Dobór funkcji regresji

Funkcja regresji powinna w możliwie jak największym stopniu wyjaśniać zmienność zmiennej zależnej, jednocześnie jednak powinna mieć możliwie najprostszą strukturę. Dobór modelu funkcji regresji nie jest sprawą prostą, stosowane są różne strategie.

Regresja krokowa

Pozwala na sekwencyjny dobór zmiennych podczas konstruowania funkcji regresji, stosowane są dwa podejścia:

- selekcja postępująca

  konstruowanie modelu rozpoczyna się od jednej zmiennej niezależnej, w kolejnych krokach dodawane są kolejne zmienne,

- eliminacja wsteczna

  poszukiwanie optymalnego modelu rozpoczyna się od modelu maksymalnego a w kolejnych krokach kolejno usuwane są zmienne o najmniejszym wpływie na zmienną zależną, proces eliminacji kończy się gdy w modelu występują wyłączne zmienne, które w istotny sposób wyjaśniają zmienność zmiennej zależnej.

W regresji krokowej wprowadzanie lub usuwanie zmiennych odbywa się w oparciu o progowe wartości poziomów istotności współczynników modelu lub w oparciu o wartości progowe tzw. ***cząstkowego testu F*** – proces uzupełniania modelu kończy się gdy nie można znaleźć zmiennej spełniającej nałożone warunki. Jeżeli istnieje kilka zmiennych które można dodać (usunąć) z modelu wybierana jest zmienna dającą największy poziom istotności współczynnika lub testu *F* (przy usuwaniu: zmienna o najmniejszym poziomie istotności lub najmniejszej wartości testu *F*).

Funkcję regresji można zapisać w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}, \tag{1}$$

W celu zbadania czy wkład określonego zbioru zmiennych jest istotny, wektor współczynników modelu i macierz wejść są rozdzielane w sposób następujący:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2\end{bmatrix} + \mathbf{e}, \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ to kolumny macierzy $\mathbf{X}$ odpowiadające współczynnikom $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$.

Zmienne uznaje się za istotne jeżeli związane z nimi współczynniki są istotnie różne od zera. Istotność współczynników bada się testując hipotezę o ich braku istotności:

H_0: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$

wobec hipotezy alternatywnej:

H_1: $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$.

Jeżeli współczynniki $\mathbf{b}_1$ nie są istotne, model (1) redukuje się do postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}, \tag{3}$$

Modele (1) i (2) to tzw. *modele pełne*, model (3) to *model zredukowany* lub *częściowy*.

Jakość dopasowania funkcji regresji: model pełny i zredukowany

Dopasowanie danych empirycznych do modelu można mierzyć wielkością błędu SS_e – im mniejszy błąd tym lepsze dopasowanie. Błędy dla modeli pełnego $SS_e(\mathbf{b})$ i zredukowanego $SS_e(\mathbf{b}_2)$ spełniają zależność:

$$SS_e(\mathbf{b}) \leq SS_e(\mathbf{b}_2)^*.$$

**Własność ta jest konsekwencją metody wyznaczania współczynników regresji – współczynniki te wyznaczane są w taki sposób aby minimalizować błąd SS_e, minimalizacja błędu na większej dziedzinie $SS_e(\mathbf{b})$ nie może dać gorszego wyniku niż minimalizacja na błędu na podzbiorze tej dziedziny $SS_e(\mathbf{b}_2)$ – znalezione zostanie rozwiązanie dające błąd taki sam lub mniejszy.*

Wnioski

Uzupełnianie modelu o kolejne zmienne prowadzi do:

- zmniejszania błędu SS_e,
- zwiększania wartości SS_r**(*zmienności wyjaśnionej modelem)*

***Zmienność całkowita zmiennej zależnej SS_T jest niezależna od przyjętego modelu, więc skoro zachodzi zależność $SS_T = SS_r + SS_e$ to zmniejszanie wartości błędu SS_e prowadzi do zwiększania wartości SS_r.*

Dekompozycja *całkowitej zmienności zmiennej zależnej* SS_T dla modelu pełnego oznacza, że:

$$SS_T = SS_r(\mathbf{b}) + SS_e(\mathbf{b}),$$

a dla modelu zredukowanego:

$$SS_T = SS_r(\mathbf{b}_2) + SS_e(\mathbf{b}_2),$$

Zmienność całkowita w przypadku redukcji modelu nie ulega zmianie, więc:

$$SS_T = SS_r(\mathbf{b}) + SS_e(\mathbf{b}) = SS_r(\mathbf{b}_2) + SS_e(\mathbf{b}_2).$$

Ocenę wpływu dodatkowych zmiennych umożliwia tzw. *dodatkowa suma kwadratów* (*ang. extra sum of squares*) definiowana jako:

$$SS_r(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2) = SS_r(\mathbf{b}) - SS_r(\mathbf{b}_2) = SS_e(\mathbf{b}_2) - SS_e(\mathbf{b}),$$

gdzie: $SS_r(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)$ *to zmienność wyjaśniona równaniem regresji po wprowadzeniu współczynników* $\mathbf{b}_1$ *pod warunkiem, że model zawierał już współczynniki* $\mathbf{b}_2$, zmienna $SS_r(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)$ *ma k stopni swobody (k to liczba współczynników w wektorze* $\mathbf{b}_1$).

Do przeprowadzenia testu istotności współczynników $\mathbf{b}_1$ wykorzystuje się, statystykę F_p:

$$F_p = \frac{SS_r(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)}{k} \Big/ \frac{SS_e(\mathbf{b})}{n-p-1} = \frac{SS_r(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)/k}{MS_e(\mathbf{b})}.$$

Przykład 1. Celem badań doświadczalnych jest określenie funkcji obiektu badań $\hat{y} = f(x_1, x_2)$ przy założeniu, że:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2, \qquad 1 \le x_1 \le 3, \qquad 0 \le x_2 \le 4.$$

Planując eksperyment zdecydowano o przeprowadzeniu 9 doświadczeń: po jednym na poziomie minimalnym maksymalnym i pośrednim dla każdej zmiennej wejściowej.

Funkcja obiektu będzie skonstruowana z wykorzystaniem regresji krokowej postępującej.

Lp.	x_1	x_2	y
1	1	0	2
2	1	2	8
3	1	4	18
4	2	0	4
5	2	2	8
6	2	4	20
7	3	0	5
8	3	2	8
9	3	4	22

Krok 0. model: $\hat{y} = b_0$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 4 \\ 8 \\ 20 \\ 5 \\ 8 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \approx 10{,}56, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0\right) \approx 442{,}22, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0\right) \approx 55{,}28,$$

Krok 1. *Do modelu można wprowadzić zmienną:*

a) x_1, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 8{,}22 \\ 1{,}17 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right) \approx 434{,}06, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right) \approx 62{,}01,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_1 \mid \hat{b}_0\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right)} \approx \frac{442{,}22 - 434{,}06}{62{,}01} \approx 0{,}13.$$

b) x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_2 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 8{,}22 \\ 1{,}17 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2\right) \approx 42{,}06, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2\right) \approx 6{,}01,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_2 \mid \hat{b}_0\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2\right)} \approx \frac{442{,}22 - 42{,}06}{6{,}01} \approx 66{,}58.$$

Krok 1. *Do modelu można wprowadzić:*

c) interakcję zmiennych x_1 i x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_3 x_1 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 0 \\ 1 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 4{,}32 \\ 1{,}56 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3\right) \approx 111{,}75, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3\right) \approx 15{,}96,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_3 \mid \hat{b}_0\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3\right)} \approx \frac{442{,}22 - 111{,}75}{15{,}96} \approx 20{,}71.$$

d) kwadrat zmiennej x_1, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_4 x_1^2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 9{,}24 \\ 0{,}28 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4\right) \approx 434{,}41, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4\right) \approx 62{,}06,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_4 \mid \hat{b}_0\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4\right)} \approx \frac{442{,}22 - 434{,}41}{62{,}06} \approx 0{,}13.$$

Krok 1. *Do modelu można wprowadzić:*

e) kwadrat zmiennej x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 16 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 16 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 3{,}78 \\ 1{,}02 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) \approx 12{,}78, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) \approx 1{,}83,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_5 \mid \hat{b}_0\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{442{,}22 - 12{,}78}{1{,}83} \approx 235{,}18.$$

Podsumowanie: wprowadzanie dodatkowych zmiennych do modelu dało następujące wartości cząstkowego testu F:

- *zmienna x_1:* $F_p \approx 0{,}13$,
- *zmienna x_2:* $Fp \approx 66{,}58$,
- *interakcja zmiennych:* $Fp \approx 20{,}71$,
- *kwadrat zmiennej x_1:* $Fp \approx 0{,}13$,
- *kwadrat zmiennej x_2:* $Fp \approx 235{,}18$.

Największą wartość testu otrzymano w wyniku wprowadzenia do modelu kwadratu zmiennej x_2, model zostanie więc uzupełniony o tą zmienną.

Krok 2. *Do modelu można wprowadzić zmienną:*

a) x_1, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_1 x_1$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 16 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 1{,}45 \\ 1{,}02 \\ 1{,}17 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 4{,}62, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 0{,}77,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_1 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{12{,}78 - 4{,}62}{0{,}77} \approx 10{,}6.$$

b) x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_2 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 3{,}67 \\ 0{,}96 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2, \hat{b}_5\right) \approx 12{,}67, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2, \hat{b}_5\right) \approx 2{,}11,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_2 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_2, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{12{,}78 - 12{,}67}{2{,}11} \approx 0{,}05.$$

Krok 2. *Do modelu można wprowadzić:*

c) interakcję zmiennych x_1 i x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_3 x_1 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 16 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 1{,}45 \\ 1{,}02 \\ 1{,}17 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right) \approx 6{,}74, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right) \approx 1{,}12,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_3 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{12{,}78 - 6{,}74}{1{,}12} \approx 5{,}39$$

d) kwadrat zmiennej x_1, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_4 x_1^2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 16 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 2{,}46 \\ 1{,}02 \\ 0{,}28 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right) \approx 4{,}97, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right) \approx 0{,}83,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_4 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{12{,}78 - 4{,}97}{0{,}83} \approx 9{,}43.$$

Krok 2.

Podsumowanie: wprowadzanie dodatkowych zmiennych do modelu dało następujące wartości cząstkowego testu F:

- *zmienna* x_1*:* $F_p \approx 10{,}6$,
- *zmienna* x_2*:* $Fp \approx 0{,}05$,
- *interakcja zmiennych:* $Fp \approx 5{,}39$,
- *kwadrat zmiennej* x_1*:* $Fp \approx 9{,}43$.

Największą wartość testu otrzymano w wyniku wprowadzenia do modelu zmiennej x_1*, model zostanie więc uzupełniony o tą zmienną.*

Krok 3. *Do modelu można wprowadzić zmienną:*

a) x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 16 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 16 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 1{,}33 \\ 0{,}96 \\ 1{,}17 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_5\right) \approx 4{,}5, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_5\right) \approx 0{,}9,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_2 \mid \hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_5\right)} \approx \frac{4{,}62 - 4{,}5}{0{,}9} \approx 0{,}13.$$

Krok 3. *Do modelu można wprowadzić zmienną:*

b) interakcję zmiennych x_1 i x_2, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_1 x_1 + b_3 x_1 x_2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 16 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 1{,}83 \\ 0{,}96 \\ 0{,}92 \\ 0{,}13 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right) \approx 4{,}25, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right) \approx 0{,}85,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_3 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{4{,}62 - 4{,}25}{0{,}85} \approx 0{,}43.$$

c) kwadrat zmiennej x_1, (tzn.: model: $\hat{y} = b_0 + b_5 x_2^2 + b_1 x_1 + b_4 x_1^2$)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 16 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} 0{,}89 \\ 1{,}02 \\ 1{,}83 \\ -0{,}17 \end{bmatrix}, \qquad SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right) \approx 4{,}56, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right) \approx 0{,}91,$$

$$F_p = \frac{SS_r\left(\hat{b}_4 \mid \hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)} = \frac{SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) - SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_4, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{4{,}62 - 4{,}56}{0{,}91} \approx 0{,}06.$$

Krok 3. *Podsumowanie: wprowadzanie zmiennych do modelu dało następujące wartości testu F:*

- *zmienna* x_2*:* $F_p \approx 0{,}13$,
- *interakcja zmiennych:* $F_p \approx 0{,}43$,
- *kwadrat zmiennej* x_1*:* $F_p \approx 0{,}06$.

Największą wartość testu otrzymano w wyniku wprowadzenia do modelu interakcji zmiennych.

Zakładając jednak, że ustalono graniczną (równą 1) wartość, którą powinien osiągać test – żadna ze zmiennych nie zostanie dodana do modelu a proces konstruowania modelu został zakończony.

Ostatecznie wyznaczony został model:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_5 x_2^2 = 1{,}45 + 1{,}17 x_1 + 1{,}02 x_2^2.$$

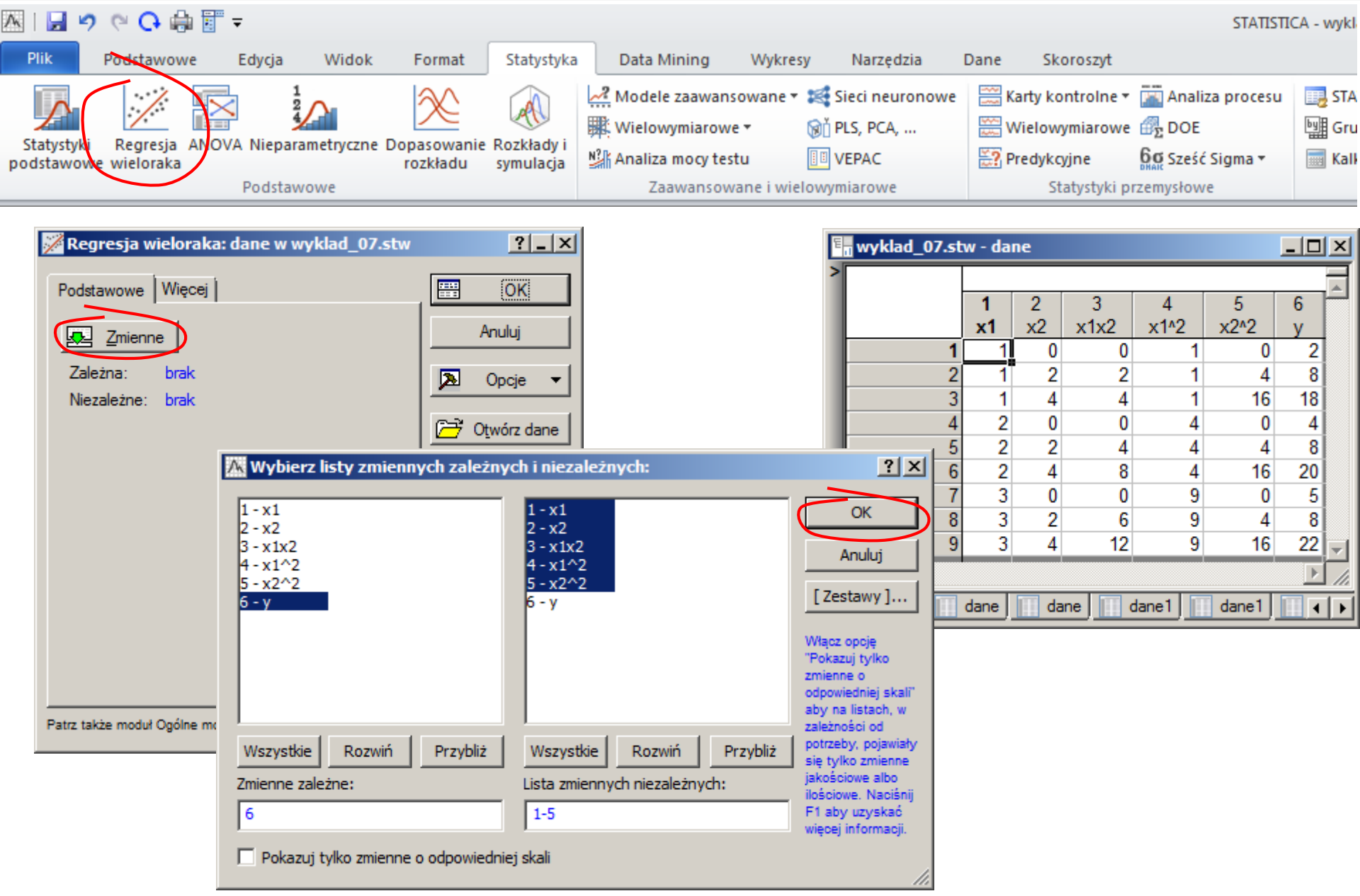
Znaleziona funkcja jest statystycznie istotna;

$$SS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 4{,}62, \qquad MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 0{,}77, \qquad SS_r\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 437{,}6, \qquad MS_r\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right) \approx 218{,}8,$$

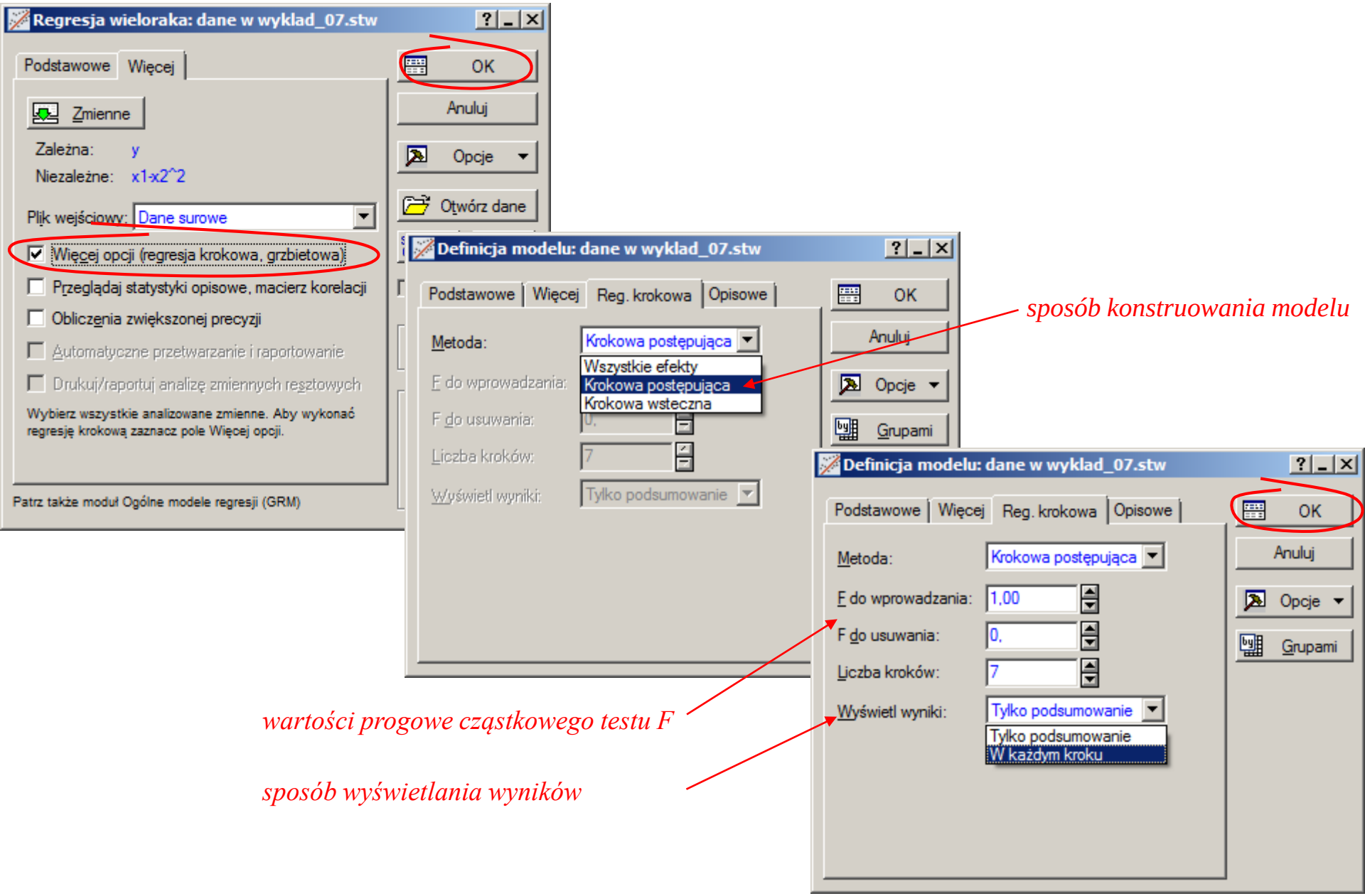
$$F_n = \frac{MS_r\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)}{MS_e\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_5\right)} \approx \frac{218{,}8}{0{,}77} \approx 284{,}4.$$

$$p - value = 1 - F_{F(p, n-p-1)}\left(F_n\right) = 1 - F_{F(2,9-2-1)}\left(218{,}8\right) \approx 0{,}000001.$$

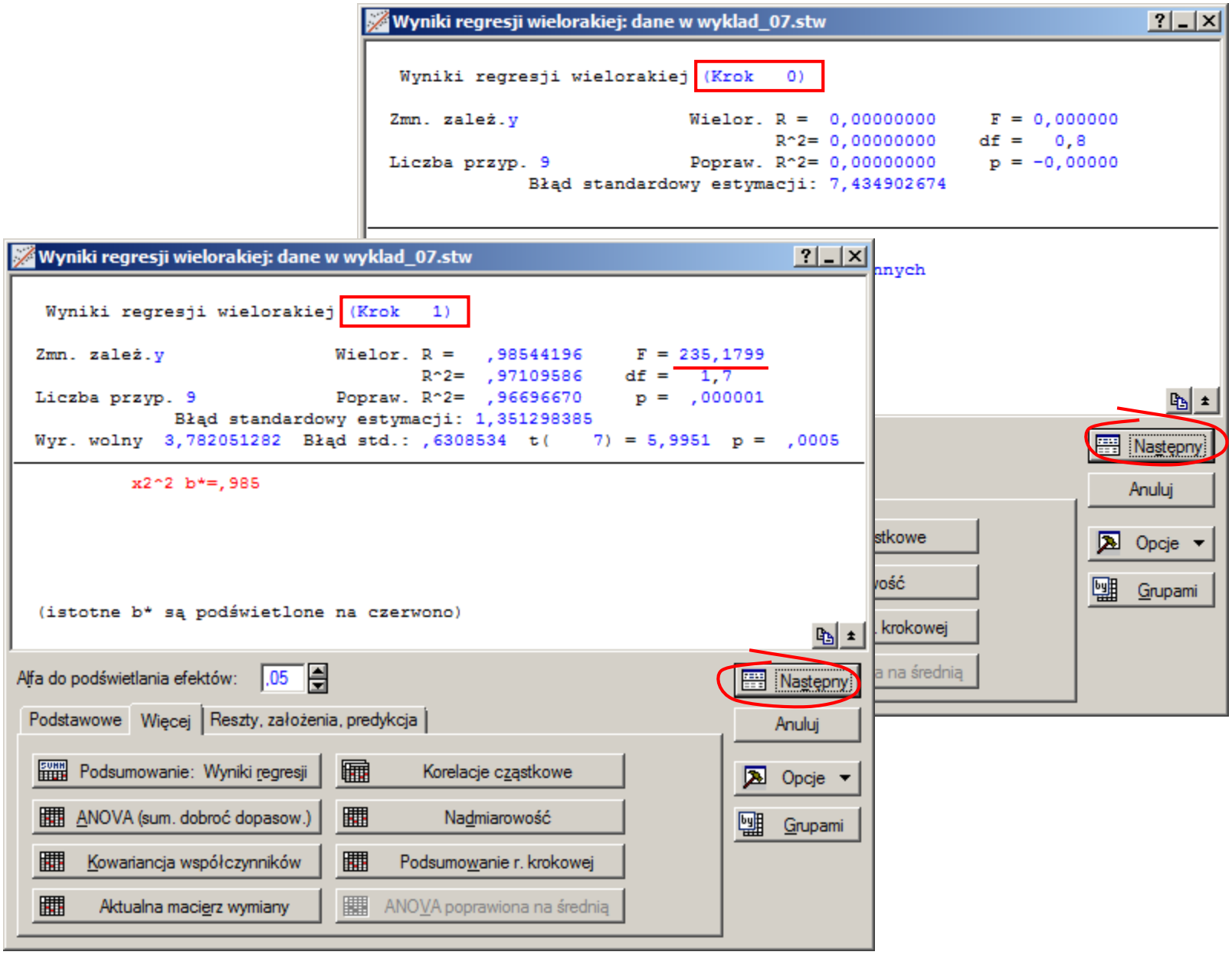
STATISTICA – regresja krokowa



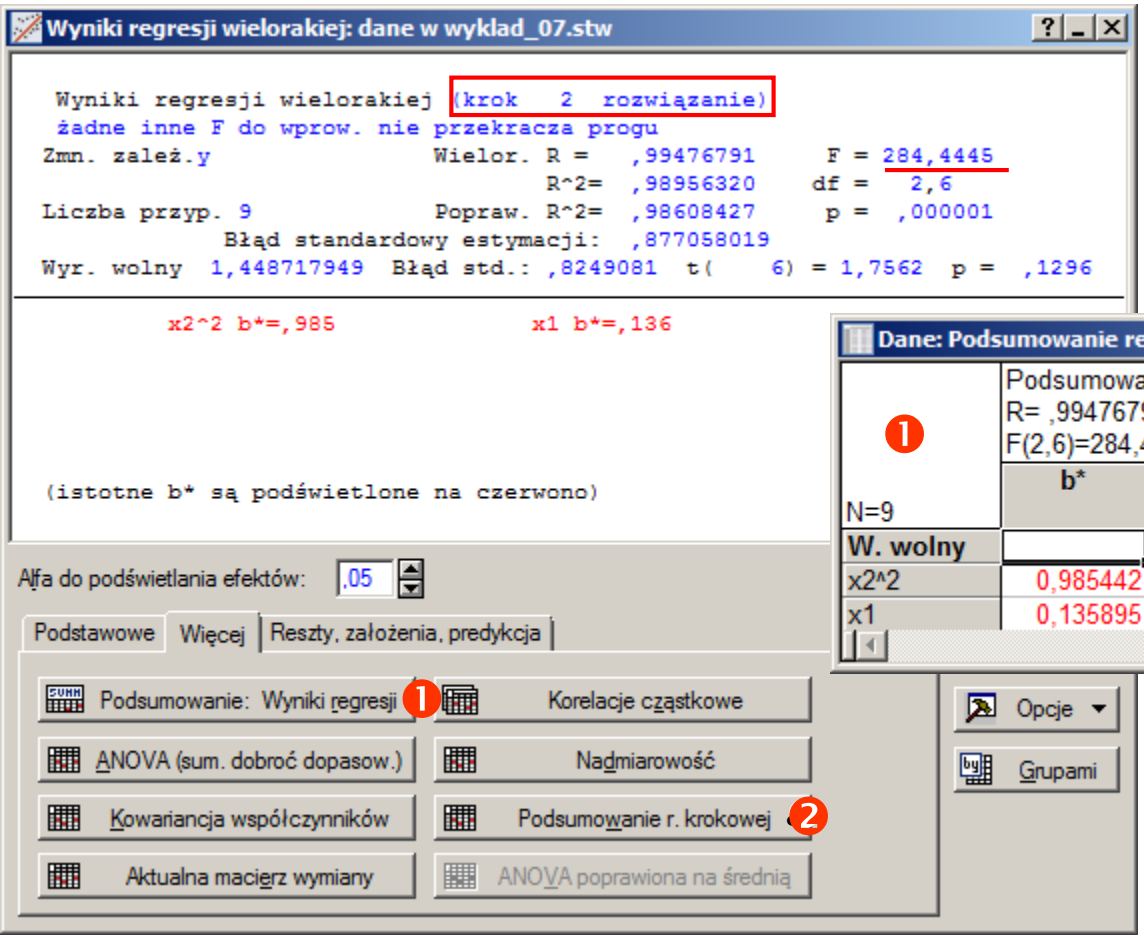
STATISTICA – regresja krokowa

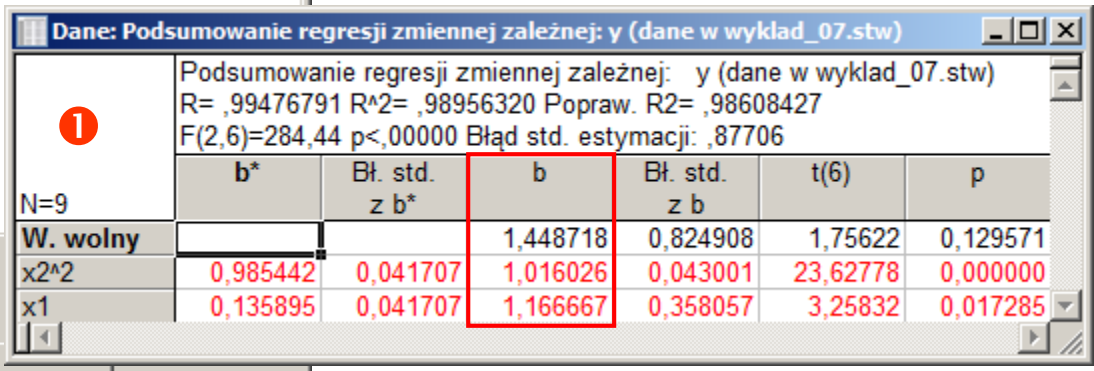


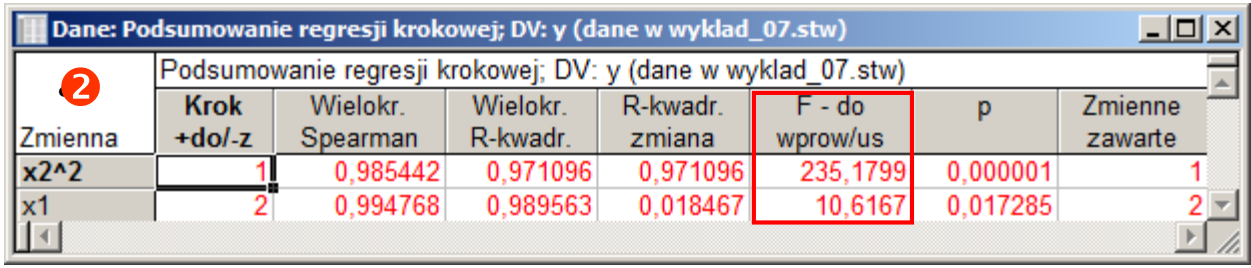
STATISTICA – regresja krokowa



STATISTICA – regresja krokowa



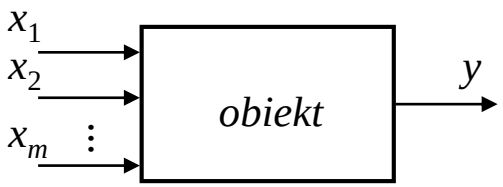




Zmienne losowe mogą być:

- *mierzalne* (*ilościowe*) – przyjmują wartości ze zbioru liczbowego,
- *niemierzalne* (*jakościowe*) – cechy których nie można wyrazić ilościowo, są opisywane słownie lub wyrażane przy pomocy wybranej skali.

Analizy wariancji i regresji wykorzystywane są do konstruowania modeli *zmiennej objaśnianej* w funkcji *zmiennych objaśniających*:



Analiza wariancji

- *zmienna objaśniana*: zmienna ilościowa,
- *zmienne objaśniające*: zmienne jakościowe

Analiza regresji

- *zmienna objaśniana*: zmienna ilościowa,
- *zmienne objaśniające*: zmienne ilościowe

Jednoczynnikowa analiza wariancji – podejście regresyjne

W eksperymencie badana jest istotność wpływu *jednej zmiennej niezależnej* na *jedną zmienną zależną* w przypadku, gdy zmienna niezależna może przyjmować *wartości na kilku poziomach*. Dla wyników otrzymanych w eksperymencie tworzony jest model w postaci:

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}\,, \qquad (*)$$

gdzie y_{ij} to wynik j–tej powtórki doświadczenia przeprowadzonego na i–tym poziomie, μ_i to średnia wartość zmiennej wyjściowej dla i–tego poziomu, e_{ij} – błąd losowy,

po wprowadzeniu ogólnej średniej μ i efektu τ_i i–tego poziomu czynnika (spełniającego założenie $\Sigma\tau_i = 0$) model ten może być zapisany w postaci:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}\,. \qquad (**)$$

W modelu (*) występuje a parametrów: μ_1, ..., μ_a, w modelu (**): $(a+1)$ parametrów: μ, τ_1, ..., τ_a stąd założenie: $\Sigma\tau_i = 0$.

poziom zmiennej niezależnej	*numer doświadczenia*			
	1	2	...	*r*
1				
⋮				
a				

Jednoczynnikowa analiza wariancji – podejście regresyjne (kodowanie zmiennych jakościowych)

Wprowadzając $(a-1)$ *fikcyjnych zmiennych ilościowych* (tzw. *zmienne zero-jedynkowe*):

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ gdy } \textit{zmienna jakościowa} \text{ jest na poziomie } i, \\ 0, \textit{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

tworzona jest funkcja regresji: $y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{a-1} x_{a-1} + e.$

Wyniki eksperymentu można zapisać w postaci macierzy wejść i wektora obserwacji:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1 powtórka doświadczeń

r-ta powtórka doświadczeń

$$= \mathbf{y}, \quad \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ \ldots \\ y_{1r} \\ y_{2r} \\ \vdots \\ y_{ar} \end{bmatrix}$$

zmienna x_0 odpowiadająca wyrazowi wolnemu

zmienne $x_1, \ldots, x_{a-1}$

	numer doświadczenia			
	1	2	...	*r*
1				
⋮				
a				

Jednoczynnikowa analiza wariancji – podejście regresyjne (kodowanie zmiennych jakościowych)

Kodowanie zero-jedynkowe prowadzi do układu zależności:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 1 + \hat{b}_2 \cdot 0 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 0 = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \\
\hat{y}_2 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \cdot 1 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 0 = \hat{b}_0 + \hat{b}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hat{y}_{a-1} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \cdot 0 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 1 = \hat{b}_0 + \hat{b}_{a-1} \\
\hat{y}_a &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \cdot 0 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 0 = \hat{b}_0
\end{aligned},$$

Oznacza to, że dla poziomów: 1, ..., a –1 wykorzystywany jest model postaci:

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_i,$$

a dla poziomu a:

$$\hat{y}_a = \hat{b}_0.$$

Porównując otrzymane zależności z modelem wykorzystywanym w analizie wariancji: $\hat{y}_i = \mu_i$,

otrzymuje się następującą interpretację współczynników funkcji regresji:

$$\hat{b}_0 = \mu_a,$$

$$\hat{b}_i = \mu_i - \mu_a.$$

oznacza, to że:

- *wyraz wolny odpowiada średniej dla ostatniego poziomu zmiennej objaśniającej,*
- *pozostałe współczynniki f. regresji opisują przesunięcia średnich pozostałych poziomów (względem poziomu referencyjnego opisanego przez wyraz wolny)*

Badanie istotności wpływu – przykład 1. (wykład 3)

Przykład 1.* Należy zbadać wpływ mocy reaktora plazmowego na szybkość trawienia płytek krzemowych. Planując eksperyment zdecydowano o wyborze 4 poziomów mocy: 160, 180, 200 i 220W i 5 doświadczeń dla każdego z ustalonych poziomów mocy.

Po zaplanowaniu eksperymentu i ustaleniu kolejności prowadzenia poszczególnych doświadczeń wyniki uzyskanych szybkości trawienia w [Å/*min*] zapisano w arkuszu:

wyklad_07.stw - dane

1 moc	2 nr	3 tempo	4 x1	5 x2	6 x3
200	1	600	0	0	1
220	1	725	0	0	0
220	2	700	0	0	0
160	1	575	1	0	0
160	2	542	1	0	0
180	1	565	0	1	0
200	2	651	0	0	1
160	3	530	1	0	0
180	2	593	0	1	0
200	3	610	0	0	1
220	3	715	0	0	0
220	4	685	0	0	0
160	4	539	1	0	0
160	5	570	1	0	0
220	5	710	0	0	0
180	3	590	0	1	0
180	4	579	0	1	0
180	5	610	0	1	0
200	4	637	0	0	1
200	5	629	0	0	1

dane

Znaczenie zmiennych:

nr

numer kolejny doświadczenia na podanym poziomie mocy,

tempo

zmierzona szybkość trawienia,

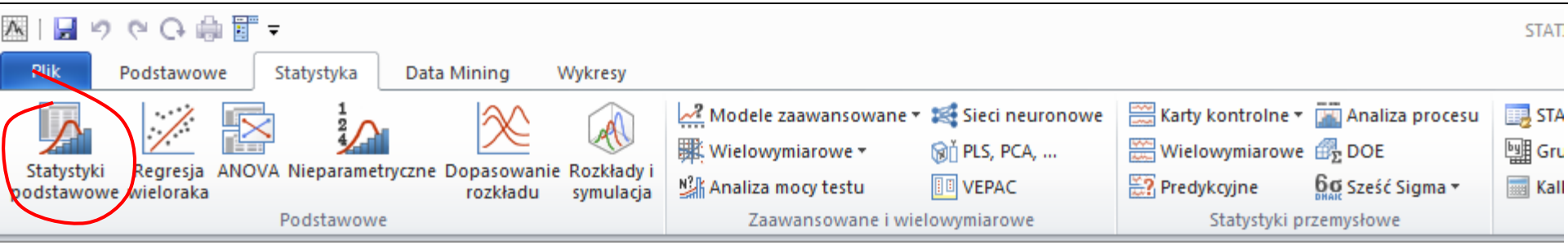
x1, x2, x3

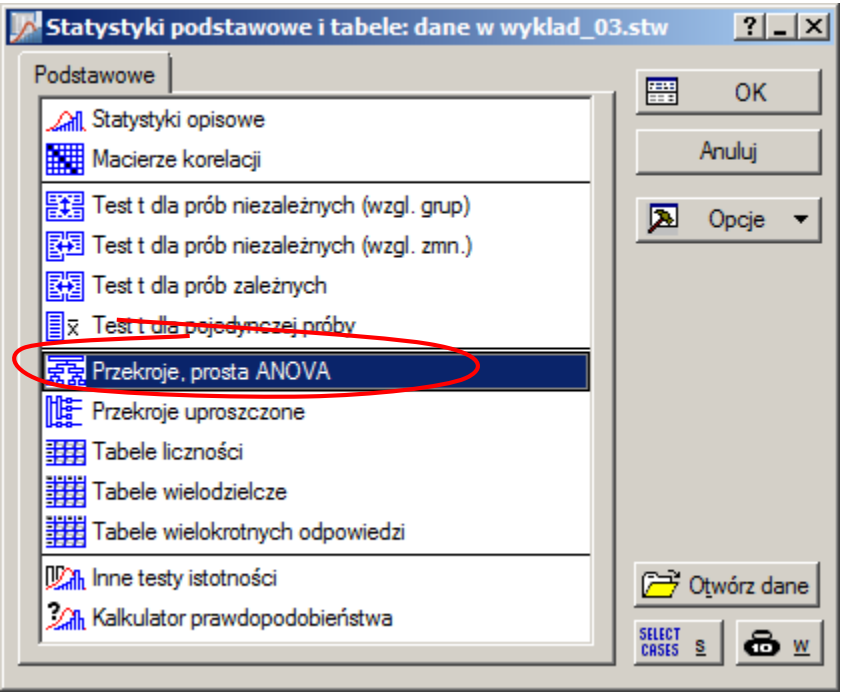
fikcyjne zmienne zero-jedynkowe wykorzystywane w podejściu regresyjnym, dla mocy:

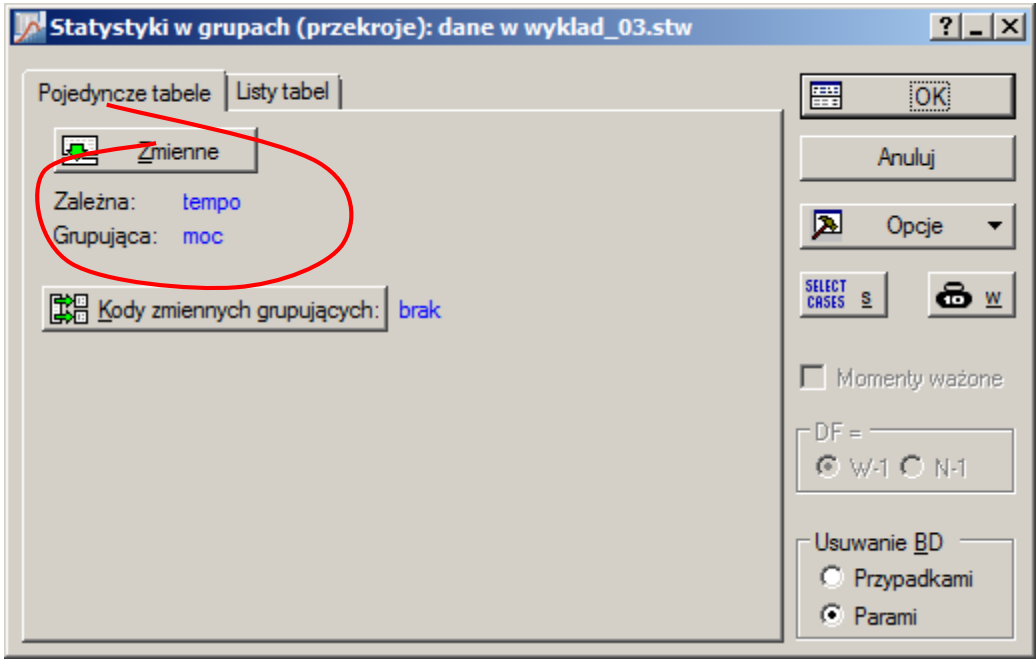
- *160: x1 = 1, x2 = 0, x3 = 0,*
- *180: x1 = 0, x2 = 1, x3 = 0,*
- *200: x1 = 0, x2 = 0, x3 = 1,*
- *220: x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0.*

* Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley, 2012

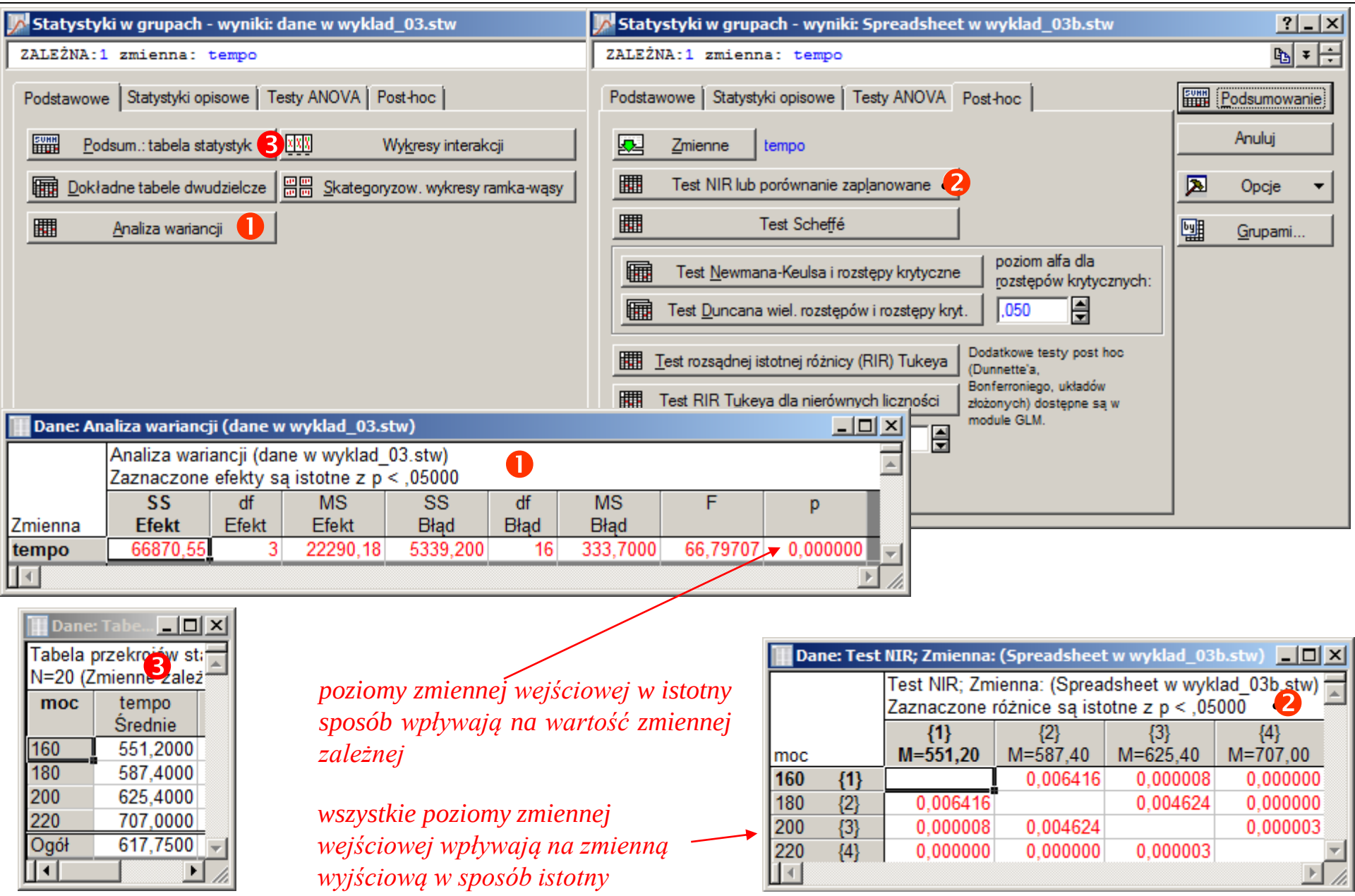
STATISTICA – jednoczynnikowa analiza wariancji (wykład 3)







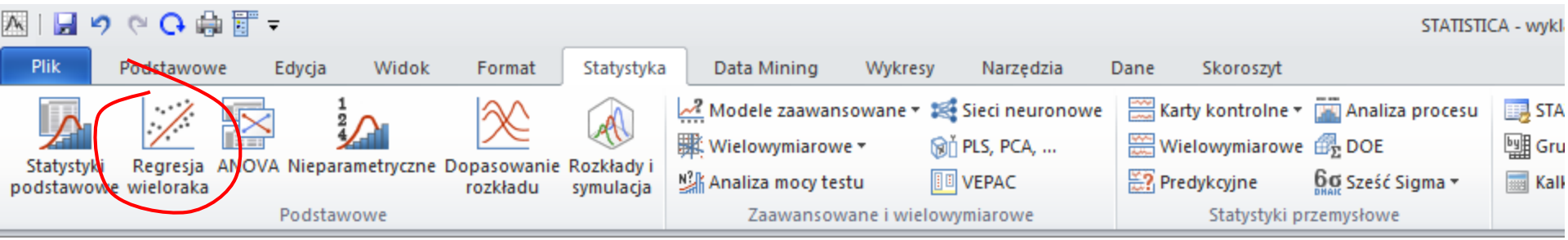
STATISTICA – jednoczynnikowa analiza wariancji (metoda 1.)

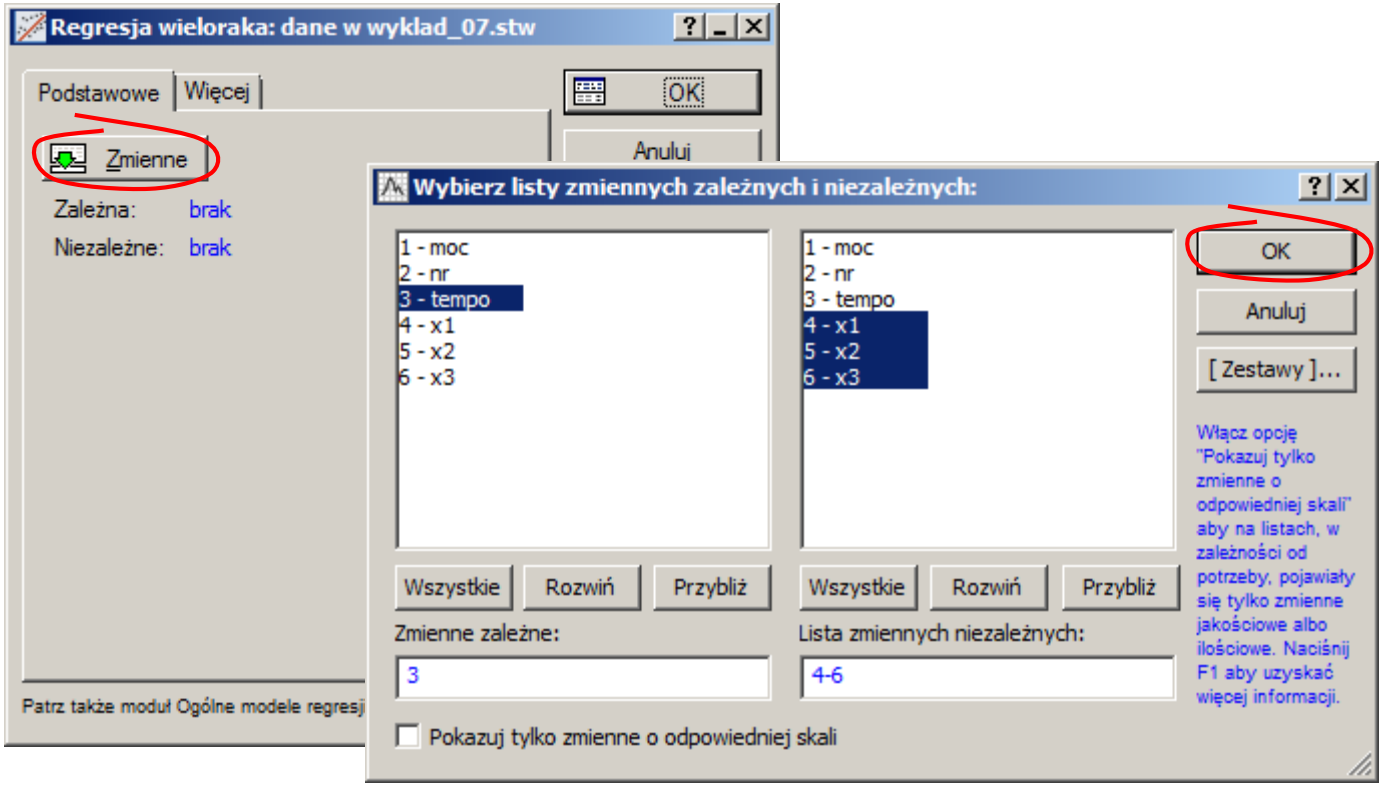


poziomy zmiennej wejściowej w istotny sposób wpływają na wartość zmiennej zależnej

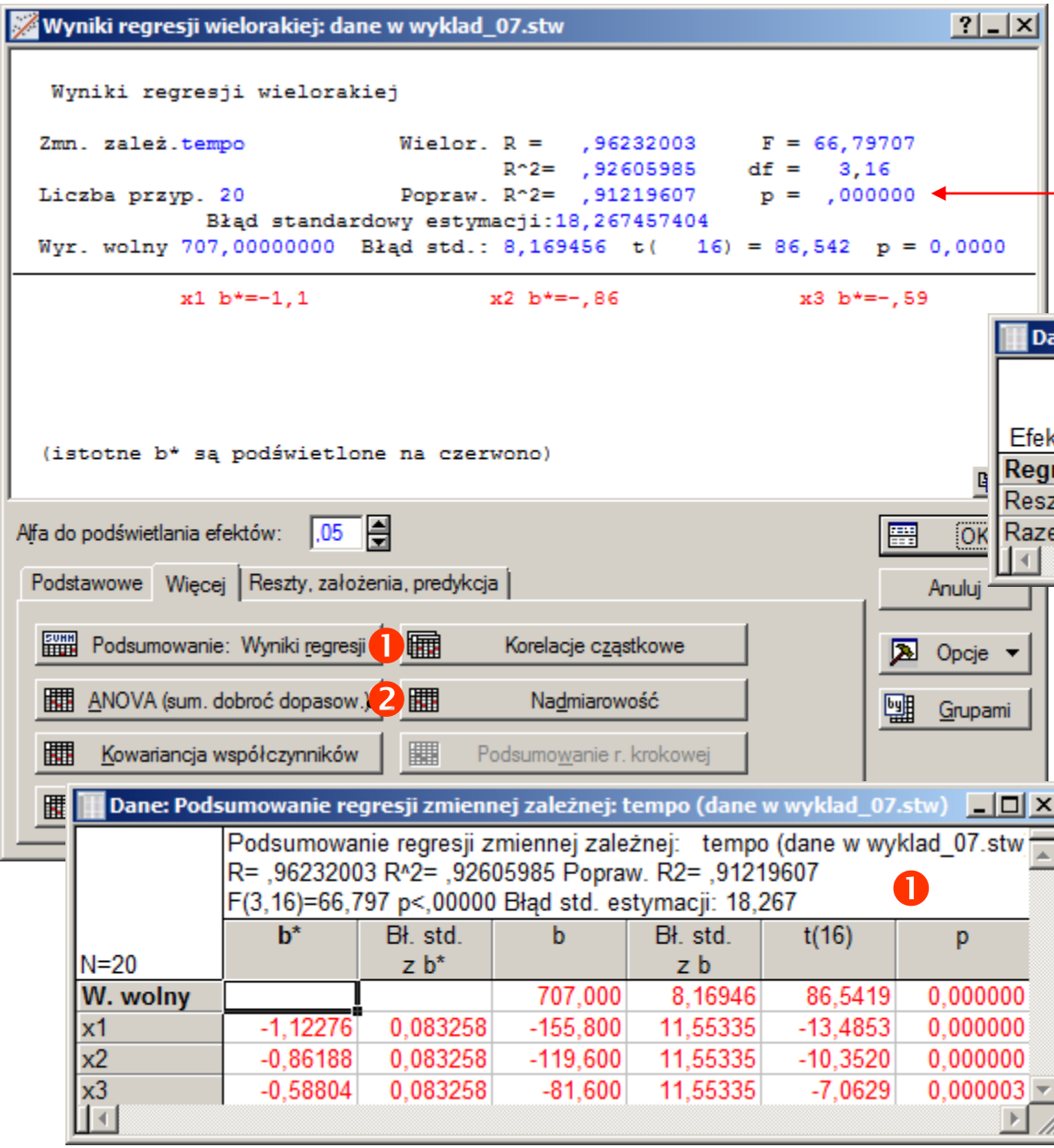
wszystkie poziomy zmiennej wejściowej wpływają na zmienną wyjściową w sposób istotny

STATISTICA – analiza regresji





STATISTICA – analiza regresji



funkcja regresji istotna

Dane: Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	66870,55	3	22290,18	66,79707	0,000000
Reszta	5339,20	16	333,70		
Razem	72209,75				

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw
R= ,96232003 R^2= ,92605985 Popraw. R2= ,91219607
F(3,16)=66,797 p<,00000 Błąd std. estymacji: 18,267

N=20	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(16)	p
W. wolny			707,000	8,16946	86,5419	0,000000
x1	-1,12276	0,083258	-155,800	11,55335	-13,4853	0,000000
x2	-0,86188	0,083258	-119,600	11,55335	-10,3520	0,000000
x3	-0,58804	0,083258	-81,600	11,55335	-7,0629	0,000003

współczynniki funkcji regresji istotne

Analiza wariancji

Dane: Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)

Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	66870,55 ❶	3	22290,18 ❷	5339,200 ❸	16	333,7000 ❹	66,79707 ❺	0,000000 ❻

Dane: Tabe...

Tabela przekrojów st:
N=20 (Zmienne zależ

moc	tempo Średnie
160	551,2000 ①
180	587,4000 ②
200	625,4000 ③
220	707,0000 ④
Ogół	617,7500

; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

st NIR; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
znaczone różnice są istotne z p < ,05000

moc		{1} M=551,20	{2} M=587,40	{3} M=625,40	{4} M=707,00
160	{1}		0,006416	0,000008	0,000000
180	{2}	0,006416		0,004624	0,000000
200	{3}	0,000008	0,004624		0,000003
220	{4}	0,000000 ❼	0,000000 ❽	0,000003 ❾	

① $\mu_1 = 551{,}2 = 707{,}0 - 155{,}8 = b_0 + b_1$

② $\mu_2 = 587{,}4 = 707{,}0 - 119{,}6 = b_0 + b_2$

③ $\mu_3 = 625{,}4 = 707{,}0 - 81{,}6 = b_0 + b_3$

④ $\mu_4 = 707{,}0 = b_0$

Analiza regresji

Dane: Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	66870,55 ❶	3 ❷	22290,18 ❺	66,79707 ❻	0,000000
Reszta	5339,20 ❸	16	333,70 ❹		
Razem	72209,75				

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw
R= ,96232003 R^2= ,92605985 Popraw. R2= ,91219607
F(3,16)=66,797 p<,00000 Błąd std. estymacji: 18,267

N=20	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(16)	p
W. wolny			707,000 ④	8,16946	86,5419	0,000000
x1	-1,12276	0,083258	-155,800 ①	11,55335	-13,4853 ❼	0,000000
x2	-0,86188	0,083258	-119,600 ②	11,55335	-10,3520 ❽	0,000000
x3	-0,58804	0,083258	-81,600 ③	11,55335	-7,0629 ❾	0,000003

Analiza wariancji

Dane: Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)

Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	66870,55	3	22290,18	5339,200	16	333,7000	66,79707	0,000000

Dane: Tabe...

Tabela przekrojów st:
N=20 (Zmienne zależ

moc	tempo Średnie
160	551,2000
180	587,4000
200	625,4000
220	707,0000
Ogół	617,7500

; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

st NIR; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
znaczone różnice są istotne z p < ,05000

moc	{1} M=551,20	{2} M=587,40	{3} M=625,40	{4} M=707,00
160 {1}		0,006416	0,000008	0,000000
180 {2}	0,006416		0,004624	0,000000
200 {3}	0,000008	0,004624		0,000003
220 {4}	0,000000	0,000000	0,000003	

① $\mu_1 = 551{,}2 = b_0$

② $\mu_2 = 587{,}4 = 551{,}2 + 36{,}2 = b_0 + b_1$

③ $\mu_3 = 625{,}4 = 551{,}2 + 74{,}2 = b_0 + b_2$

④ $\mu_4 = 707{,}0 = 551{,}2 + 155{,}8 = b_0 + b_3$

kodowanie, dla mocy:

- *160: x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0,*
- *180: x1 = 1, x2 = 0, x3 = 0,*
- *200: x1 = 0, x2 = 1, x3 = 1,*
- *220: x1 = 0, x2 = 0, x3 = 1.*

Analiza regresji (inne kodowanie)

Dane: Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Analiza wariancji ; DV: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	66870,55	3	22290,18	66,79707	0,000000
Reszta	5339,20	16	333,70		
Razem	72209,75				

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane w wyklad_07.stw
R= ,96232003 R^2= ,92605985 Popraw. R2= ,91219607
F(3,16)=66,797 p<,00000 Błąd std. estymacji: 18,267

N=20	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(16)	p
W. wolny			551,2000	8,16946	67,47084	0,000000
x1	0,260871	0,083258	36,2000	11,55335	3,13329	0,006416
x2	0,534714	0,083258	74,2000	11,55335	6,42238	0,000008
x3	1,122755	0,083258	155,8000	11,55335	13,48526	0,000000

Jednoczynnikowa analiza wariancji – podejście regresyjne (kodowanie zmiennych jakościowych)

Wykorzystując *kodowanie z sigma ograniczeniami* (*każda ze zmiennych fikcyjnych sumuje się do 0*):

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \textit{zmienna jakościowa} \text{ jest na poziomie } i, \\ -1 & \text{gdy } \textit{zmienna jakościowa} \text{ jest na poziomie } a, \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Po wprowadzeniu $(a-1)$ zmiennych fikcyjnych, tworzona jest funkcja regresji:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{a-1} x_{a-1} + e,$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1 powtórka doświadczeń

r-ta powtórka doświadczeń

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ \ldots \\ y_{1r} \\ y_{2r} \\ \vdots \\ y_{ar} \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

zmienna x_0 odpowiadająca wyrazowi wolnemu

zmienne $x_1, \ldots, x_{a-1}$

	numer doświadczenia			
	1	2	...	*r*
1				
⋮				
a				

Jednoczynnikowa analiza wariancji – podejście regresyjne (kodowanie zmiennych jakościowych)

Kodowanie z sigma ograniczeniami prowadzi do układu zależności:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 1 + \hat{b}_2 \cdot 0 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 0 && = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \\
\hat{y}_2 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \cdot 1 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 0 && = \hat{b}_0 + \hat{b}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
\hat{y}_{a-1} &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \cdot 0 + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot 1 && = \hat{b}_0 + \hat{b}_{a-1} \\
\hat{y}_a &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot (-1) + \hat{b}_2 \cdot (-1) + \ldots + \hat{b}_{a-1} \cdot (-1) && = \hat{b}_0 - \hat{b}_1 - \hat{b}_2 - \ldots - \hat{b}_{a-1}
\end{aligned},$$

Wprowadzając oznaczenie: $\hat{b}_a = -\sum_{i=1}^{a-1} \hat{b}_i$ dla każdego poziomu zmiennej niezależnej można zapisać:

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_i,$$

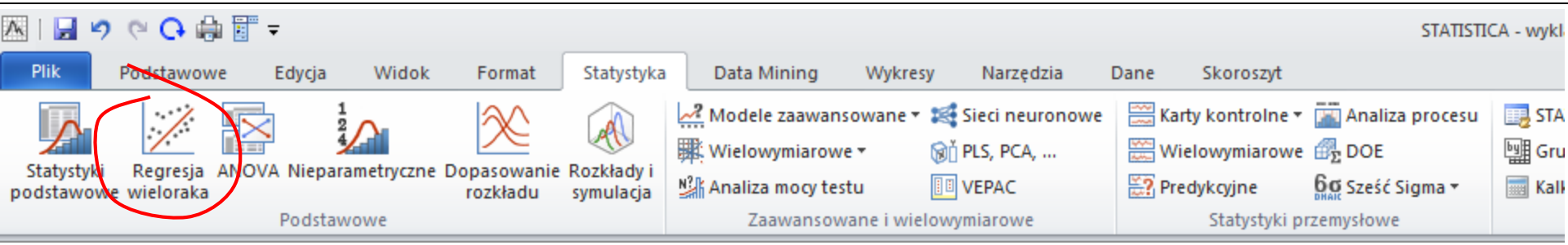
Porównując powyższy model z modelem wykorzystywanym w analizie wariancji: $\hat{y}_i = \mu + \tau_i$,
otrzymuje się następującą interpretację współczynników
funkcji regresji:

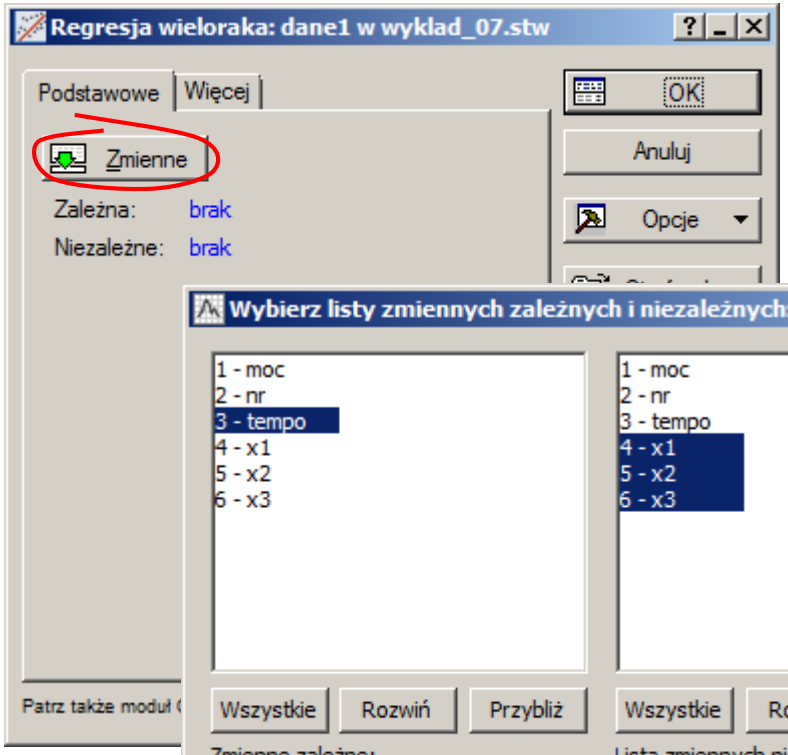
$$\hat{b}_0 = \mu,$$
$$\hat{b}_i = \tau_i.$$

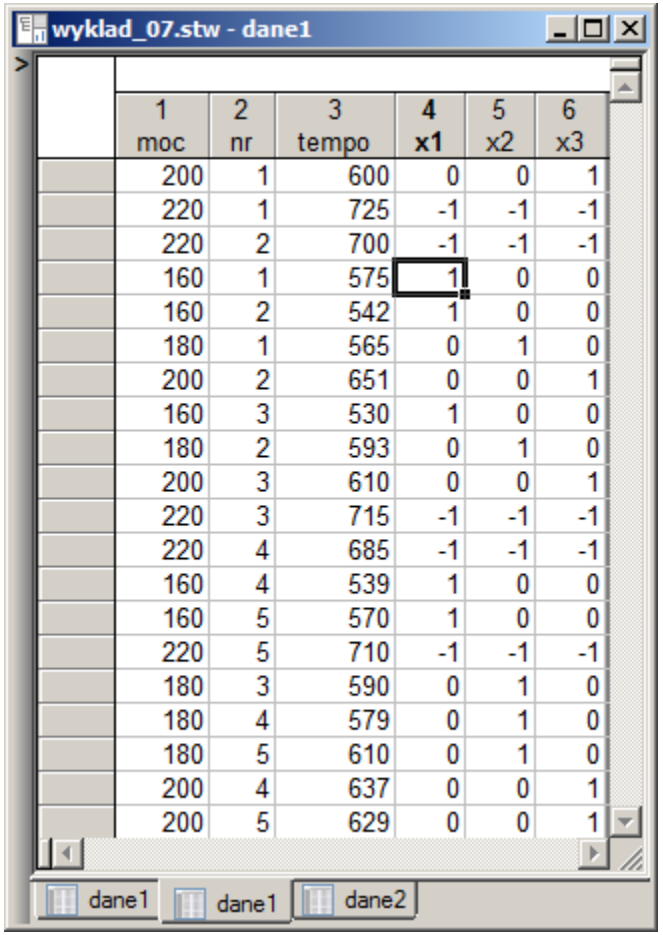
oznacza, to że:

- *wyraz wolny odpowiada średniej policzonej dla wszystkich poziomów zmiennej objaśniającej,*
- *pozostałe współczynniki f. regresji opisują przesunięcia średnich względem poziomu referencyjnego opisanego przez wyraz wolny*

STATISTICA – analiza regresji







1 moc	2 nr	3 tempo	4 x1	5 x2	6 x3
200	1	600	0	0	1
220	1	725	-1	-1	-1
220	2	700	-1	-1	-1
160	1	575	1	0	0
160	2	542	1	0	0
180	1	565	0	1	0
200	2	651	0	0	1
160	3	530	1	0	0
180	2	593	0	1	0
200	3	610	0	0	1
220	3	715	-1	-1	-1
220	4	685	-1	-1	-1
160	4	539	1	0	0
160	5	570	1	0	0
220	5	710	-1	-1	-1
180	3	590	0	1	0
180	4	579	0	1	0
180	5	610	0	1	0
200	4	637	0	0	1
200	5	629	0	0	1

STATISTICA – analiza regresji

Wyniki regresji wielorakiej: dane1 w wyklad_07.stw

```
 Wyniki regresji wielorakiej

Zmn. zależ.tempo          Wielor. R =   ,96232003     F = 66,79707
                                R^2=   ,92605985    df =   3,16
Liczba przyp. 20          Popraw. R^2=   ,91219607     p =  ,000000
           Błąd standardowy estymacji:18,267457404
Wyr. wolny 617,75000000  Błąd std.: 4,084728  t(   16) = 151,23  p = 0,0000

          x1 b*=-,78            x2 b*=-,36            x3 b*=,090


(istotne b* są podświetlone na czerwono)
```

funkcja regresji istotna

Dane: Analiza wariancji ; DV: tempo (dane1 w wyklad_07.st...

Analiza wariancji ; DV: tempo (dane1 w wyklad_07.stw)

Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	66870,55	3	22290,18	66,79707	0,000000
Reszta	5339,20	16	333,70		
Razem	72209,75				

Alfa do podświetlania efektów: ,05

OK | Anuluj | Opcje | Grupami

Podstawowe | Więcej | Reszty, założenia, predykcja

- Podsumowanie: Wyniki regresji (1)
- Korelacje cząstkowe
- ANOVA (sum. dobroć dopasow.) (2)
- Nadmiarowość
- Kowariancja współczynników
- Podsumowanie r. krokowej

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane1 w wyklad_07.stw)

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane1 w wyklad_07.stw (1)
R= ,96232003 R^2= ,92605985 Popraw. R2= ,91219607
F(3,16)=66,797 p<,00000 Błąd std. estymacji: 18,267

N=20	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(16)	p
W. wolny			617,7500	4,084728	151,2341	0,000000
x1	-0,783159	0,083258	-66,5500	7,074956	-9,4064	0,000000
x2	-0,357158	0,083258	-30,3500	7,074956	-4,2898	0,000563
x3	0,090025	0,083258	7,6500	7,074956	1,0813	0,295602

istotne współczynniki funkcji regresji

nieistotny współczynnik funkcji regresji

Analiza wariancji

Dane: Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)

Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	66870,55	3	22290,18	5339,200	16	333,7000	66,79707	0,000000

Dane: Tabe...

Tabela przekrojów st
N=20 (Zmienne zależ

moc	tempo Średnie
160	551,2000
180	587,4000
200	625,4000
220	707,0000
Ogół	617,7500

; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

st NIR; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
znaczone różnice są istotne z p < ,05000

moc	{1} M=551,20	{2} M=587,40	{3} M=625,40	{4} M=707,00
160 {1}		0,006416	0,000008	0,000000
180 {2}	0,006416		0,004624	0,000000
200 {3}	0,000008	0,004624		0,000003
220 {4}	0,000000	0,000000	0,000003	

① $\mu_1 = 551{,}2 = 617{,}75 - 66{,}55 = b_0 + b_1$

② $\mu_2 = 587{,}4 = 617{,}75 - 30{,}35 = b_0 + b_2$

③ $\mu_3 = 625{,}4 = 617{,}75 + 7{,}65 = b_0 + b_3$

④ $\mu_4 = 707{,}0 = 617{,}75 - (-66{,}55 - 30{,}35 + 7{,}65) = b_0 - (b_1 + b_2 + b_3)$

Analiza regresji

Dane: Analiza wariancji ; DV: tempo (dane1 w wyklad_07.st...

Analiza wariancji ; DV: tempo (dane1 w wyklad_07.stw)

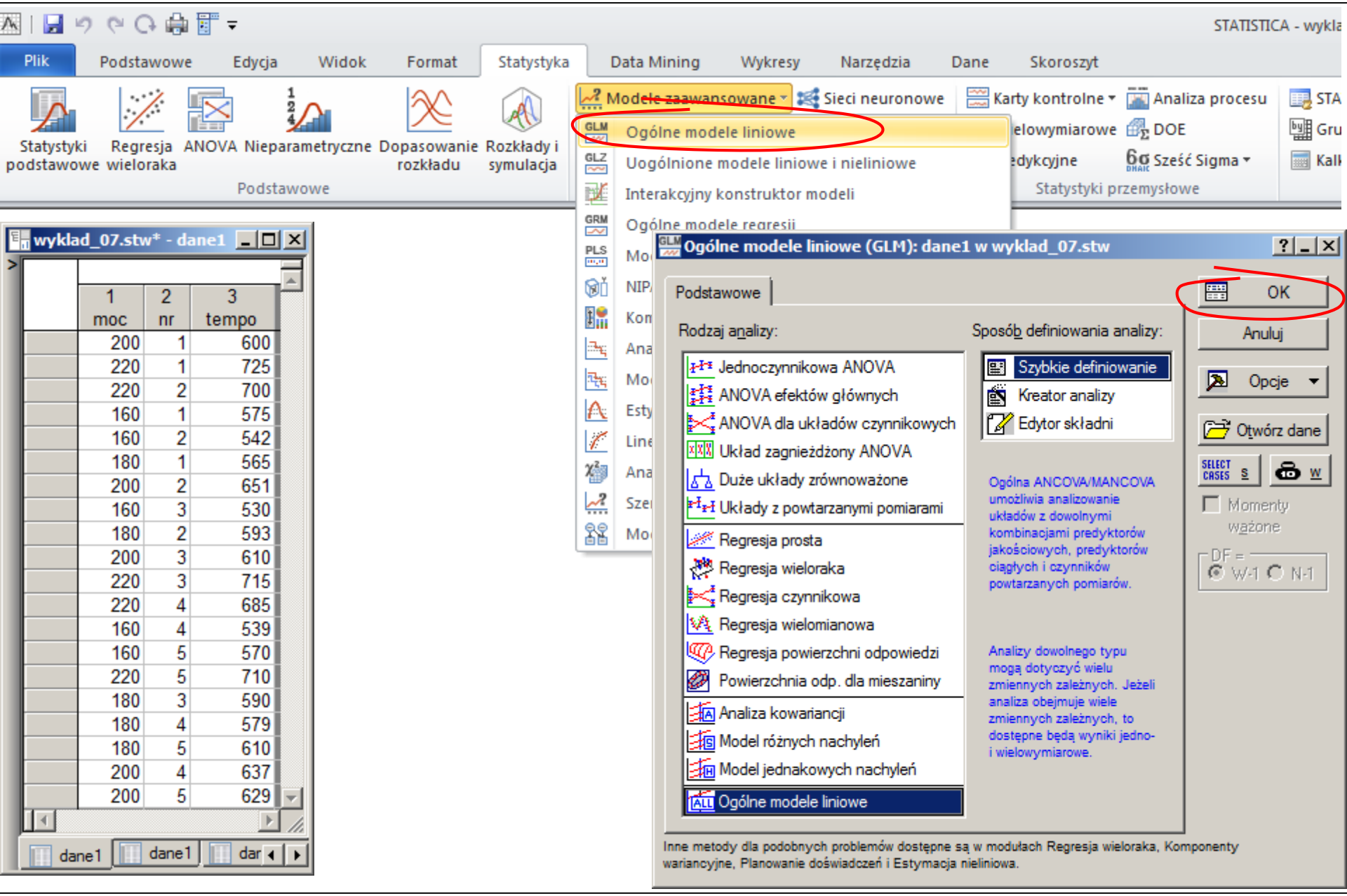
Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	66870,55	3	22290,18	66,79707	0,000000
Reszta	5339,20	16	333,70		
Razem	72209,75				

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane1 w wyklad_07.stw)

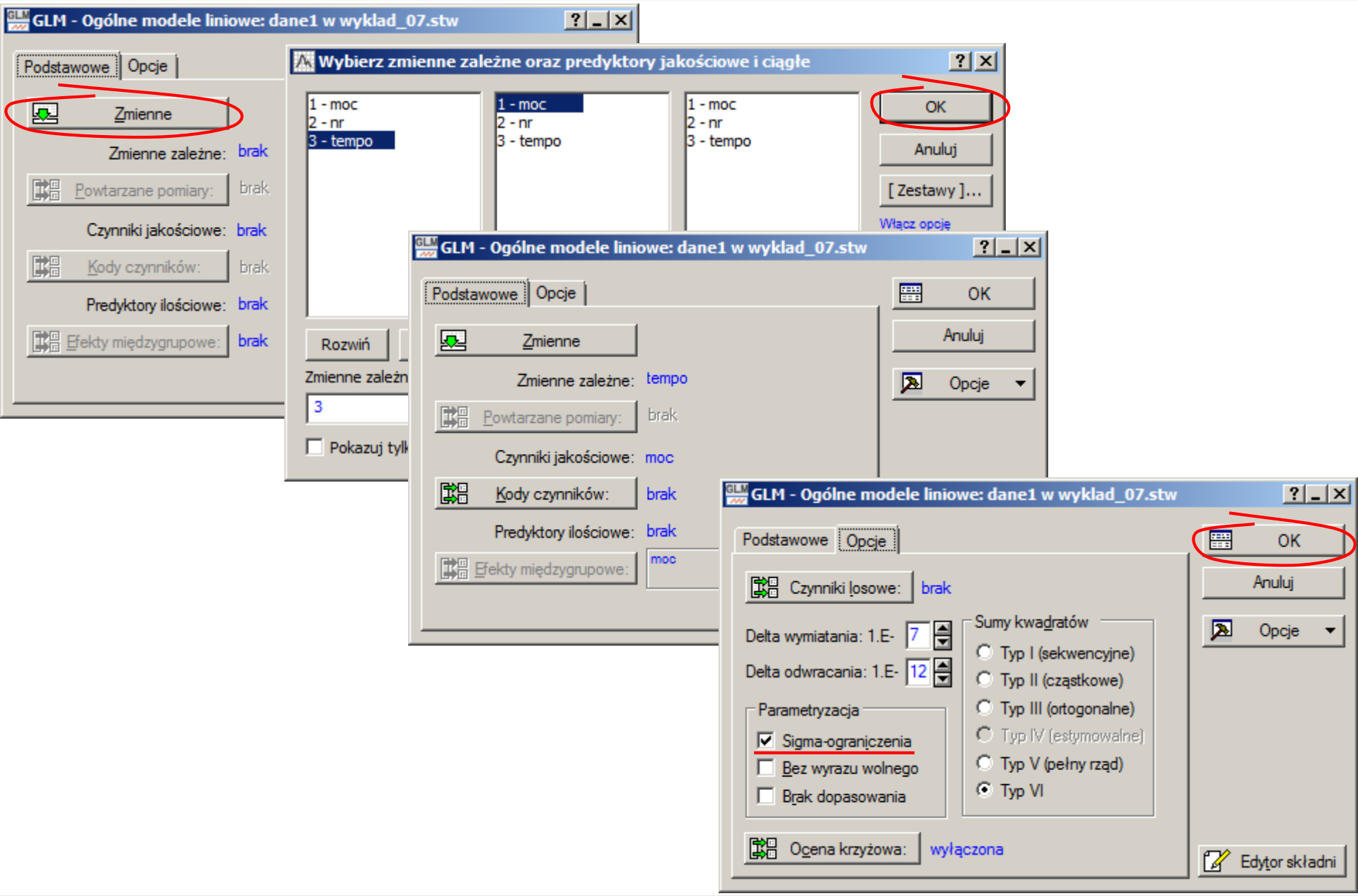
Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: tempo (dane1 w wyklad_07.stw
R= ,96232003 R^2= ,92605985 Popraw. R2= ,91219607
F(3,16)=66,797 p<,00000 Błąd std. estymacji: 18,267

N=20	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(16)	p
W. wolny			617,7500	4,084728	151,2341	0,000000
x1	-0,783159	0,083258	-66,5500	7,074956	-9,4064	0,000000
x2	-0,357158	0,083258	-30,3500	7,074956	-4,2898	0,000563
x3	0,090025	0,083258	7,6500	7,074956	1,0813	0,295602

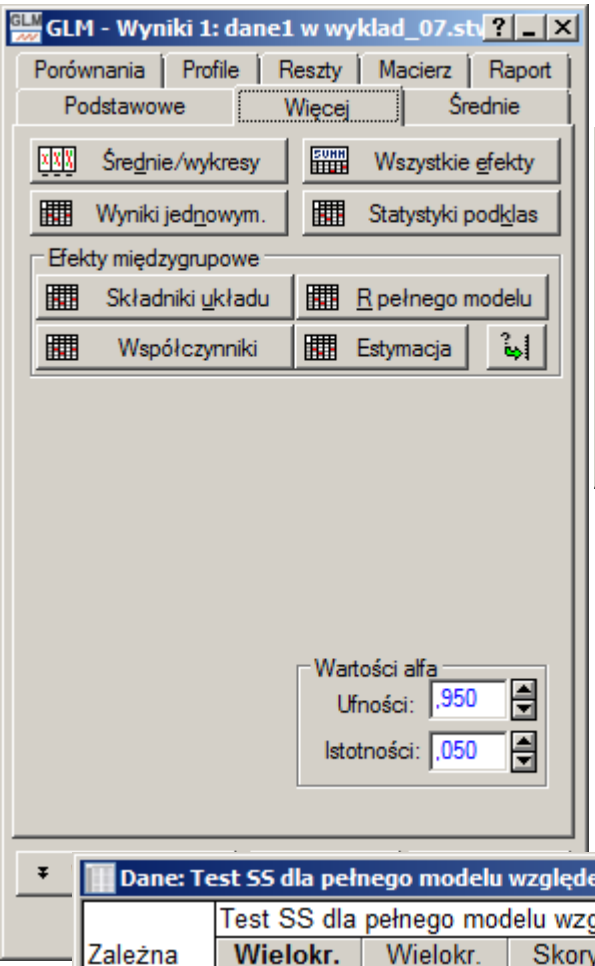
STATISTICA – analiza regresji – GLM



STATISTICA – analiza regresji – GLM



STATISTICA – analiza regresji – GLM



Dane: Oceny parametrów (dane1 w wyklad_07.stw)

Oceny parametrów (dane1 w wyklad_07.stw)
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami

Efekt	Poziom Efekt	Kolumna	tempo Param.	tempo Bł. std.	tempo t	tempo p
Wyraz wolny		1	617,7500	4,084728	151,2341	0,000000
moc	160	2	-66,5500	7,074956	-9,4064	0,000000
moc	180	3	-30,3500	7,074956	-4,2898	0,000563
moc	200	4	7,6500	7,074956	1,0813	0,295602

wyniki identyczne jak na slajdzie 16.

Dane: Test SS dla pełnego modelu względem SS dla reszt (dane1 w wyklad_07.stw)

Test SS dla pełnego modelu względem SS dla reszt (dane1 w wyklad_07.stw)

Zależna Zm.	Wielokr. R	Wielokr. R2	Skorygow R2	SS Model	df Model	MS Model	SS Reszta	df Reszta	MS Reszta	F	p
tempo	0,962320	0,926060	0,912196	66870,55	3	22290,18	5339,200	16	333,7000	66,79707	0,000000

p – value

funkcja regresji istotna

Badanie istotności wpływu – przykład 2. (wykład 4)

Przykład 2.* Należy wybrać jeden z trzech rodzajów materiałów, który ma być zastosowany w baterii zasilającej urządzenie wystawione na działanie dużych różnic temperatur. Zaplanowano eksperyment, którego celem miało być ustalenie, który z materiałów jest bardziej odporny na wahania temperatury. Zdecydowano o wyborze 3 temperatur zgodnych z warunkami w których będzie pracowało urządzenie 15, 70 i 125°F (-9,44°C, 21,11°C, 51,67°C) i zaplanowano po 4 doświadczenia dla każdej kombinacji: (materiał, temperatura). Po zaplanowaniu eksperymentu i ustaleniu kolejności prowadzenia poszczególnych doświadczeń wyniki uzyskanych czasów pracy baterii (w [*godz.*]) zapisano w arkuszu:

wyklad_07.stw* - dane2

1 materiał	2 temperatura	3 czas pracy	4 x1	5 x2	6 x3	7 x4	8 x5	9 x6	10 x7	11 x8
1	15	130	1	0	1	0	1	0	0	0
1	15	74	1	0	1	0	1	0	0	0
1	15	155	1	0	1	0	1	0	0	0
1	15	180	1	0	1	0	1	0	0	0
1	70	34	1	0	0	1	0	1	0	0
1	70	80	1	0	0	1	0	1	0	0
1	70	40	1	0	0	1	0	1	0	0
1	70	75	1	0	0	1	0	1	0	0
1	125	20	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
1	125	82	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
1	125	70	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
1	125	58	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
2	15	150	0	1	1	0	0	0	1	0
2	15	159	0	1	1	0	0	0	1	0
2	15	188	0	1	1	0	0	0	1	0
2	15	126	0	1	1	0	0	0	1	0
2	70	136	0	1	0	1	0	0	0	1
2	70	106	0	1	0	1	0	0	0	1
2	70	122	0	1	0	1	0	0	0	1
2	70	115	0	1	0	1	0	0	0	1
2	125	25	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1

Znaczenie zmiennych:

materiał i temperatura: symbol materiału z którego wykonana została bateria i temperatura, w której przeprowadzano doświadczenie,

x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8
fikcyjne zmienne wykorzystywane do kodowania z sigma ograniczeniami,

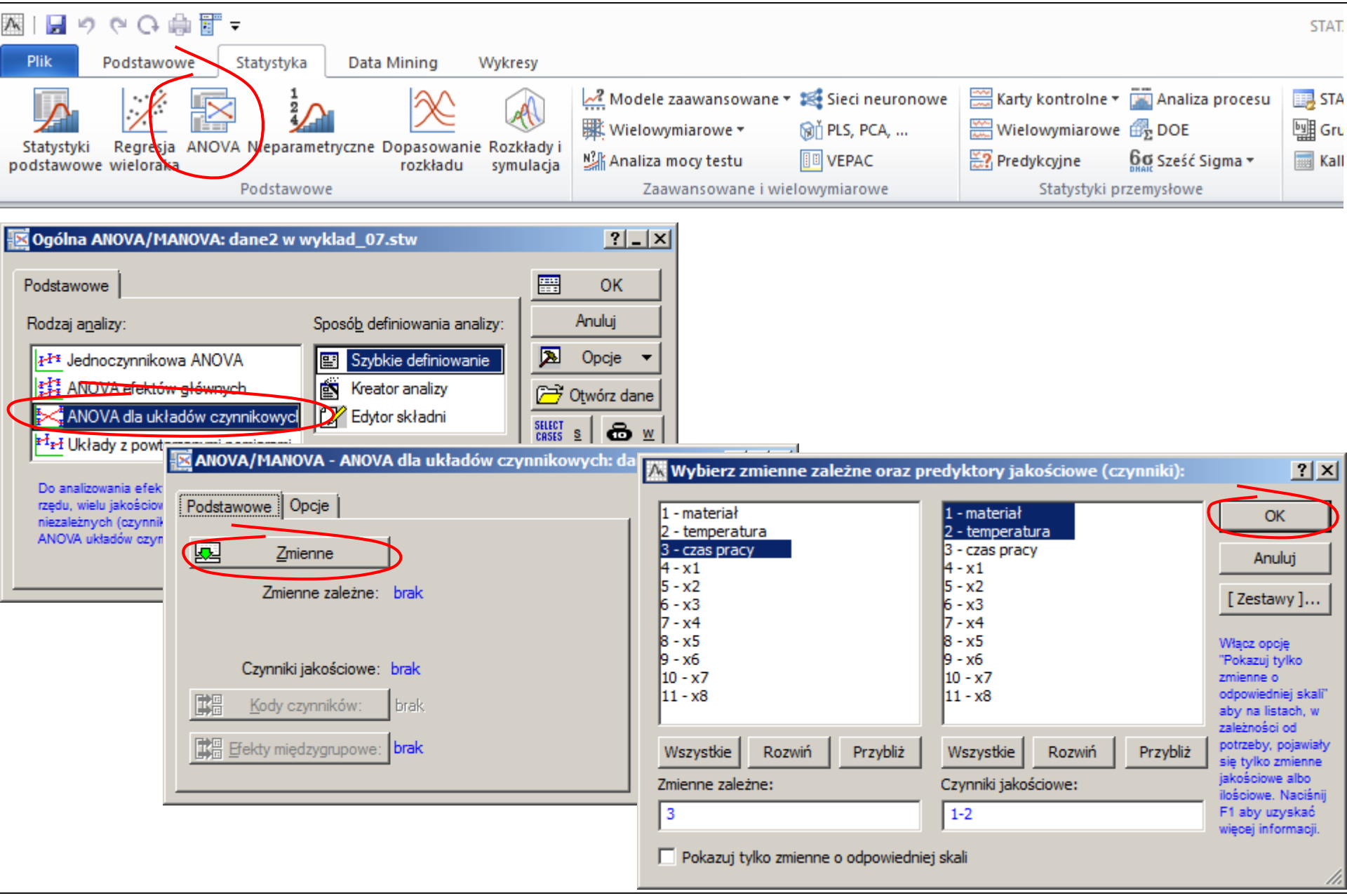
zmienne x1 i x2 kodują materiał:
mat.1: x1=1, x2=0, mat.2: x1=0, x2=1,
mat.3: x1= –1, x2= –1,

zmienne x3 i x4 kodują temperaturę:
15°F: x3=1, x4=0, 70°F: x3=0, x4=1,
125°F: x3= –1, x4= –1,

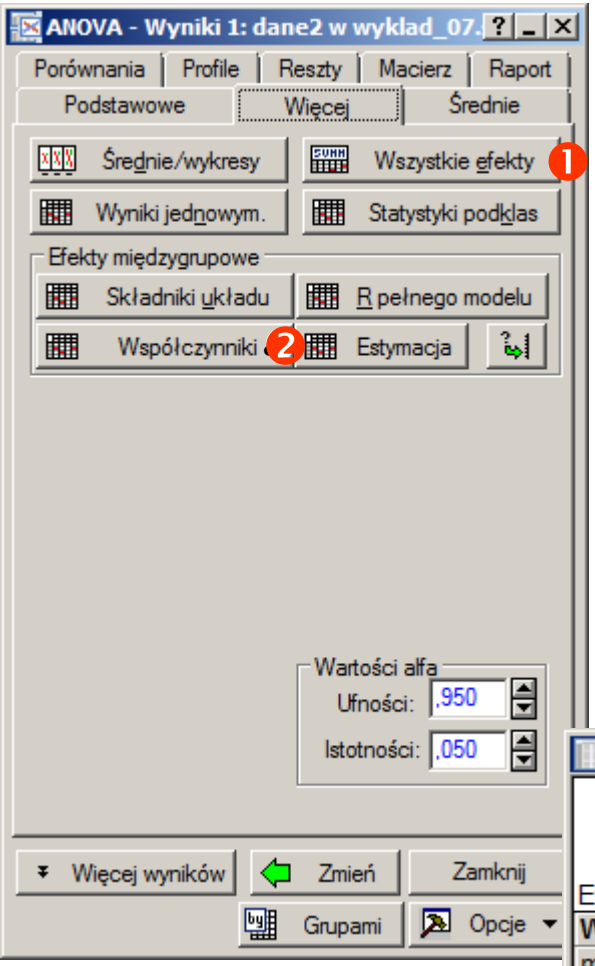
zmienne x5–x8 kodują interakcje:
x5 = x1·x3, x6 = x1·x4,
x7 = x2·x3, x8 = x2·x4.

* Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley

STATISTICA – dwuczynnikowa analiza wariancji (wykład 4)



STATISTICA – dwuczynnikowa analiza wariancji (wykład 4)



Dane: Jednowymiarowe testy istotności dla czas pracy (dane2 w wyklad_07.stw)*

Jednowymiarowe testy istotności dla czas pracy (dane2 w wyk
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami
Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
Wyraz wolny	400900,0	1	400900,0	593,7386	0,000000
materiał	10683,7	2	5341,9	7,9114	0,001976
temperatura	39118,7	2	19559,4	28,9677	0,000000
materiał*temperatura	9613,8	4	2403,4	3,5595	0,018611
Błąd	18230,7	27	675,2		

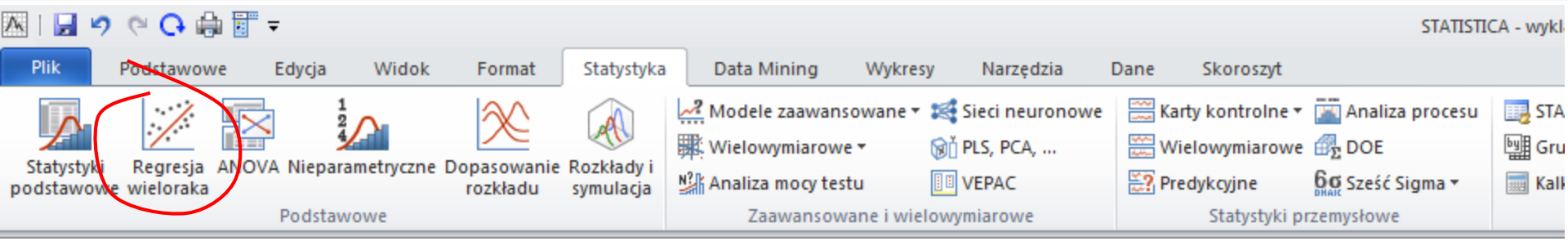
*Czas pracy baterii **zależy** od obydwu testowanych czynników oraz od ich interakcji.*

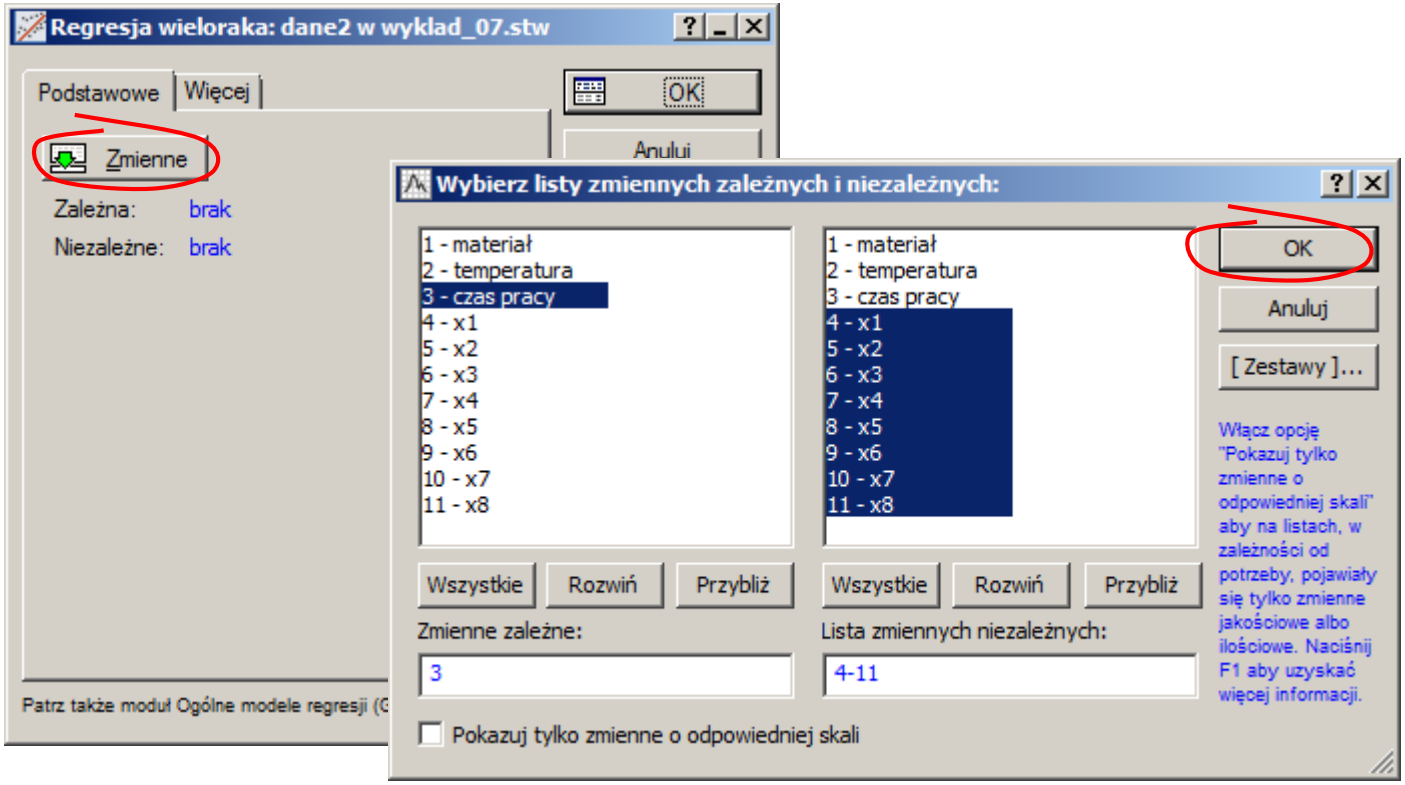
Dane: Oceny parametrów (dane2 w wyklad_07.stw)

Oceny parametrów (dane2 w wyklad_07.stw)
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami

Efekt	Poziom Efekt	Kolumna	czas pracy Param.	czas pracy Bł. std.	czas pracy t	czas pracy p
Wyraz wolny		1	105,5278	4,330810	24,36675	0,000000
materiał	1	2	-22,3611	6,124690	-3,65098	0,001106
materiał	2	3	2,8056	6,124690	0,45807	0,650565
temperatura	15	4	39,3056	6,124690	6,41756	0,000001
temperatura	70	5	2,0556	6,124690	0,33562	0,739753
materiał*temperatura	1	6	12,2778	8,661620	1,41749	0,167777
materiał*temperatura	2	7	-27,9722	8,661620	-3,22944	0,003250
materiał*temperatura	3	8	8,1111	8,661620	0,93644	0,357346
materiał*temperatura	4	9	9,3611	8,661620	1,08076	0,289364

STATISTICA – analiza regresji





STATISTICA – analiza regresji

Wyniki regresji wielorakiej: dane2 w wyklad_07.stw

```
 Wyniki regresji wielorakiej

Zmn. zależ.czas pracy       Wielor. R =   ,87476270     F = 10,99953
                                    R^2=   ,76520978    df =   8,27
Liczba przyp. 36            Popraw. R^2=   ,69564230     p =  ,000001
            Błąd standardowy estymacji:25,984860264
Wyr. wolny 105,52777778  Błąd std.: 4,330810  t(   27) = 24,367  p = 0,0000

          x1 b*=-,39            x2 b*=,049            x3 b*=,691
          x4 b*=,036            x5 b*=,176            x6 b*=-,40
          x7 b*=,116            x8 b*=,134


(istotne b* są podświetlone na czerwono)
```

Alfa do podświetlania efektów: ,05

OK

Podstawowe | Więcej | Reszty, założenia, predykcja

Podsumowanie: Wyniki regresji (1) | Korelacje częst

ANOVA (sum. dobroć dopasow.) (2) | Nadmiarowo

Kowariancja współczynników | Podsumowanie r. k

Aktualna macierz wymiany | ANOVA poprawiona

funkcja regresji istotna

Dane: Analiza wariancji ; DV: czas pracy (dane2 w wyklad_...

Analiza wariancji ; DV: czas pracy (dane2 w wyklad_07

(2) Efekt	Suma kwadrat.	df	Średnia kwadrat.	F	p
Regres.	59416,22	8	7427,028	10,99953	0,000001
Reszta	18230,75	27	675,213		
Razem	77646,97				

Dane: Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: czas pracy (dane2 w wyklad_07....

Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: czas pracy (dane2 w wyklad_07
R= ,87476270 R^2= ,76520978 Popraw. R2= ,69564230
F(8,27)=11,000 p<,00000 Błąd std. estymacji: 25,985

(1) N=36	b*	Bł. std. z b*	b	Bł. std. z b	t(27)	p
W. wolny			105,5278	4,330810	24,36675	0,000000
x1	-0,393130	0,107678	-22,3611	6,124690	-3,65098	0,001106
x2	0,049324	0,107678	2,8056	6,124690	0,45807	0,650565
x3	0,691031	0,107678	39,3056	6,124690	6,41756	0,000001
x4	0,036139	0,107678	2,0556	6,124690	0,33562	0,739753
x5	0,176245	0,124336	12,2778	8,661620	1,41749	0,167777
x6	-0,401536	0,124336	-27,9722	8,661620	-3,22944	0,003250
x7	0,116434	0,124336	8,1111	8,661620	0,93644	0,357346
x8	0,134377	0,124336	9,3611	8,661620	1,08076	0,289364

wyniki są identyczne jak w analizie wariancji (slajd 22)