9. JEDNOCZYNNIKOWA ANALIZA WARIANCJI

Jednoczynnikowa analiza wariancji wykorzystywana jest do sprawdzenia czy wybrana zmienna niezależna ma wpływ na zmienną zależną.

Załóżmy, że przeprowadzony został eksperyment wg. *planu randomizowanego kompletnego*. Plan taki zakłada, że:

- doświadczenia wykonywane są w losowej kolejności,
- wartości zmiennej niezależnej są z góry określone (liczba wartości jest uzależniona od rodzaju przeprowadzanego badania, wartości nazywane są poziomami, liczba poziomów może być dowolna).

poziom zmiennej niezależnej	*numer doświadczenia*			
	1	2	...	*r*
1				
2				
⋮				
a				

Dla wyników otrzymanych w eksperymencie można stworzyć model:

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}\,, \tag{1}$$

gdzie: y_{ij} – wynik j–tej powtórki doświadczenia przeprowadzonego na i–tym poziomie; μ_i – średnia wartość zmiennej wyjściowej dla i–tego poziomu; $i = 1\ldots a$; $j = 1\ldots r$; e_{ij} – błąd losowy zawierający wszystkie pozostałe składowe zmienności zmiennej wyjściowej (poza wpływem poziomu czynnika wejściowego), zakłada się, że $E(e_{ij}) = 0$ więc $E(y_{ij}) = \mu_i$.

Oznaczając przez μ ogólną średnią zmiennej wyjściowej a przez τ_i efekt i–tego poziomu czynnika:

$$\mu_i = \mu + \tau_i\,,$$

model (1) można zapisać jako:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}\,. \tag{2}$$

Dodatkowo, zakłada się, że błędy mają rozkład normalny o tej samej wariancji σ^2, tzn. $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$, a ze względu na to, że pomiary są przeprowadzane niezależnie również e_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi.

9.1. Jednoczynnikowa analiza wariancji – idea

Badanie istotności wpływu dla modelu (1) można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$

wobec hipotezy alternatywnej

H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ (co najmniej dla jednej pary (i, j)).

Test taki można przeprowadzić badając *całkowitą zmienność zmiennej zależnej* SS_T. Można pokazać, że zmienność tą można dekomponować na *zmienność wyjaśnioną przyjętym modelem* SS_τ (inaczej *zmienność międzygrupową*) i *zmienność niewyjaśnioną modelem* SS_e (inaczej *zmienność wewnątrzgrupową*). Wprowadzając oznaczenia:

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} y_{ij}, \qquad \bar{y}_i = \tfrac{1}{r} y_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}, \qquad \bar{\bar{y}} = \tfrac{1}{ar} y,$$

całkowita zmienność zmiennej zależnej SS_T, mierzona jako suma kwadratów odchyleń tej zmiennej od średniej wartości z wszystkich obserwacji (*ang. total sum of squares*), może być wyznaczona jako:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{\bar{y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{\bar{y}} + \bar{y}_i - \bar{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right) + \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r} 2\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right) =$$

$$= r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right).$$

Dodatkowo, uwzględniając że:

$$\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right) = \sum_{j=1}^{r} y_{ij} - \sum_{j=1}^{r}\bar{y}_i = y_i - r\bar{y}_i = y_i - y_i = 0,$$

otrzymuje się ostatecznie:

$$SS_T = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2.$$

Zmienność całkowitą dają więc dwa składniki:

- *zmienność wyjaśniona przyjętym modelem* SS_τ:

$$SS_\tau = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2, \tag{3}$$

- *zmienność niewyjaśniona modelem* SS_e:

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2. \tag{4}$$

Wariancja zmiennej zależnej może być szacowana zarówno w oparciu o zmienność wyjaśnioną SS_τ jak i zmienność niewyjaśnioną SS_e.

Wyniki doświadczeń przeprowadzonych na *i*–tym poziomie zmiennej niezależnej pozwalają na oszacowanie wariancji zmiennej zależnej dla tego poziomu:

$$s_i^2 = \tfrac{1}{r-1}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2 .$$

Wariancję całkowitą otrzymuje się obliczając średnią ważoną z wariancji obliczonych dla każdego z poziomów:

$$s^2 = \frac{(r-1)s_1^2 + (r-1)s_2^2 + \ldots + (r-1)s_a^2}{(r-1) + (r-1) + \ldots + (r-1)} .$$

Łatwo zauważyć, że wariancja całkowita zmiennej zależnej może być obliczona ze *zmienności niewyjaśnionej modelem* SS_e jako:

$$s^2 = \frac{SS_e}{a(r-1)} .$$

Zależność powyższa nazywana jest również średnim błędem kwadratowym MS_e (*ang. mean square terror*). Pokazuje się, że niezależnie od prawdziwości hipotezy o równości średnich:

$$E\left(MS_e\right) = \sigma^2 .$$

Wariancję całkowitą zmiennej zależnej można również szacować w oparciu o *zmienność międzygrupową*:

$$MS_\tau = \frac{SS_\tau}{a-1} = \frac{r\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y}_i - \overline{\overline{y}}\right)^2}{a-1} .$$

Jeżeli hipoteza o równości średnich $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$ jest prawdziwa to:

$$E\left(MS_\tau\right) = \sigma^2 ,$$

a jeżeli jest fałszywa to:

$$E\left(MS_\tau\right) = \sigma^2 + \frac{r}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\tau_i .$$

Istotność wpływu poziomu czynnika wejściowego można więc zbadać porównując wariancje: MS_τ i MS_e. Do porównania wykorzystywana jest zmienna:

$$F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1} \Big/ \frac{SS_e}{N-a} ,$$

gdzie: $N = ar$.

Jeżeli hipoteza zerowa H_0 o równości średnich (tzn. o braku istotności wpływu zmiennej niezależnej) jest:

- prawdziwa to zmienna $F = 1$,
- fałszywa to zmienna $F > 1$.

Test o równości średnich można więc zastąpić testem o równości wariancji, w teście tym wyznaczany jest prawostronny obszar krytyczny.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyki:

$$\frac{SS_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-a), \qquad \frac{SS_\tau}{\sigma^2} \sim \chi^2(a-1).$$

statystyka F ma więc rozkład F o $v_1 = (a-1)$ i $v_2 = (N-a)$ stopniach swobody, tzn.:

$$F \sim F(a-1, N-a).$$

Przykład 1.[*]

Należy zbadać wpływ mocy reaktora plazmowego na szybkość trawienia płytek krzemowych. Planując eksperyment zdecydowano o wyborze 4 poziomów mocy: 160, 180, 200 i 220W i 5 doświadczeń dla każdego z ustalonych poziomów mocy.

Po zaplanowaniu eksperymentu i ustaleniu[†] kolejności prowadzenia poszczególnych doświadczeń wyniki uzyskanych szybkości trawienia w [Å/*min*] zapisano w tablicy:

moc	*numer doświadczenia*				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
160	575_{13}	542_{14}	530_{08}	539_{05}	570_{04}
180	565_{18}	593_{09}	590_{06}	579_{16}	610_{17}
200	600_{07}	651_{19}	610_{10}	637_{20}	629_{01}
220	725_{02}	700_{03}	715_{15}	685_{11}	710_{12}

Rozwiązanie

$$y = 2756 + 2937 + 3127 + 3535 = 12355, \qquad \bar{\bar{y}} = 12355/(4 \cdot 5) = 617{,}75,$$

Zmienność wyjaśnioną i niewyjaśnioną wyznacza się jako:

$$SS_\tau = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 = 5\left((551{,}2-617{,}75)^2 + (587{,}4-617{,}75)^2 + \ldots + (707-617{,}75)^2\right) = 66870{,}55,$$

---

[*] Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley, 2012

[†] przygotowano w Excelu arkusz przypisując każdemu doświadczeniu losową liczbę, po uporządkowaniu liczb otrzymano kolejność doświadczeń, indeksy dolne w tablicy z wynikami odpowiadają uzyskanej kolejności przeprowadzania doświadczeń

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2 = (575 - 551{,}2)^2 + (542 - 551{,}2)^2 + \ldots + (685 - 707)^2 + (710 - 707)^2 = 5339{,}2,$$

Wartość statystyki testowej otrzymuje się po obliczeniach:

$$MS_e = SS_e/(N-a) \approx 5339{,}2/16 \approx 333{,}7, \qquad MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 66870{,}55/3 \approx 22290{,}18,$$

$$F_n = MS_\tau / MS_e = 22290{,}18/333{,}7 \approx 66{,}8\,,$$

Dla *poziomu istotności* $\alpha = 0{,}05$ granica *prawostronnego obszaru krytycznego* wynosi:

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24,$$

podobnie graniczny poziom istotności otrzymuje się jako:

$$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(66{,}8) \approx 2{,}88 \cdot 10^{-9}.$$

Wartość statystyki testowej leży wewnątrz *obszaru krytycznego* ($F_n > F_\alpha$) hipotezę H_0 należy więc odrzucić. Podobnie, przyjęty *poziom istotności* jest większy od *granicznego* ($\alpha > p$–*value*) – hipoteza H_0 musi zostać odrzucona na rzecz hipotezy alternatywnej.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że poziomy czynnika wejściowego w istotny sposób wpływają na wartość zmiennej zależnej.

9.2. Jednoczynnikowa analiza wariancji – sprawdzanie założeń

W analizie wariancji zakłada się, że błędy e_{ij} są <u>niezależnymi zmiennymi losowymi</u> o rozkładzie normalnym, tzn. $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$.

Sprawdzanie założeń analizy sprowadza się więc do kontroli:

- typu i niezależności rozkładu błędów,
- jednorodności wariancji (wariancje błędów na każdym poziomie eksperymentu powinny być równe).

Błędy e_{ij} nazywane są też ***resztami*** (*ang. residual*) i reprezentują różnice pomiędzy wartościami obserwowanymi y_{ij} a wartościami otrzymywanymi z wykorzystywanego modelu $\hat{y}_{ij}$:

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}\,.$$

Wartości $\hat{y}_{ij}$ szacują wartość obserwacji y_{ij} i są obliczane jako:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ij} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i \\ & \quad \overline{\overline{y}} + \left(\overline{y}_i - \overline{\overline{y}}\right) \\ & \quad \overline{y}_i\,. \end{aligned}$$

Kontrola założeń może być przeprowadzana graficznie:

- wykresy normalności (sprawdzanie założeń o normalności rozkładu),
- wykresy reszt w funkcji numeru doświadczenia (sprawdzanie niezależności),
- wykresy reszt w funkcji wartości przewidywanych z modelu (sprawdzanie jednorodności wariancji).

Przykład 1. cd. Po wyznaczeniu reszt

moc	*numer doświadczenia*					$\bar{y}_i$
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
160	575	542	530	539	570	551,2
180	565	593	590	579	610	587,4
200	600	651	610	637	629	625,4
220	725	700	715	685	710	707,0

moc	*reszty*				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
160	23,8	-9,2	-21,2	-12,2	18,8
180	-22,4	5,6	2,6	-8,4	22,6
200	-25,4	25,6	-15,4	11,6	3,6
220	18,0	-7,0	8,0	-22,0	3,0

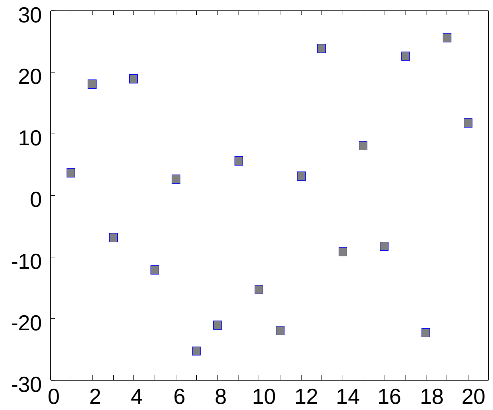
można narysować:

a) wykres normalności,

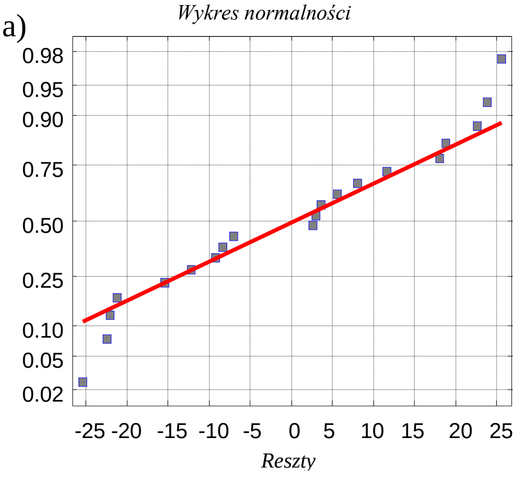
b) wykres reszt w funkcji numeru doświadczenia,

c) wykres reszt w funkcji wartości przewidywanych z modelu.

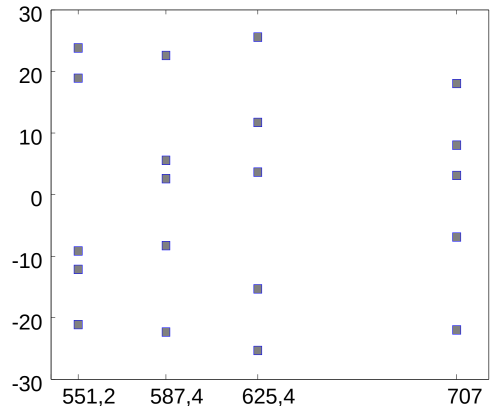
b)



a)



c)



Z analizy wykresów wynika, że:

a) rozkład reszt jest w przybliżeniu rozkładem normalnym,

b) nie widać wpływu kolejności przeprowadzania doświadczeń – założenie o niezależności błędów nie zostało naruszone (doświadczenia były przeprowadzane w losowej kolejności),

c) założenie o jednorodności wariancji zostało naruszone.

9.2.1. Sprawdzanie założeń: test Levene'a

Test Levene'a – test statystyczny wykorzystywany do sprawdzenia czy wariancja w próbach jest równa. Dla potrzeb testu wyznaczane są wartości bezwzględne odchyleń zmiennej zależnej od średnich grupowych:

$$d_{ij} = \left| y_{ij} - \bar{y}_i \right|.$$

Weryfikacja hipotezy o jednorodności wariancji sprowadza się do przeprowadzenia *analizy wariancji* dla zmiennej *d*. Wyznaczane są więc zmienności:

$$SS_\tau = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{d}_i - \bar{\bar{d}}\right)^2, \qquad MS_\tau = \frac{SS_\tau}{a-1},$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(d_{ij} - \bar{d}_i\right)^2, \qquad MS_e = \frac{SS_e}{N-a},$$

i wyznaczana jest statystyka *testowa Levene'a*:

$$F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1}\bigg/\frac{SS_e}{N-a}.$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy o jednorodności wariancji, powyższa zmienna ma rozkład *F* o $v_1 = (a-1)$ i $v2 = (N-a)$ stopniach swobody. Obszar krytyczny w teście wyznaczany jest jako prawostronny.

9.2.2. Sprawdzanie założeń: test Browna–Forsytha

Pomysł ***Levene'a*** zmodyfikowali **Brown i Forsyth**, którzy bezwzględne odchylenia zmiennej zależnej od średnich grupowych wyznaczyli w oparciu o *medianę* ($\tilde{y}_i$ *– mediana obserwacji na i–tym poziomie*):

$$d_{ij} = \left| y_{ij} - \tilde{y}_i \right|.$$

Uwaga! Uznaje się, że ***test Browna–Forsytha*** jest bardziej *odporny na odstępstwa od rozkładu normalnego*.

Przykład 1. test Levene'a

moc	d_{ij}					$\bar{d}_i$
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
160	23,8	9,2	21,2	12,2	18,8	17,04
180	22,4	5,6	2,6	8,4	22,6	12,32
200	25,4	25,6	15,4	11,6	3,6	16,32
220	18,0	7,0	8,0	22,0	3,0	11,60

Rozwiązanie

$\bar{d} = 23{,}8 + 9{,}2 + \ldots + 3{,}0 = 286{,}4,\qquad \bar{\bar{d}} = 286{,}4/(4 \cdot 5) = 14{,}32,$

Zmienność wyjaśnioną i niewyjaśnioną wyznacza się jako:

$$SS_\tau = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{d}_i - \bar{\bar{d}}\right)^2 = 5\left((17{,}04 - 14{,}32)^2 + \ldots + (11{,}6 - 14{,}32)^2\right) \approx 113{,}984,$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(d_{ij} - \bar{d}_i\right)^2 = (23{,}8 - 17{,}04)^2 + \ldots + (3 - 11{,}6)^2 \approx 1123{,}97,$$

Wartość statystyki testowej otrzymuje się po obliczeniach:

$$MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 113{,}984/3 \approx 37{,}99,\qquad MS_e = SS_e/(N-a) \approx 1123{,}97/16 \approx 70{,}25,$$

$$F_n = MS_\tau/MS_e = 37{,}99/70{,}25 \approx 0{,}54$$

Dla *poziomu istotności* $\alpha = 0{,}05$ granica *prawostronnego obszaru krytycznego* wynosi:

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24,$$

podobnie graniczny poziom istotności otrzymuje się jako:

$$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(0{,}54) \approx 0{,}66.$$

Wartość statystyki testowej leży poza *obszarem krytycznym* ($F_n < F_\alpha$) nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Podobnie, przyjęty *poziom istotności* jest mniejszy od *granicznego* (α < *p–value*) – hipoteza H_0 nie może zostać odrzucona.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji - założenie o jednorodności wariancji nie zostało więc naruszone.

Przykład 1. test Browna–Forsytha

moc	*numer doświadczenia*					$\tilde{y}_i$
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
160	575	542	530	539	570	542
180	565	593	590	579	610	590
200	600	651	610	637	629	629
220	725	700	715	685	710	710

moc	d_{ij}					$\bar{d}_i$
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
160	33	0	12	3	28	15,2
180	25	30	0	11	20	11,8
200	29	22	19	8	0	15,6
220	15	10	5	25	0	11,0

Rozwiązanie

$\bar{d} = 33 + 0 + \ldots + 25 + 0 = 268,$ $\qquad \bar{\bar{d}} = 286{,}4/(4 \cdot 5) = 13{,}4,$

Zmienność wyjaśnioną i niewyjaśnioną wyznacza się jako:

$$SS_\tau = r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{d}_i - \bar{\bar{d}}\right)^2 = 5\left((15{,}2 - 13{,}4)^2 + \ldots + (11 - 13{,}4)^2\right) \approx 82{,}0,$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(d_{ij} - \bar{d}_i\right)^2 = (33 - 15{,}2)^2 + \ldots + (0 - 11)^2 \approx 2232{,}8,$$

Wartość statystyki testowej otrzymuje się po obliczeniach:

$$MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 82/3 \approx 27{,}33 \qquad MS_e = SS_e/(N-a) \approx 2232{,}8/16 \approx 139{,}55,$$

$$F_n = MS_\tau / MS_e = 27{,}33/139{,}55 \approx 0{,}196.$$

Dla *poziomu istotności* $\alpha = 0{,}05$ granica *prawostronnego obszaru krytycznego* wynosi:

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24,$$

podobnie graniczny poziom istotności otrzymuje się jako:

$$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(0{,}196) \approx 0{,}898,$$

Wyniki testu *Browna–Forsytha* są w tym przypadku identyczne jak w przypadku testu *Levene'a*, tzn.: wartość statystyki testowej leży poza *obszarem krytycznym* ($F_n < F_\alpha$), przyjęty *poziom istotności* jest mniejszy od *granicznego* (α < *p–value*) – hipoteza H_0 nie może zostać odrzucona, czyli nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji.

9.3. Testy post-hoc

Testy post–hoc *(po fakcie)* wykonywane są po stwierdzeniu istotności wpływu zmiennej niezależnej na zmienną zależną. Celem testów jest określenie, które poziomy zmiennej zależnej różnią się od siebie w sposób istotny.

Badanie istotności można weryfikując *hipotezy parametryczne* postaci:

$$H_0\colon \mu_i = \mu_j \qquad H_1\colon \mu_i \neq \mu_j, \tag{5}$$

Testy takie powinny być jednak stosowane tylko pod warunkiem, że były wykonane tylko dwie próby – ***testy post-hoc*** biorą pod uwagę fakt, że pobranych zostało więcej prób. Najprostszym testem z tej grupy jest ***test NIR Fishera.***

9.3.1. Testy post-hoc – test NIR Fishera

Test NIR Fishera *(test Najmniej Istotnych Różnic, ang. LSD – Least Significant Difference).* W teście do weryfikacji hipotezy o równości średnich μ_i oraz μ_j wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t - Studenta* o ($N - a$) stopniach swobody:

$$t = \frac{\overline{y}_i - \overline{y}_j}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}}.$$

W teście wariancja zmiennej zależnej szacowana jest w oparciu o wyniki wszystkich prób (w obliczeniach wykorzystywany jest średni błąd kwadratowy MS_e) a nie tylko w oparciu o wyniki pomiarów otrzymane dla poziomów i–tego i j–tego.

Test NIR Fishera nie uwzględnia jednak korekty poziomu α. Zakładając, że do przeprowadzenia jest c testów postaci (5), prawdopodobieństwo, że żaden z testów z testów nie odrzuci hipotezy zerowej wyniesie:

$$(1 - \alpha)^c$$

prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, tzn. odrzucenia hipotezy zerowej w co najmniej jednym teście, wynosi więc:

$$1-(1 - \alpha)^c.$$

Błąd I rodzaju przy takim sposobie analizy jest więc większy od błędu dla pojedynczego testu, stosowane mogą być różne korekty poziomu α, korekta poziomu α przeprowadzana jest np. w ***teście Bonferroniego***.

9.3.2. Testy post-hoc – test Bonferroniego

Test Bonferroniego koryguje poziom α dla pojedynczego porównania odwrotnie proporcjonalnie do liczby wszystkich par testów c, które można byłoby przeprowadzić:

$$\frac{\alpha}{c}.$$

Przykład 1. cd. testy post-hoc

Należy zbadać czy szybkość trawienia płytek uzyskana dla mocy 160W różni się istotnie od szybkości uzyskanej dla mocy 180W.

moc	*numer doświadczenia*					$\bar{y}_i$
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
160	575	542	530	539	570	551,2
180	565	593	590	579	610	587,4
200	600	651	610	637	629	625,4
220	725	700	715	685	710	707,0

Test NIR Fishera

$$t_n = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}} = \frac{551{,}2 - 587{,}4}{\sqrt{\frac{2}{5} 333{,}7}} \approx -3{,}13,$$

Dla *poziomu istotności* $\alpha = 0{,}05$ otrzymuje się granice obszaru krytycznego:

$$t_\alpha = F_{t(16)}^{-1}(0{,}05/2) \approx -2{,}12,$$

oznacza to, że wartość statystyki testowej leży wewnątrz *obszaru krytycznego* ($t_n < t_\alpha$) hipotezę zerową o braku istotności należy więc odrzucić. Podobnie, *poziom istotności* α jest większy od *granicznego*:

$$p - value = 2\, F_{t(16)}(t_n) \approx 0{,}0064,$$

hipoteza zerowa musi zostać odrzucona na rzecz hipotezy alternatywnej. Z przeprowadzonej analizy wynika, że moce generatora plazmowego: 160W i 180W dają istotnie różne szybkość trawienia płytek.

Test Bonferroniego

W przypadku analizowanego eksperymentu można wykonać 6 testów:

1. H_0: $\mu_{160} = \mu_{180}$ H_1: $\mu_{160} \neq \mu_{180}$,

2. H_0: $\mu_{160} = \mu_{200}$ H_1: $\mu_{160} \neq \mu_{200}$,

3. H_0: $\mu_{160} = \mu_{220}$ H_1: $\mu_{160} \neq \mu_{220}$,

4. H_0: $\mu_{180} = \mu_{200}$ H_1: $\mu_{180} \neq \mu_{200}$,

5. H_0: $\mu_{180} = \mu_{220}$ H_1: $\mu_{180} \neq \mu_{220}$,

6. H_0: $\mu_{200} = \mu_{220}$ H_1: $\mu_{200} \neq \mu_{220}$.

Test *Bonferroniego* będzie więc korygował poziom α dla pojedynczego porównania uwzględniając, że liczba wszystkich par testów wynosi w tym przypadku $c = 6$, tzn. w teście tym poziom α będzie przyjmowany jako:

$$\alpha = \frac{0{,}05}{c} \approx 0{,}0083\,.$$

Granica obszaru krytycznego dla tak dobranego α wynosi:

$$t_{\alpha} = F^{-1}_{t(16)}(0{,}0083/2) \approx -3{,}008,$$

Oznacza to, że otrzymana wartość statystyki testowej $t_n \approx -3{,}13$ leży wewnątrz obszaru krytycznego, podobnie *graniczny poziom istotności*:

$$p-value = c(p-value)_{NIR} = 0{,}0385,$$

jest mniejszy od poziomu α, więc tak jak w przypadku testu *NIR Fishera* hipoteza o braku istotności wpływu mocy generatora na szybkość trawienia płytek musi zostać odrzucona.