ge t_{1-\alpha}s_{\bar{x}}+\mu_0\right) = 1-P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \le t_{1-\alpha}\right) = 1-F_{t(n-1,\delta)}\left(t_{1-\alpha}\right).$$



Dla testu dwustronnego moc jest sumą mocy testów prawo i lewostronnego:

$$1-\beta = 1 - F_{t(n-1,\delta)}\left(t_{1-\alpha/2}\right) + F_{t(n-1,\delta)}\left(-t_{1-\alpha/2}\right).$$

Wyznaczenie minimalnej liczebności próby na podstawie powyższych zależności nie jest w tym przypadku tak proste jak w przypadku testów dla populacji o znanym odchyleniu standardowym. Moc testu jest zależna od liczebności próby poprzez parametr niecentralności oraz przez liczbę stopni swobody rozkładu *t–Studenta*. Zadanie znajdowania minimalnej liczebności próby może być rozwiązane poprzez iteracyjne powiększanie początkowego przybliżenia liczebności próby wyznaczanego na podstawie rozkładu normalnego.

Test	***Moc testu***
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu < \mu_0$	$1-\beta = F_{t(n-1,\delta)}\left(-t_{1-\alpha}\right)$
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu > \mu_0$	$1-\beta = 1 - F_{t(n-1,\delta)}\left(t_{1-\alpha}\right)$
$H_0:\ \mu = \mu_0$ $H_1:\ \mu \neq \mu_0$	$1-\beta = 1 - F_{t(n-1,\delta)}\left(t_{1-\alpha/2}\right) + F_{t(n-1,\delta)}\left(-t_{1-\alpha/2}\right)$

gdzie: $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha)$, $t_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha/2)$, $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, $\delta = \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$.

Przykład 2.

Zbadać moc testu z przykładu 1. przyjmując, że odchylenie standardowe populacji nie jest znane, odchylenie wyznaczone na podstawie próby wynosi $s = 0.1$ a rzeczywista średnia:

a) $\mu_1 = 0.9$, b) $\mu_1 = 0.8$, c) $\mu_1 = 0.97$.

Wykorzystując wzór dla testu lewostronnego otrzymuje się kolejno:

$$t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(9)}(1-0.01) \approx 2.82,$$

a) $\delta = \dfrac{0.9-1}{0.1/\sqrt{10}} \approx -3.16$, $1-\beta = F_{t(9,-3.16)}(-2.82) \approx 0.6389$,

b) $\delta = \dfrac{0.9-1}{0.1/\sqrt{10}} \approx -6.32$, $1-\beta = F_{t(9,-6.32)}(-2.82) \approx 0.9984$,

c) $\delta = \dfrac{0.97-1}{0.1/\sqrt{10}} \approx -0.95$, $1-\beta = F_{t(9,-0.95)}(-2.82) \approx 0.0654$.

W każdym w rozważonych przypadków moc testu jest niższa od mocy testu dla populacji o znanym odchyleniu standardowym.

5.2. Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji – próby niezależne

Podczas weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest statystyka opisująca różnicę pomiędzy średnimi. Rozkład statystyki jest zależny od posiadanej wiedzy o populacjach.

5.2.1. Moc i rozmiar próby dla populacji o znanych równych odchyleniach standardowych

Jeżeli populacje generalne mają rozkład odpowiednio: $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma)$ i $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe σ, do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$U = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{\Delta\bar{x} - \Delta}{\sigma_{\Delta\bar{x}}},$$

gdzie: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$ – obserwowana różnica średnich, $\Delta = \mu_A - \mu_B$ – postulowana różnica średnich, w przypadku weryfikacji hipotezy zerowej o równości średnich $\Delta_0 = 0$, $\sigma_{\Delta\bar{x}}$ – błąd standardowy różnicy średnich $\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$.

Dla testów jednostronnych obszar krytyczny wyznacza się odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:

$$u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Uwzględniając założenie o równości średnich $\Delta_0 = 0$ i fakt, że rzeczywista różnica średnich ma rozkład $\mathcal{N}(\Delta_0, \sigma_{\bar{x}})$ można wyznaczyć rzeczywistą granicę obszaru krytycznego testu lewostronnego:

$$\Delta_\alpha = -u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\bar{x}}.$$

Moc testu wyznacza się na podstawie różnicy średnich Δ_1 postulowanej w hipotezie alternatywnej:

$$1-\beta = P(\Delta_{\bar{x}} \le \Delta_\alpha) = F_{\mathcal{N}(\Delta_1, \sigma_{\Delta\bar{x}})}(\Delta_\alpha) = \Phi\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{-\Delta_1 - u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\bar{x}}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - u_{1-\alpha}\right),$$

Podobnie, dla testu prawostronnego $\Delta_\alpha = u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\bar{x}}$, moc testu otrzymuje się jako:

$$1-\beta = P(\Delta_{\bar{x}} \ge \Delta_\alpha) = 1 - P(\Delta_{\bar{x}} \le \Delta_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\Delta_{1}, \sigma_{\bar{x}})}(\Delta_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{-\Delta_1 + u_{1-\alpha}\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{\Delta_1}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha}\right).$$

Dla testów jednostronnych moc można opisać zależnością:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{|\Delta_1|}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha}\right),$$

w przypadku testu dwustronnego:

$$1-\beta = \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right).$$

Wyznaczając minimalne liczebności prób dla ustalonej mocy testu często przyjmuje się dodatkowe założenia: zakłada się stałą liczebność jednej z prób lub stałą wartość proporcji liczebności prób $k = n_A / n_B$.

Minimalne liczebności prób dla testów jednostronnych, przy założeniu stałej proporcji *k*, mogą być wyznaczone jako:

$$u_{1-\beta} = \frac{|\Delta_1|}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha} = \frac{|\Delta_1|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} - u_{1-\alpha} = \frac{|\Delta_1|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{kn_B}+\frac{1}{n_B}}} - u_{1-\alpha} = \frac{|\Delta_1|}{\frac{\sigma}{\sqrt{kn_B}}\sqrt{k+1}} - u_{1-\alpha},$$

stąd: $u_{1-\beta} + u_{1-\alpha} = \dfrac{|\Delta_1|\sqrt{kn_B}}{\sigma\sqrt{k+1}}$ i ostatecznie:

$$n_B = \frac{(k+1)\left(u_{1-\beta}+u_{1-\alpha}\right)^2\sigma^2}{k\Delta_1^2} \quad \text{i} \quad n_A = kn_B .$$

Podobnie dla testu dwustronnego, po pominięciu wyrazów mniejszych od $\alpha/2$ otrzymuje się:

$$n_B = \frac{(k+1)\left(u_{1-\beta}+u_{1-\alpha/2}\right)^2\sigma^2}{k\Delta_1^2} \quad \text{i} \quad n_A = kn_B .$$

Test	***Moc testu i minimalna liczebność próby***
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A < \mu_B$ $H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A > \mu_B$	$1-\beta = \Phi\left(\frac{\lvert\mu_A-\mu_B\rvert}{\sigma_{\bar{x}}} - u_{1-\alpha}\right),$ $n_B = \frac{(k+1)\left(u_{1-\beta}+u_{1-\alpha}\right)^2\sigma^2}{k\left(\mu_A-\mu_B\right)^2}, \quad n_A = kn_B$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A \neq \mu_B$	$1-\beta = \Phi\left(-\frac{\mu_A-\mu_B}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_A-\mu_B}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - u_{1-\alpha/2}\right),$ $n_B = \frac{(k+1)\left(u_{1-\beta}+u_{1-\alpha/2}\right)^2\sigma^2}{k\left(\mu_A-\mu_B\right)^2}, \quad n_A = kn_B$

gdzie: $u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta)$, $\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}$.

Przykład 3.

W celu sprawdzenia hipotezy, że czas obróbki pewnego elementu można skrócić przez zastosowanie innego typu materiału trącego wybrano losowo dwie próby. Przewidywany czas obróbki dla pierwszego materiału wynosi 12 minut a dla drugiego 9 minut. Jaka powinna być liczebność prób (zakładając, że próby powinny być równe) aby dla poziomu istotności α = 0.01 moc testu wynosiła 0.9? Należy przyjąć, że czas obróbki dla obydwu materiałów ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym 4 minuty.

W rozważanym przypadku należy zastosować test jednostronny. Z treści zadania wynika, że:

$$\mu_A = 12, \quad \mu_B = 9, \quad \sigma_A = \sigma_B = 4, \quad \alpha = 0.01, \quad 1-\beta = 0.9, \quad k = 1.$$

Minimalną liczebność prób otrzymuje się wyznaczając kolejno:

$$\mu_A - \mu_B = 3, \; u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-0.01) \approx 2.3263, \quad u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.2816,$$

$$n_B = \frac{2(1.2816 + 2.3263)^2 \cdot 4^2}{1 \cdot 3^2} \approx 46.2824, \quad n_A = n_B.$$

Otrzymany wynik wskazuje, że liczebność prób powinna wynosić $n_A = n_B = 47$. Dla tak postawionego zadania rzeczywista moc testu wynosi:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{3}{4\sqrt{1/47 + 1/47}} - 2.3263\right) \approx 0.9048.$$

Przykład 4.

Czas obróbki pewnego elementu z wykorzystaniem pewnego materiału trącego wynosi 12 minut. Należy pokazać, że zastosowanie nowego materiału skróci czas obróbki o 3 minuty. Zakładając, że liczebności prób wynoszą:

a) $n_A = n_B = 10$, b) $n_A = n_B = 25$, c) $n_A = n_B = 40$

wyznaczyć moc testu na poziomie istotności α = 0.01. Należy przyjąć, że czas obróbki obydwu materiałów ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym 4 minuty.

W rozważanym przypadku, tak jak poprzednio, należy zastosować test jednostronny. Z treści zadania wynika, że:

$$\mu_A - \mu_B = 3, \quad \sigma_A = \sigma_B = 4, \quad \alpha = 0.01, \quad k = 1,$$

$$u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-0.01) \approx 2.3263,$$

Moc testu wynosi więc:

a) $\sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/10 + 1/10} \approx 1.7889, \quad 1-\beta \approx 0.2581,$

b) $\sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/25 + 1/25} \approx 1.1314, \quad 1-\beta \approx 0.6275,$

c) $\sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/40 + 1/40} \approx 0.8944, \quad 1-\beta \approx 0.8480,$

5.2.2. Moc i rozmiar próby dla populacji o nieznanych ale równych odchyleniach standardowych

Jeżeli populacje generalne mają rozkład odpowiednio: $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$ i $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B)$ przy czym odchylenia standardowe populacji σ_A i σ_B nie są znane ale są równe ($\sigma_A = \sigma_B$), do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o ($n_A + n_B – 2$) stopniach swobody:

$$t = \frac{\left(\bar{x}_A - \bar{x}_B\right) - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{\Delta_{\bar{x}} - \Delta}{s_{\Delta\bar{x}}},$$

gdzie: $\Delta_{\bar{x}} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$ – obserwowana różnica średnich, $\Delta = \mu_A - \mu_B$ – postulowana różnica średnich, w przypadku weryfikacji hipotezy zerowej o równości średnich $\Delta_0 = 0$, $s_{\Delta\bar{x}}$ – błąd standardowy różnicy średnich $s_{\Delta\bar{x}} = s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$, $s = \sqrt{\frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1)}}$.

Dla testów jednostronnych obszar krytyczny wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu *t – Studenta*:

$$t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(n_A + n_B - 2)}(1 - \alpha).$$

Uwzględniając postulowaną w hipotezie zerowej równość średnich, rzeczywistą granicę obszaru krytycznego testu lewostronnego wyznacza się jako:

$$\Delta_\alpha = -t_{1-\alpha} s_{\Delta\bar{x}}.$$

Moc testu wyznacza się:

$$1 - \beta = P\left(\Delta_{\bar{x}} \le \Delta_\alpha\right) = P\left(\frac{\Delta_{\bar{x}}}{s_{\bar{x}}} \le -t_{1-\alpha}\right).$$

Statystyka $\frac{\Delta_{\bar{x}}}{s_{\bar{x}}}$ przy uwzględnieniu postulowanej w hipotezie alternatywnej różnicy średnich Δ_1 ma niecentralny rozkład *t–Studenta* o ($n_A + n_B – 2$) stopniach swobody i parametrze niecentralności: $\delta = \Delta_1 / \sigma_{\bar{x}}$, więc ostatecznie moc testu wynosi:

$$1 - \beta = P\left(\frac{\Delta_{\bar{x}}}{s_{\bar{x}}} \le -t_{1-\alpha}\right) = F_{t(n_A + n_B - 2, \delta)}\left(-t_{1-\alpha}\right).$$

Dla testu prawostronnego $\Delta_\alpha = t_{1-\alpha} s_{\Delta\bar{x}}$, moc testu wynosi więc:

$$1 - \beta = P\left(\Delta_{\bar{x}} \ge \Delta_\alpha\right) = 1 - P\left(\Delta_{\bar{x}} \le \Delta_\alpha\right) = 1 - P\left(\frac{\Delta_{\bar{x}}}{s_{\bar{x}}} \le t_{1-\alpha}\right) = 1 - F_{t(n_A + n_B - 2, \delta)}\left(t_{1-\alpha}\right).$$

Dla testu dwustronnego moc wyznacza się z zależności:

$$1 - \beta = F_{t(n_A + n_B - 2, \delta)}\left(-t_{1-\alpha/2}\right) + 1 - F_{t(n_A + n_B - 2, \delta)}\left(t_{1-\alpha/2}\right).$$

Test	Moc testu
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A < \mu_B$	$1-\beta = F_{t(n_A+n_B-2,\delta)}\left(-t_{1-\alpha}\right)$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A > \mu_B$	$1-\beta = 1-F_{t(n_A+n_B-2,\delta)}\left(t_{1-\alpha}\right)$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A \neq \mu_B$	$1-\beta = F_{t(n_A+n_B-2,\delta)}\left(-t_{1-\alpha/2}\right)+1-F_{t(n_A+n_B-2,\delta)}\left(t_{1-\alpha/2}\right)$

gdzie: $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha)$, $t_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha/2)$, $\delta = (\mu_A - \mu_B)/\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}}$.

Przykład 5.

Rozwiązać zadanie z przykładu 4. zakładając, że odchylenia standardowe populacji nie są znane ale są równe. Należy przyjąć, że poprzednie eksperymenty wskazują, że odchylenia standardowe wynoszą 4 minuty.
Z treści zadania wynika, że:

$$\mu_A - \mu_B = 3, \qquad \sigma = 4, \qquad \alpha = 0.01.$$

Moc testu wynosi więc:

a) $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(18)}(0.99) \approx 2.5524$, $\quad \sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/10+1/10} \approx 1.7889$, $\quad 1-\beta \approx 0.2197$,

b) $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(48)}(0.99) \approx 2.4066$ $\quad \sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/25+1/25} \approx 1.1314$, $\quad 1-\beta \approx 0.5989$,

c) $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(78)}(0.99) \approx 2.3751$ $\quad \sigma_{\Delta\bar{x}} = 4\sqrt{1/40+1/40} \approx 0.8944$, $\quad 1-\beta \approx 0.8338$.

5.3. Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji – próby zależne

Weryfikacja hipotezy, tak jak w punkcie poprzednim, sprowadza się do zbadania różnicy pomiędzy wyznaczonymi średnimi – test ten jest właściwie testem dla jednej średniej dla zmiennej reprezentującej różnicę pomiędzy pomiarami wykonanymi dwukrotnie w różnych warunkach, np. przed i po wprowadzeniu pewnej modyfikacji. Podobnie jak w przypadku weryfikacji hipotezy dla jednej średniej zakłada się, że zmienna reprezentująca różnice pomiędzy obserwacjami ma rozkład $\mathcal{N}(\mu_d,\ \sigma_d)$, średnia z różnic ma więc rozkład $\mathcal{N}(\mu_d,\ \sigma_d/\sqrt{n})$. Wzory na moc i minimalny rozmiar próby mają postać identyczną do tej wyprowadzonej w punkcie 5.1.

5.3.1. Moc i rozmiar próby dla populacji o znanym odchyleniu standardowym różnicy średnich

Test	*Moc testu i minimalna liczebność próby*
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A < \mu_B$ $H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A > \mu_B$	$1-\beta = \Phi\left(\frac{\lvert\mu_A - \mu_B\rvert}{\sigma_{\bar{d}}} - u_{1-\alpha}\right),$ $n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha}}{\mu_A - \mu_B}\right)^2 \sigma_d^2$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A \neq \mu_B$	$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{\bar{d}}} - u_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_B - \mu_A}{\sigma_{\bar{d}}} - u_{1-\alpha/2}\right),$ $n = \left(\frac{u_{1-\beta} + u_{1-\alpha/2}}{\mu_A - \mu_B}\right)^2 \sigma_d^2$

gdzie: $u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta)$, $\sigma_{\bar{d}} = \sigma_d / \sqrt{n}$.

5.3.2. Moc dla populacji o nieznanym odchyleniu standardowym różnicy średnich

Test	*Moc testu*
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A < \mu_B$	$1-\beta = F_{t(n-1,\delta)}(-t_{1-\alpha})$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A > \mu_B$	$1-\beta = 1 - F_{t(n-1,\delta)}(t_{1-\alpha})$
$H_0: \ \mu_A = \mu_B$ $H_1: \ \mu_A \neq \mu_B$	$1-\beta = 1 - F_{t(n-1,\delta)}(t_{1-\alpha/2}) + F_{t(n-1,\delta)}(-t_{1-\alpha/2})$

gdzie: $t_{1-\alpha} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha)$, $t_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha/2)$, $\sigma_{\bar{d}} = \sigma_d / \sqrt{n}$, $\delta = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{\bar{d}}}$, odchylenie standardowe różnicy średnich nie jest znane musi być więc szacowane na podstawie próby, zakładając, że wyznaczone zostały odchylenia z próby w warunkach przed i po wprowadzeniu modyfikacji tzn. s_A i s_B, odchylenie standardowe różnicy s_d może być szacowane jako:

$$s_d = \sqrt{s_A^2 + s_B^2 - 2 s_A s_B \rho},$$

gdzie: ρ - jest współczynnikiem korelacji pomiędzy pomiarami wykonanymi w pierwszych i drugich warunkach, Jeżeli $\rho = 1$ to pomiędzy pomiarami istnieje ścisła zależność liniowa, gdy $\rho = 0$ pomiary są niezależne, skorelowane, im wartość $|\rho|$ jest bliższa 1 tym korelacja pomiarów jest silniejsza.

Moc testu jest zależna od liczebności próby poprzez parametr niecentralności oraz przez liczbę stopni swobody rozkładu *t–Studenta*. Nie jest więc możliwe analityczne wyznaczenie minimalnej liczebności gwarantującej uzyskanie testu o określonej mocy.

Przykład 6.

Należy sprawdzić czy dla poziomu istotności $\alpha = 0.01$ eksperyment pozwoli na wykrycie różnicy równej 20 dla pomiarów twardości z użyciem dwóch różnych wgłębników. Z wcześniejszych eksperymentów wiadomo, że twardość detali otrzymywana dla pierwszego wgłębnika wynosi średnio 120 i ma odchylenie standardowe równe 10, twardość dla drugiego wgłębnika ma średnią 100 i odchylenie standardowe równe 5. Zakładając, że korelacja wyników pomiarów wynosi $\rho = 0.5$ należy wyznaczyć moc testu dla liczby doświadczeń:

a) $n = 10$ i b) $n = 5$.

Z treści zadania wynika, że:

$$\mu_A = 120, \quad \mu_B = 100, \quad s_A = 10, \quad s_B = 5, \quad \rho = 0.5, \quad \alpha = 0{,}01.$$

Odchylenie standardowe różnicy pomiarów s_d może być szacowane jako:

$$s_d = \sqrt{s_A^2 + s_B^2 - 2 s_1 s_2 \rho} = \sqrt{10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 0.5} \approx 8.6603.$$

Test zostanie przeprowadzony jako dwustronny. Rozwiążmy najpierw zadanie dla próby n = 10 elementowej, wartość krytyczna t wyniesie w tym przypadku:

$$t_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha/2) = F^{-1}_{t(9)}(1-0.005) \approx 3.2498,$$

odchylenie standardowe różnicy średnich i parametr niecentralności dla takiej próby wynoszą:

$$s_{\bar{d}} = s_d / \sqrt{n} \approx 2.7386, \qquad \delta = (\mu_A - \mu_B)/s_{\bar{d}} \approx \text{-}7.303.$$

Ostatecznie, moc testu w przypadku a) jest bliska jedności: $1-\beta \approx 0.9994$, w przypadku b) test nie jest już mocny: $1-\beta \approx 0.684$.

5.4. Weryfikacja hipotez o wariancji

Dla populacji generalnej o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ o nieznanej średniej i wariancji do weryfikacji hipotezy o wartości wariancji wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie χ^2 o $v = n - 1$ stopniach swobody (n – liczebność wylosowanej próby):

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}.$$

Dla testu lewostronnego obszar krytyczny wyznacza się jako: $\chi^2_\alpha = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$. Moc testu odpowiada prawdopodobieństwu odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej, więc:

$$1-\beta = P\left(\chi_0^2 \le \chi_\alpha^2\right) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right).$$

Jeżeli rzeczywista wariancja $\sigma^2 = \sigma_1^2$ różni się od postulowanej w hipotezie zerowej wartości $\sigma^2 = \sigma_0^2$, to statystyka $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ nie ma rozkładu χ^2, rozkład χ^2 ma natomiast statystyka: $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2}$.

Moc testu otrzymuje się po przekształceniach:

$$1-\beta = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2} \le \chi_\alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) = F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_\alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right).$$

Dla testu prawostronnego $\chi_{1-\alpha}^2 = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)$, moc wynosi więc:

$$1-\beta = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_{1-\alpha}^2\right) = 1-P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{1-\alpha}^2\right) = 1-P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2} \le \chi_{1-\alpha}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) = 1-F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{1-\alpha}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right).$$

Moc testu dwustronnego wynosi:

$$1-\beta = F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) + 1 - F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right).$$

Moc testu jest zależna od liczebności próby poprzez liczbę stopni swobody rozkładu χ^2. Zadanie znajdowania minimalnej liczebności próby nie jest więc zadaniem prostym.

Test	***Moc testu***
$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1:\ \sigma^2 < \sigma_0^2$	$1-\beta = F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_\alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)$
$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2$	$1-\beta = 1-F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{1-\alpha}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)$
$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1:\ \sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$1-\beta = F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) + 1 - F_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)$

gdzie: $\chi_\alpha^2 = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$, $\chi_{1-\alpha}^2 = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)$, $\chi_{\alpha/2}^2 = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(\alpha/2)$, $\chi_{1-\alpha/2}^2 = F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha/2)$.

Przykład 7.

Wariancja pomiarów pewnego miernika wynosi 2. Miernik ten zostanie zastąpiony nowym o ile znaleziony zostanie miernik o wariancji pomiarów równej 1.5. Zakładając, że liczebność prób wynosi:

a) $n = 10$, b) $n = 50$, c) $n = 100$.

należy na poziomie istotności α = 0.01 wyznaczyć moc testu który zostanie wykorzystany do zbadania nowego miernika, tzn.: $H_0 : \sigma^2 = 2$, $H_1 : \sigma^2 = 1.5$.

W rozważanym przypadku należy zastosować test lewostronny. Z treści zadania wynika, że:

$$\sigma_0^2 = 2, \qquad \sigma_1^2 = 1.5, \qquad \alpha = 0.01.$$

Moc testu wynosi więc:

a) $\chi^2_\alpha = F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.99) \approx 2.0879$, $1-\beta \approx 0.0277$,

b) $\chi^2_\alpha = F^{-1}_{\chi^2(49)}(0.99) \approx 28.9406$ $1-\beta \approx 0.1426$,

c) $\chi^2_\alpha = F^{-1}_{\chi^2(99)}(0.99) \approx 69.2299$ $1-\beta \approx 0.3303$.

5.5. Weryfikacja hipotez o równości wariancji dwóch populacji

Przy założeniu, że populacje generalne mają rozkład odpowiednio: $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$ i $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B)$ i nie są znane parametry tych rozkładów, do weryfikacji hipotezy o równości wariancji wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie ***F* Snedecora (Fishera)** o $v_A = n_A - 1$ i $v_B = n_B - 1$ (n_A, n_B – liczebności prób wylosowanych z obydwu populacji) stopniach swobody:

$$r = \frac{s_A^2}{s_B^2},$$

gdzie: oznaczenia populacji przyjmowane są w taki sposób, że: $s_A^2 > s_B^2$, w hipotezie zerowej postulowana jest równość wariancji tzn. $\sigma_A^2 / \sigma_B^2 = r_0 = 1$, w hipotezie alternatywnej zakłada się, że $\sigma_A^2 / \sigma_B^2 = r_1$.

Postać statystyki testowej r wynika z przyjętego założenia o równości wariancji obydwu populacji. W ogólnym przypadku, dla różnych wariancji zmienne:

$$\chi_A^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2}{\sigma_A^2}, \qquad \chi_B^2 = \frac{(n_B - 1)s_B^2}{\sigma_B^2},$$

mają rozkład χ^2 o $v_A = n_A - 1$ i $v_B = n_B - 1$ stopniach swobody. Zgodnie z definicją zmienna:

$$r = \frac{\chi_A^2}{v_A} : \frac{\chi_B^2}{v_B}$$

ma rozkład ***F* Snedecora (Fishera)** o $v_A = n_A - 1$ i $v_B = n_B - 1$ stopniach swobody. Zmienną tą można zapisać po przekształceniach jako:

$$r = \frac{\chi_A^2}{v_A} : \frac{\chi_B^2}{v_B} = \frac{(n_A - 1)s_A^2}{(n_A - 1)\sigma_A^2} : \frac{(n_B - 1)s_B^2}{(n_B - 1)\sigma_B^2} = \frac{s_A^2}{\sigma_A^2} : \frac{s_B^2}{\sigma_B^2} = \frac{s_A^2}{s_B^2}\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}.$$

Statystyka testowa $r = s_A^2 / s_B^2$ ma więc rozkład F tylko wtedy gdy wariancje obydwu populacji są równe.

Dla testu lewostronnego obszar krytyczny wyznacza się jako: $r_\alpha = F^{-1}_{F(n_A - 1, n_B - 1)}(\alpha)$. Moc testu odpowiada prawdopodobieństwu odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej, więc:

$$1 - \beta = P(r_0 \le r_\alpha) = P\left(\frac{s_A^2}{s_B^2} \le r_\alpha\right).$$

Dla fałszywej hipotezy zerowej statystyka $r = s_A^2/s_B^2$ nie ma rozkładu *F*. Moc testu można wyliczyć uwzględniając fakt, że rozkład *F* ma zmienna $r = \frac{s_A^2}{s_B^2}\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}$:

$$1-\beta = P(r_0 \le r_\alpha) = P\left(\frac{s_A^2}{s_B^2} \le r_\alpha\right) = P\left(\frac{s_A^2}{s_B^2}\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \le r_\alpha \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right) = F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_\alpha \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right).$$

Dla testu prawostronnego $r_{1-\alpha} = F^{-1}_{F(n_A-1,n_B-1)}(1-\alpha)$, moc wynosi więc:

$$1-\beta = 1-P(r_0 \ge r_{1-\alpha}) = 1-P\left(\frac{s_A^2}{s_B^2} \le r_{1-\alpha}\right) = 1-P\left(\frac{s_A^2}{s_B^2}\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \le r_{1-\alpha} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right) = 1-F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{1-\alpha} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right).$$

Moc testu dwustronnego wynosi:

$$1-\beta = F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{\alpha/2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right) + 1 - F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right).$$

Wyznaczanie minimalnej liczebności prób utrudnia zależność mocy testu od liczby stopni swobody rozkładu *F*.

Test	***Moc testu***
$H_0:\ \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1:\ \sigma_A^2 < \sigma_B^2$	$1-\beta = F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_\alpha \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right)$
$H_0:\ \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1:\ \sigma_A^2 > \sigma_B^2$	$1-\beta = 1-F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{1-\alpha} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right)$
$H_0:\ \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1:\ \sigma_A^2 \ne \sigma_B^2$	$1-\beta = F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{\alpha/2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right) + 1 - F_{F(n_A-1,n_B-1)}\left(r_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}\right)$

gdzie: $r_\alpha = F^{-1}_{F(n_A-1,n_B-1)}(\alpha)$, $r_{1-\alpha} = F^{-1}_{F(n_A-1,n_B-1)}(1-\alpha)$, $r_{\alpha/2} = F^{-1}_{F(n_A-1,n_B-1)}(\alpha/2)$, $r_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{F(n_A-1,n_B-1)}(1-\alpha/2)$.

Przykład 8.

Wariancja pomiarów pewnego miernika wynosi 2. Należy pokazać, że zastosowanie nowego miernika zmniejszy wariancję pomiarów o 50% – wariancja pomiarów nowego miernika musi wynosić więc 1. Zakładając, że liczebność prób wynosi:

a) $n = 10$, b) $n = 50$, c) $n = 100$.

należy na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ wyznaczyć moc testu statystycznego.

W rozważanym przypadku należy zastosować test prawostronny. Z treści zadania wynika, że:

$\sigma_A^2 = 2$, $\sigma_B^2 = 1$, $\alpha = 0.01$.

Moc testu wynosi więc:

a) $r_{1-\alpha} = F^{-1}_{F(9,9)}(0.99) \approx 5.3511 \qquad 1-\beta \approx 0.0794$,

b) $r_{1-\alpha} = F^{-1}_{F(49,49)}(0.99) \approx 1.9626 \qquad 1-\beta \approx 0.5262$,

c) $r_{1-\alpha} = F^{-1}_{F(99,99)}(0.99) \approx 1.6015 \qquad 1-\beta \approx 0.8647$.

5.6. Weryfikacja hipotez dla frakcji (wskaźnika struktury, procentu)

W przypadku dużej próby $(n \geq 100)$ rozkład frakcji z próby $\hat{p} = \frac{m}{n}$ (m – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n) jest zbieżny do $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Do weryfikacji hipotezy o frakcji wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$U = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}},$$

gdzie: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ – błąd standardowy frakcji.

Wzory na moc testu i minimalną liczebność próby wyprowadza się podobnie jak w przypadku testu dla średniej. Dla testów jednostronnych obszar krytyczny wyznacza się jako:

$$u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

W przypadku testu lewostronnego granicę obszaru krytycznego wyznacza wartość:

$$\hat{p}_\alpha = p_0 - u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0},$$

moc otrzymuje się po przekształceniach:

$$1-\beta = P(\hat{p} \leq \hat{p}_\alpha) = F_{\mathcal{N}(\hat{p}_1, \sigma_{\hat{p}_1})}(\hat{p}_\alpha) = \Phi\left(\frac{\hat{p}_\alpha - p_1}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right) = \Phi\left(\frac{p_0 - p_1 - u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right),$$

Dla testu prawostronnego granica obszaru krytycznego wynosi:

$$\hat{p}_\alpha = p_0 + u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0},$$

moc testu wynosi:

$$1-\beta = P(\hat{p} \geq \hat{p}_\alpha) = 1 - P(\hat{p} \leq \hat{p}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\hat{p}_1, \sigma_{\hat{p}_1})}(\hat{p}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p_1 + u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right) = \Phi\left(\frac{p_1 - p_0 - u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right)$$

Dla testu dwustronnego moc testu jest sumą mocy testów lewo i prawostronnego na poziomie istotności równym połowie poziomu istotności dla testu dwustronnego:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{p_0-p_1-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right)+\Phi\left(\frac{p_1-p_0-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right).$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się minimalną liczebność próby:

$$n=\left(\frac{u_{1-\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}+u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_1-p_0}\right)^2.$$

Podobnie jak w przypadku testu dla średniej pomijając we wzorze na moc składniki mniejsze od $\alpha/2$ otrzymuje się minimalną liczebność próby dla testu dwustronnego:

$$n=\left(\frac{u_{1-\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_1-p_0}\right)^2.$$

Test	*Moc testu i minimalna liczebność próby*
$H_0: \ p=p_0$ $H_1: \ p<p_0$ $H_0: \ p=p_0$ $H_1: \ p>p_0$	$1-\beta=\Phi\left(\frac{\lvert p_1-p_0\rvert-u_{1-\alpha}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right)$, $n=\left(\frac{u_{1-\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}+u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_1-p_0}\right)^2$
$H_0: \ p=p_0$ $H_1: \ p\neq p_0$	$1-\beta=\Phi\left(\frac{p_0-p_1-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right)+\Phi\left(\frac{p_1-p_0-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{p}_0}}{\sigma_{\hat{p}_1}}\right)$, $n=\left(\frac{u_{1-\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_1-p_0}\right)^2$.

gdzie: $u_{1-\alpha}=\Phi^{-1}(1-\alpha)$, $u_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $\sigma_{\hat{p}_0}=\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$, $\sigma_{\hat{p}_1}=\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}$, $u_{1-\beta}=\Phi^{-1}(1-\beta)$.

Przykład 9.

Wadliwość procesu produkcyjnego pewnego podzespołu wynosi 10%. Jaka powinna być liczebność próby dla poziomu istotności α = 0.01 aby wzrost wskaźnika wadliwości do poziomu 15% był wykrywany z mocą 0.8?

W rozważanym przypadku należy zastosować test prawostronny. Z treści zadania wynika, że:

$$p_0=0.1, \qquad p_1=0.15, \qquad \alpha=0.01, \qquad 1-\beta=0.8.$$

Minimalna liczebność próby wynosi więc:

$$u_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.3263, \quad u_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0.8) \approx 0.8416$$

$$n = \left(\frac{0.8416\sqrt{0.15 \cdot 0.85} + 2.3263\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}{0.15 - 0.1} \right)^2 \approx 399.$$

Rzeczywista moc testu dla próby o liczności $n = 399$ wynosi:

$$\sigma_{\hat{p}_0} = \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{399}} \approx 0.015, \qquad \sigma_{\hat{p}_1} = \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{399}} \approx 0.0179$$

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{|0.15 - 0.1| - 2.3263 \cdot 0.015}{0.0179} \right) \approx 0.8003.$$

5.7. Weryfikacja hipotez o równości frakcji dwóch populacji

Podczas weryfikacji hipotezy o równości frakcji wykorzystywana jest statystyka opisująca różnicę pomiędzy frakcjami. W przypadku gdy liczebności obydwu populacji są duże (≥100) do weryfikacji hipotezy o wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$U = \frac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - (p_A - p_B)}{\sigma_{\Delta\hat{p}}} = \frac{\Delta_{\hat{p}} - \Delta}{\sigma_{\Delta\hat{p}}},$$

gdzie: $\Delta_{\hat{p}} = \hat{p}_A - \hat{p}_B$ – obserwowana różnica frakcji, $\hat{p}_A = m_A / n_A$, $\hat{p}_B = m_B / n_B$, m_A – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n_A, m_B – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n_B, $\Delta = p_A - p_B$ – postulowana różnica frakcji, w przypadku weryfikacji hipotezy zerowej o równości frakcji $\Delta_0 = 0$, $\sigma_{\Delta\hat{p}}$ – błąd standardowy różnicy frakcji, w przypadku gdy hipoteza zerowa jest prawdziwa $\sigma_{\Delta\hat{p}}$ wyznacza się z zależności $\sigma_{\Delta\hat{p}} = \sigma_{\Delta\hat{p}_0} = \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$, $\bar{p} = \frac{m_A + m_B}{n_A + n_B}$, $n = \frac{n_A n_B}{n_A + n_B}$, w przypadku gdy hipoteza zerowa jest fałszywa (frakcje są różne) $\sigma_{\Delta\hat{p}}$ wyznacza się z zależności $\sigma_{\Delta\hat{p}} = \sigma_{\Delta\hat{p}_1} = \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{n_B}}$.

Dla testu lewostronnego granica obszaru krytycznego $\Delta_\alpha = -u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}$, moc testu wyznacza się więc jako:

$$1 - \beta = P(\hat{p}_A - \hat{p}_B \le \Delta_\alpha) = F_{\mathcal{N}(\Delta_1, \sigma_{\Delta\hat{p}_1})}(\Delta_\alpha) = \Phi\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_1}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}} \right) = \Phi\left(\frac{-\Delta_1 - u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}} \right),$$

dla testu prawostronnego $\Delta_\alpha = u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}$, moc testu wynosi więc:

$$1 - \beta = P(\hat{p}_A - \hat{p}_B \ge \Delta_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\Delta_1, \sigma_{\Delta\hat{p}_1})}(\Delta_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0} - \Delta_1}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}} \right) = \Phi\left(\frac{\Delta_1 - u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}} \right),$$

w przypadku testu dwustronnego moc wynosi:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{-\Delta_1-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}}\right)+\Phi\left(\frac{\Delta_1-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}}\right).$$

Wyznaczając minimalne liczebności prób dla ustalonej mocy testu często przyjmuje się dodatkowe założenia: zakłada się stałą liczebność jednej z prób lub stałą wartość proporcji liczebności prób $k=n_A/n_B$. Minimalne liczebności prób dla testu jednostronnego, przy założeniu stałej proporcji, mogą być wyznaczone z zależności:

$$n_B=\frac{\left(u_{1-\beta}\sqrt{p_A(1-p_A)+kp_B(1-p_B)}+u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{(p_Ak+p_B)(k+1-p_Ak-p_B)}{k+1}}\right)^2}{k\left(p_A-p_B\right)^2},\quad n_A=k\,n_B\,.$$

Uwaga! W teście dwustronnym wartość $u_{1-\alpha}$ należy zastąpić wartością $u_{1-\alpha/2}$.

Test	***Moc testu***
$H_0:\ p_A=p_B$ $H_1:\ p_A<p_B$ $H_0:\ p_A=p_B$ $H_1:\ p_A>p_B$	$1-\beta=\Phi\left(\frac{\lvert p_A-p_B\rvert-u_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}}\right)$
$H_0:\ p_A=p_B$ $H_1:\ p_A\neq p_B$	$1-\beta=\Phi\left(\frac{-(p_A-p_B)-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}}\right)+\Phi\left(\frac{(p_A-p_B)-u_{1-\alpha/2}\sigma_{\Delta\hat{p}_0}}{\sigma_{\Delta\hat{p}_1}}\right).$

gdzie: $u_{1-\alpha}=\Phi^{-1}(1-\alpha)$, $u_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $\sigma_{\Delta\hat{p}_0}=\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}$, $\overline{p}=(p_An_A+p_Bn_B)/(n_A+n_B)$,

$n=n_An_B/(n_A+n_B)$, $\sigma_{\Delta\hat{p}_1}=\sqrt{p_A(1-p_A)/n_A+p_B(1-p_B)/n_B}$. $u_{1-\beta}=\Phi^{-1}(1-\beta)$.

Przykład 10.

Wadliwość procesu produkcyjnego pewnego podzespołu dla dotychczasowej technologii wynosi 10%. Zakłada się, że po wprowadzeniu nowej technologii wadliwość spadnie do 5%. Należy określić minimalną liczebność prób (zakładając ich równość) niezbędną do odrzucenia hipotezy o równej wadliwości obydwu technologii z mocą 0.8 na poziomie istotności $\alpha=0.01$.

W rozważanym przypadku należy zastosować test dwustronny. Z treści zadania wynika, że:

$$p_A=0.1,\qquad p_B=0.05,\qquad \alpha=0.01,\qquad 1-\beta=0.8,\qquad k=1.$$

Minimalna liczebność prób wynosi:

$$u_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(0.995)\approx 2.5758,\qquad u_{1-\beta}=\Phi^{-1}(0.8)\approx 0.8416$$

$$n_A=n_B=\frac{\left(0.8416\sqrt{0.1\cdot 0.9+1\cdot 0.05\cdot 0.95}+2.5758\sqrt{\frac{(0.1\cdot 1+0.05)(1+1-0.1\cdot 1-0.05)}{1+1}}\right)^2}{1\cdot(0.1-0.05)^2}\approx 647\,.$$