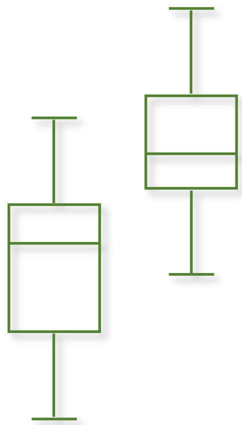
Planowanie doświadczeń

Proste eksperymenty porównawcze



Materiały

http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/

Proste eksperymenty porównawcze

Proste eksperymenty porównawcze (*ang. simple comparative experiments*)

- badają istotność wpływu zmiennej niezależnej na zmienną zależną,
- uwzględniana jest jedna zmienna zależna,
- uwzględniana jest jedna zmienna niezależna,
- zmienna niezależna może przyjmować jedynie wartości na dwóch poziomach.

.

poziom zmiennej niezależnej	numer doświadczenia			
	1	2	...	r
1				
2				

Proste eksperymenty porównawcze

Proste eksperymenty porównawcze wykonywane są wg. *planu randomizowanego kompletnego*.

Plan taki zakłada, że:

- doświadczenia wykonywane są w losowej kolejności,
- wartości zmiennej niezależnej są z góry określone (liczba wartości jest uzależniona od rodzaju przeprowadzanego badania, wartości nazywane są *poziomami*, w prostych eksperymentach porównawczych liczba poziomów wynosi 2).

poziom zmiennej niezależnej	numer doświadczenia			
	1	2	...	r
1				
2				

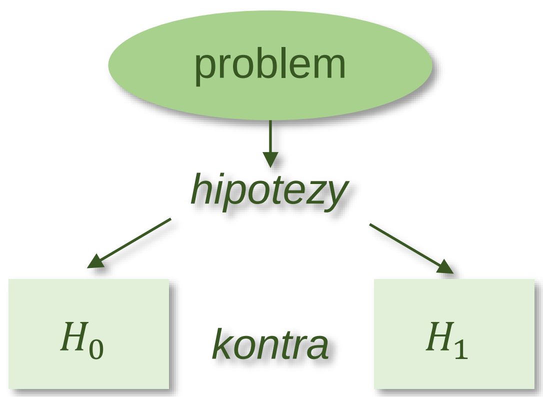
W *prostych eksperymentach porównawczych* **badanie istotności wpływu** można przeprowadzać weryfikując odpowiednie *hipotezy parametryczne*.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).



2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

3. Jeśli spełnione są określone warunki podjąć decyzję o odrzuceniu hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1.

Weryfikacja hipotez parametrycznych

W przypadku *hipotez parametrycznych*, sprawdzających wartość nieznanego parametru rozkładu:

- *hipoteza* H_0 zakłada, że wartość nieznanego parametru rozkładu θ wynosi θ_0, czyli:

$$H_0\colon\ \theta = \theta_0$$

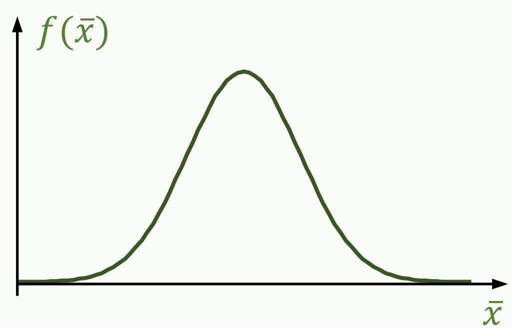
- *hipoteza* H_1 ma najczęściej jedną z postaci:

a) $H_1\colon\ \theta < \theta_0$, *b)* $H_1\colon\ \theta \neq \theta_0$, *c)* $H_1\colon\ \theta > \theta_0$,

- *statystyka testowa* jest estymatorem weryfikowanego parametru rozkładu.

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- $H_0\colon\ \mu = 10$
- $H_1\colon\ \mu < 10$
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$



Weryfikacja hipotez statystycznych

Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej (wersja 1)

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).

2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

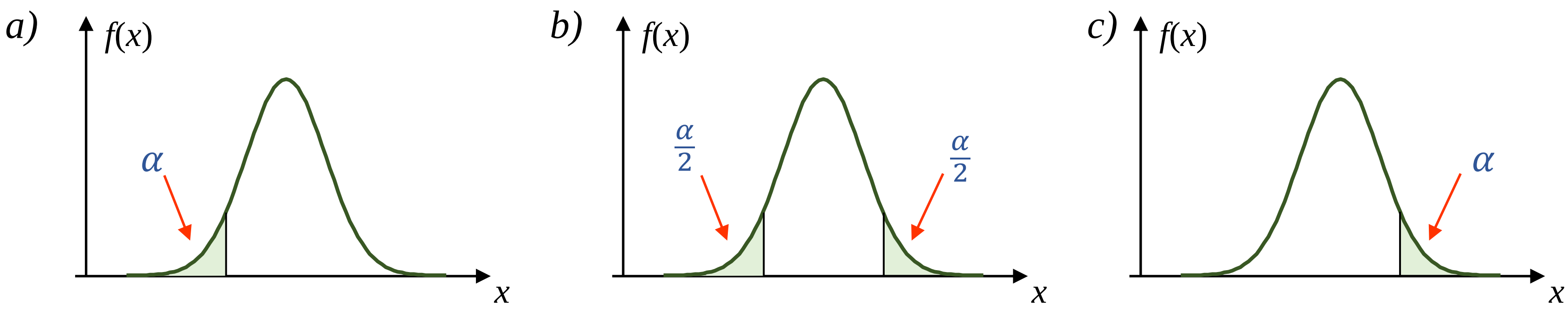
3. Wyznaczyć w oparciu o przyjęty *poziom istotności* α tzw. *obszar krytyczny* (obszar odrzucenia hipotezy H_0) i w przypadku gdy:

   - wartość *statystyki testowej* **należy** do *obszaru krytycznego* **odrzucić** hipotezę H_0 i przyjąć hipotezę H_1,
   - wartość *statystyki testowej* **nie należy** do *obszaru krytycznego* to nie odrzucać hipotezy H_0.

Obszar krytyczny

Obszar krytyczny jest wyznaczany w oparciu o rozkład przyjętej statystyki testowej, założony *poziom istotności* α i postać *hipotezy alternatywnej*.

> *Poziom istotności* α jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu polegającego na **odrzuceniu prawdziwej** hipotezy H_0, jest to tzw. *błąd pierwszego rodzaju*.

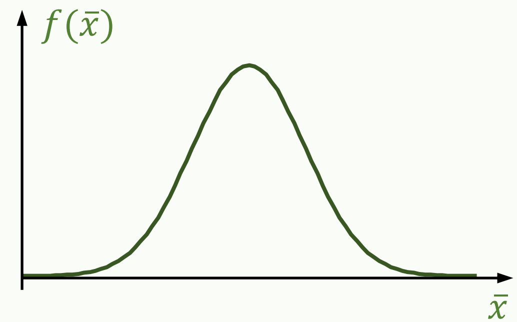


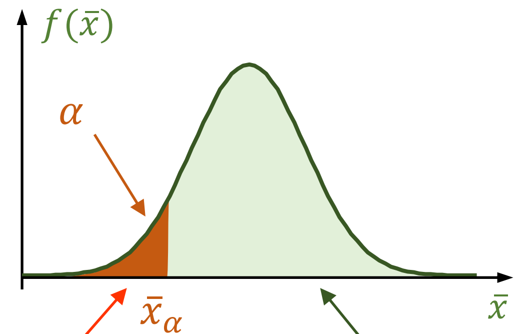
Obszar krytyczny a) lewostronny $H_1: \theta < \theta_0$, *b) obustronny* $H_1: \theta \neq \theta_0$, *c) prawostronny* $H_1: \theta > \theta_0$

Weryfikacja hipotez statystycznych

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- H_0: μ =10
- H_1: μ < 10
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$





odrzucić H_0 *i przyjąć* H_1
(obszar krytyczny)

$$P(\bar{x} < \bar{x}_\alpha) = \alpha$$

nie można odrzucić H_0

Weryfikacja hipotez statystycznych

Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej (wersja 2)

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).

2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

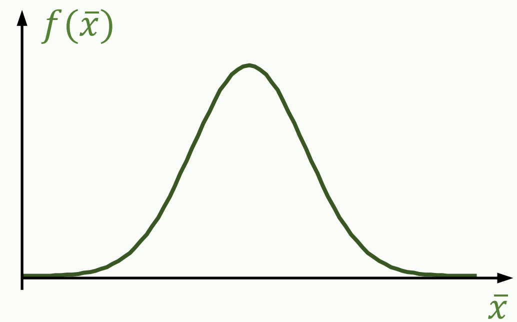
3. Wyznaczyć *graniczny poziom istotności* (ang. $p - value$, pol. $p - wartość$) tzn. najmniejszy *poziom istotności* przy którym hipoteza H_0 może zostać odrzucona i w przypadku gdy:

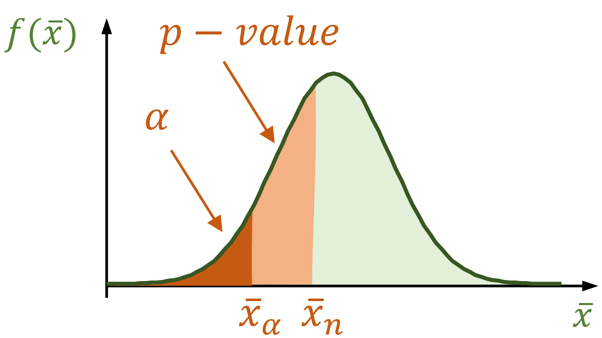
   - *poziom istotności* α jest **większy** od *poziomu granicznego* $p - value$ to **odrzucić** hipotezę H_0 i przyjąć hipotezę H_1,
   - *poziom istotności* α jest **mniejszy** od *poziomu granicznego* $p - value$ to to nie odrzucać hipotezy H_0.

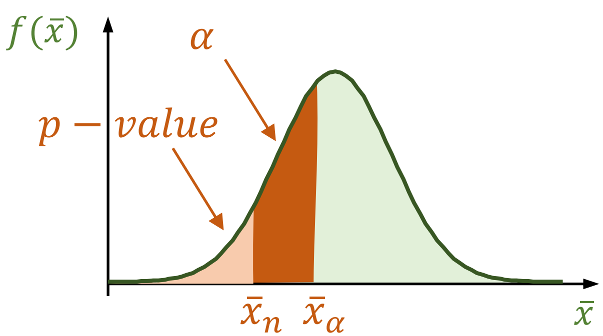
Weryfikacja hipotez statystycznych

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- H_0: $\mu = 10$
- H_1: $\mu < 10$
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$







$P(\bar{x} < \bar{x}_\alpha) = \alpha$

$P(\bar{x} < \bar{x}_n) = p - value,$ $\bar{x}_n$ *– wartość statystyki testowej*

odrzucić H_0 *i przyjąć* H_1 *jeśli* $\alpha > p - value$

Weryfikacja hipotez dla średniej

Statystyką testową wykorzystywaną podczas weryfikacji hipotez o wartości średniej w populacji μ jest średnia z próby $\bar{x}$. Rozkład statystyki testowej, czyli w tym przypadku średniej z próby, jest zależny od posiadanej wiedzy o populacji:

- jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym **znane** jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n},$$

- jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym **nie jest znane** odchylenie standardowe populacji σ (i nie można przyjąć, że $\sigma \approx s$ ponieważ n jest małe, tzn. $n < 30$) to po podstawieniu odchylenia z próby do statystyki testowej otrzymuje się jej nową postać (patrz: przedział ufności dla μ):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n-1},$$

statystyka ta ma rozkład *t – Studenta* o $(n-1)$ stopniach swobody.

Weryfikacja hipotez dla średniej

Rozkład pomiarów długości detalu jest rozkładem normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 1{,}5$. Na podstawie 10 niezależnych pomiarów długości detalu wyznaczono jego średnią długość równą ok. $20{,}34$. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że rzeczywista długość detalu wynosi 20.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu = 20$, wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1\colon \mu \neq 20$.

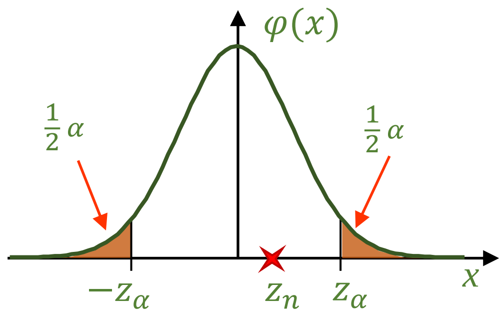
2. Znane jest odchylenie standardowe więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (zakładając, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$$z_n = \frac{20{,}34 - 20}{1{,}5}\sqrt{10} \approx 0{,}72.$$

3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:

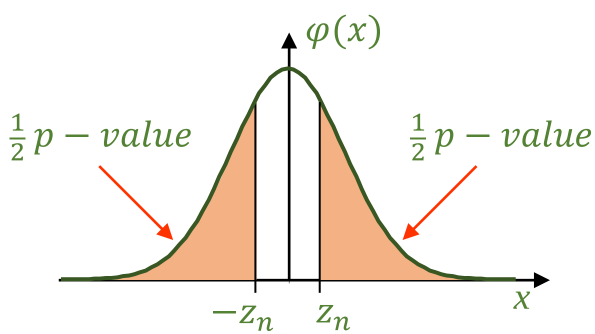


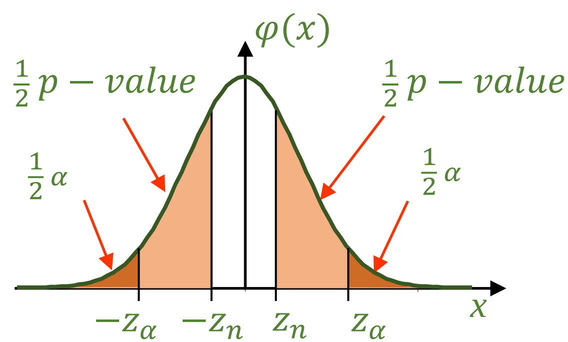
$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}58.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje **poza** *obszarem krytycznym* ($|z_n| < |z_\alpha|$) więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\frac{1}{2}\,p\text{–}value = \Phi(-z_n) = \Phi(-0{,}72) \approx 0{,}24 \quad \rightarrow p\text{–}value \approx 0{,}48.$$





Ponieważ założony *poziom istotności* α **jest mniejszy** od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez dla średniej

Automat produkuje detale o nominalnej długości 20. Wykonano 10 niezależnych pomiarów długości pewnego detalu otrzymując wyniki: 20, 21, $22{,}4$, 23, $21{,}3$, $21{,}9$, $20{,}6$, 21, $19{,}8$, $20{,}4$. Czy obliczona średnia długość detalu równa $21{,}14$ pozwala na stwierdzenie, że rzeczywista długość jest większa od nominalnej. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu = 20$, wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1\colon \mu > 20$.

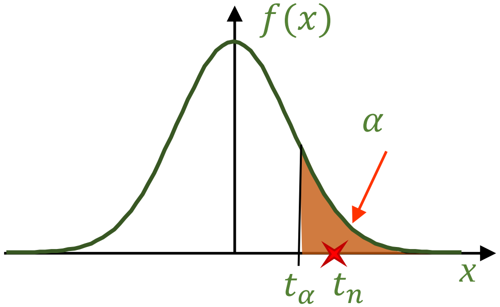
2. W przypadku gdy odchylenie standardowe populacji nie jest znane, do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testowa:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s}\sqrt{n-1}.$$

Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (zakładając, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$s \approx 0{,}98,$ $\qquad t_n = \frac{21{,}14-20}{0{,}98}\sqrt{9} \approx 3{,}49.$

3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty $F_{t(n-1)}$



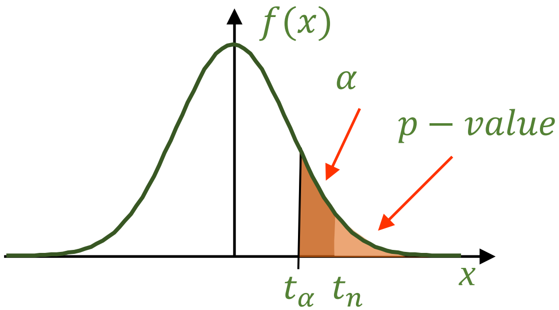
$$t_\alpha = F^{-1}_{t(9)}(1-\alpha) = F^{-1}_{t(9)}(0{,}99) \approx 2{,}82,$$

$$t_\alpha = -F^{-1}_{t(9)}(\alpha) = -F^{-1}_{t(9)}(0{,}01) \approx 2{,}82.$$

Obliczona wartość statystyki testowej znajduje **wewnątrz** *obszaru krytycznego* $(t_n > t_\alpha)$, więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** i przyjąć hipotezę alternatywną H_1.

Z prawdopodobieństwem błędu mniejszym od $0{,}01$ można twierdzić, że długość detalu jest większa od nominalnej.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $F_{t(n-1)}$:



$$p\text{–}value = F_{t(n-1)}(-t_n) = F_{t(9)}(-3{,}49) \approx 0{,}003.$$

Ponieważ założony *poziom istotności* α jest **większy** od obliczonej wartości $p - value$ więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** i przyjąć hipotezę alternatywną H_1.

STATISTICA – weryfikacja hipotez statystycznych

Wynikiem działania testów statystycznych w STATISTICE są graniczne poziomy istotności $p-value$.

Decyzję o **odrzuceniu** hipotezy H_0 można podjąć, gdy:

założony *poziom istotności* α jest **większy** od *poziomu granicznego* $p-value$.

O **braku podstaw** do odrzucenia hipotezy H_0 świadczy:

poziom istotności α **mniejszy** od *granicznego poziomu istotności* $p-value$.

Uwagi:

- w przypadku kilku testów nie ma możliwości określenia wartości poziomu α (domyślnie $\alpha = 0{,}05$),
- część funkcji dostępnych w programie przeprowadza obliczenia dla testów dwustronnych, oznacza to, że dla statystyki testowej o symetrycznym rozkładzie wartości $p-value$ dla testu jednostronnego można wyznaczyć z zależności:

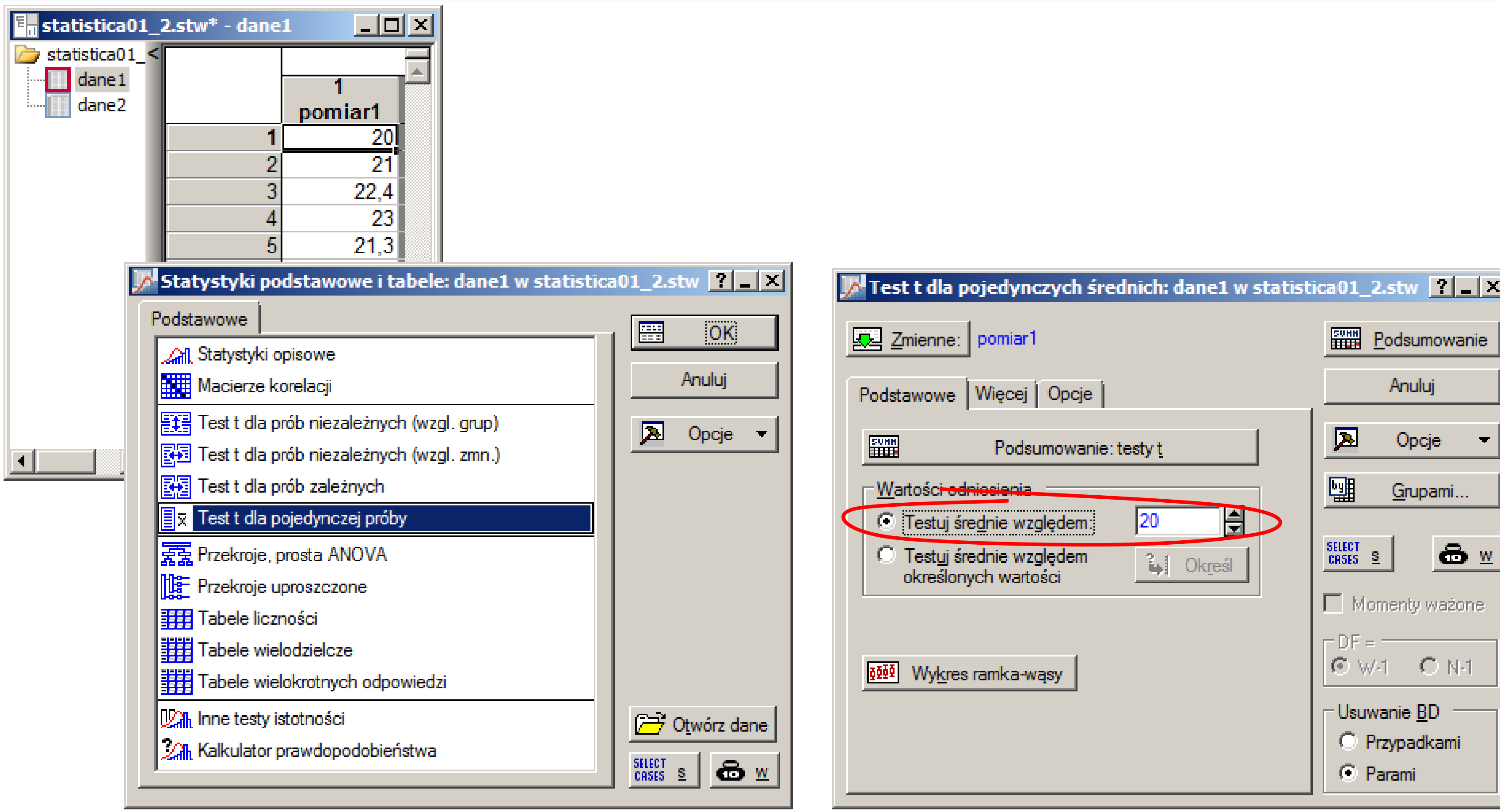
$$p_1 = \frac{1}{2}\,p_{12} \qquad \text{i} \qquad p_2 = 1 - \frac{1}{2}\,p_{12},$$

gdzie: p_1, p_2, p_{12} – $p-value$ dla testów jednostronnych i dla testu dwustronnego,

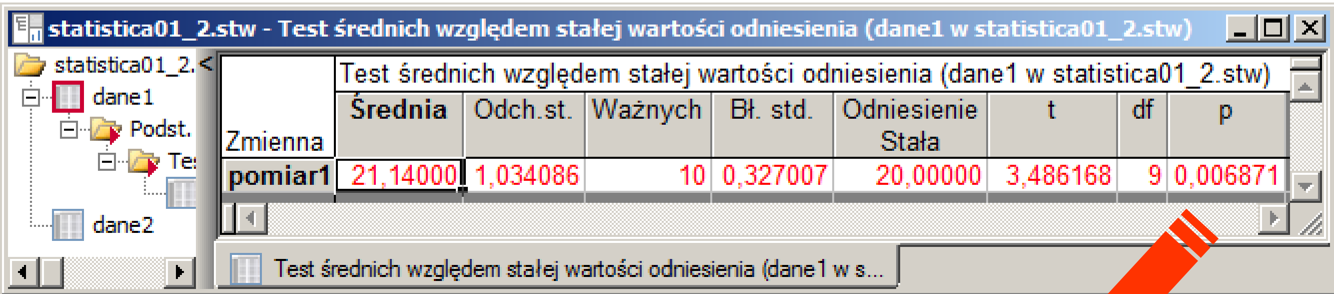
- dla ułatwienia, wyniki testów, które dla ustalonego poziomu istotności α wymagają odrzucenia hipotezy H_0 zaznaczane są na czerwono.

STATISTICA – weryfikacja hipotez dla średniej

Automat produkuje detale o nominalnej długości 20. Wykonano 10 niezależnych pomiarów długości pewnego detalu i zapisano je w arkuszu *dane1* w zmiennej *pomiar1*. Czy obliczona średnia długość detalu równa 21,14 pozwala na stwierdzenie, że rzeczywista długość jest większa od nominalnej. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.



STATISTICA – weryfikacja hipotez dla średniej



Test średnich względem stałej wartości odniesienia (dane1 w statistica01_2.stw)

Zmienna	Średnia	Odch.st.	Ważnych	Bł. std.	Odniesienie Stała	t	df	p
pomiar1	21,14000	1,034086	10	0,327007	20,00000	3,486168	9	0,006871

- $p - value = 0{,}006871$ jest wartością dla testu dwustronnego, w przykładzie należy przeprowadzić test prawostronny, ze względu na symetrię rozkładu *t – Studenta* $p - value$ dla testów jednostronnych otrzymuje się jako:

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}006871 = 0{,}0034 \quad \text{i} \quad p_2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}006871 = 0{,}9966\,,$$

- **mniejsza** z wartości $p - value$ dotyczy hipotezy H_1 **zgodnej** ze średnią otrzymaną z próby, tzn. w tym przypadku hipotezy $H_1\colon \mu > 20$, ostatecznie więc:

$$p - value = 0{,}0034,$$

założony poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ jest **większy** od poziomu granicznego $p - value$ więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** na rzecz hipotezy H_1 o większej od nominalnej średniej długości detalu.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Hipotezy dotyczące równości dwóch średnich sprawdzane są w celu wyjaśnienia przypadkowej lub nieprzypadkowej rozbieżności pewnego parametru populacji. W takim przypadku wykonywane są dwie serie pomiarów, dla każdej z nich obliczana jest średnia. Weryfikacja hipotezy sprowadza się do zbadania różnicy pomiędzy wyznaczonymi średnimi. Rozkład statystyki testowej, jest zależny od posiadanej wiedzy o populacjach. jeżeli populacje generalne mają rozkład odpowiednio: $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ przy czym

- **znane** są odchylenia standardowe populacji σ_1 i σ_2, do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

- odchylenia standardowe populacji σ_1 i σ_2 **nie są znane ale są równe** $(\sigma_1 = \sigma_2)$, do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o $(n_1 - n_2 - 2)$ stopniach swobody:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

gdzie: $s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}$.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Wykonano 2 serie pomiarów długości detalu z jednakową dokładnością $\sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}5$. W pierwszej serii przeprowadzono 10 pomiarów: 18, 21, $22{,}4$, 23, $21{,}3$, $21{,}9$, $17{,}6$, 21, $17{,}8$, $19{,}4$ a w drugiej 8 pomiarów: $22{,}1$, $20{,}3$, $21{,}4$, $23{,}1$, $21{,}1$, $21{,}8$, $20{,}6$, $22{,}8$. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że rozbieżność średnich jest nieprzypadkowa.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0: \mu_1 = \mu_2$ wobec *h. alternatywnej* $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Odchylenia standardowe są znane więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

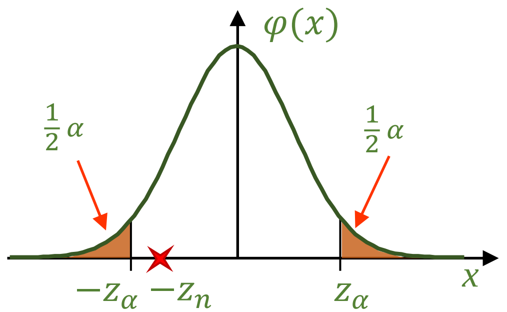
Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$\overline{x}_1 = 20{,}34$, $\overline{x}_2 = 21{,}65$,

$$z_n = \frac{20{,}34 - 21{,}65}{\sqrt{\dfrac{1,5^2}{10} + \dfrac{1,5^2}{8}}} = \frac{-1{,}31}{1{,}5\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{8}}} \approx -1{,}84.$$

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

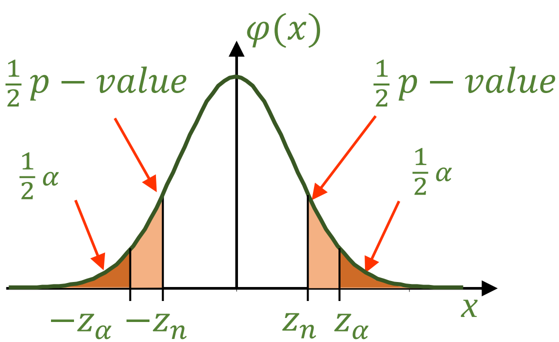
3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:



$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}58.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje **poza** *obszarem krytycznym* ($|z_n| < |z_\alpha|$) więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:



$$\frac{1}{2}\,p\text{-}value = \Phi(-z_n) = \Phi(-1{,}84) \approx 0{,}033,$$

$$p\text{-}value \approx 0{,}066.$$

Ponieważ założony *poziom istotności* α jest **mniejszy** od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Przyjmując założenie, że odchylenia standardowe populacji $\sigma_1 = \sigma_2$ ale **nie są znane** należy zadanie rozwiązać w podobny sposób zmieniając jedynie statystykę testową.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ wobec *h. alternatywnej* $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Odchylenia standardowe nie są znane więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testową:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

gdzie: $s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}$.

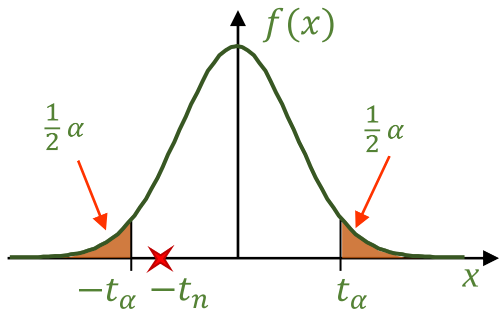
Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$\overline{x}_1 = 20{,}34$, $\overline{x}_2 = 21{,}65$, $s_1 \approx 2{,}00$, $s_2 \approx 1{,}00$, $s \approx 1{,}64,$

$$t_n = \frac{20{,}34 - 21{,}65}{1{,}64\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} \approx -1{,}69.$$

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $t(16)$:



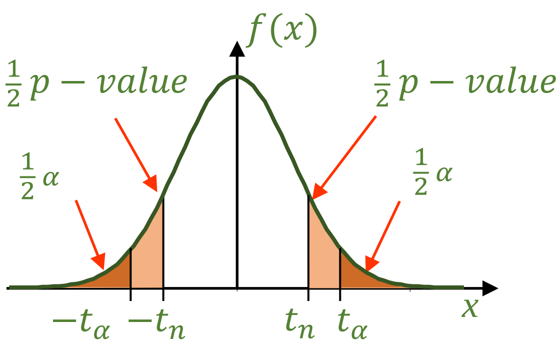
$$t_\alpha = -F^{-1}_{t(16)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F^{-1}_{t(16)}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}92\,.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje poza *obszarem krytycznym* $(|t_n| < |t_\alpha|)$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\frac{1}{2}p\text{-}\,value = F_{t(16)}(-t_n) = F_{t(16)}(-1{,}69) \approx 0{,}055$$

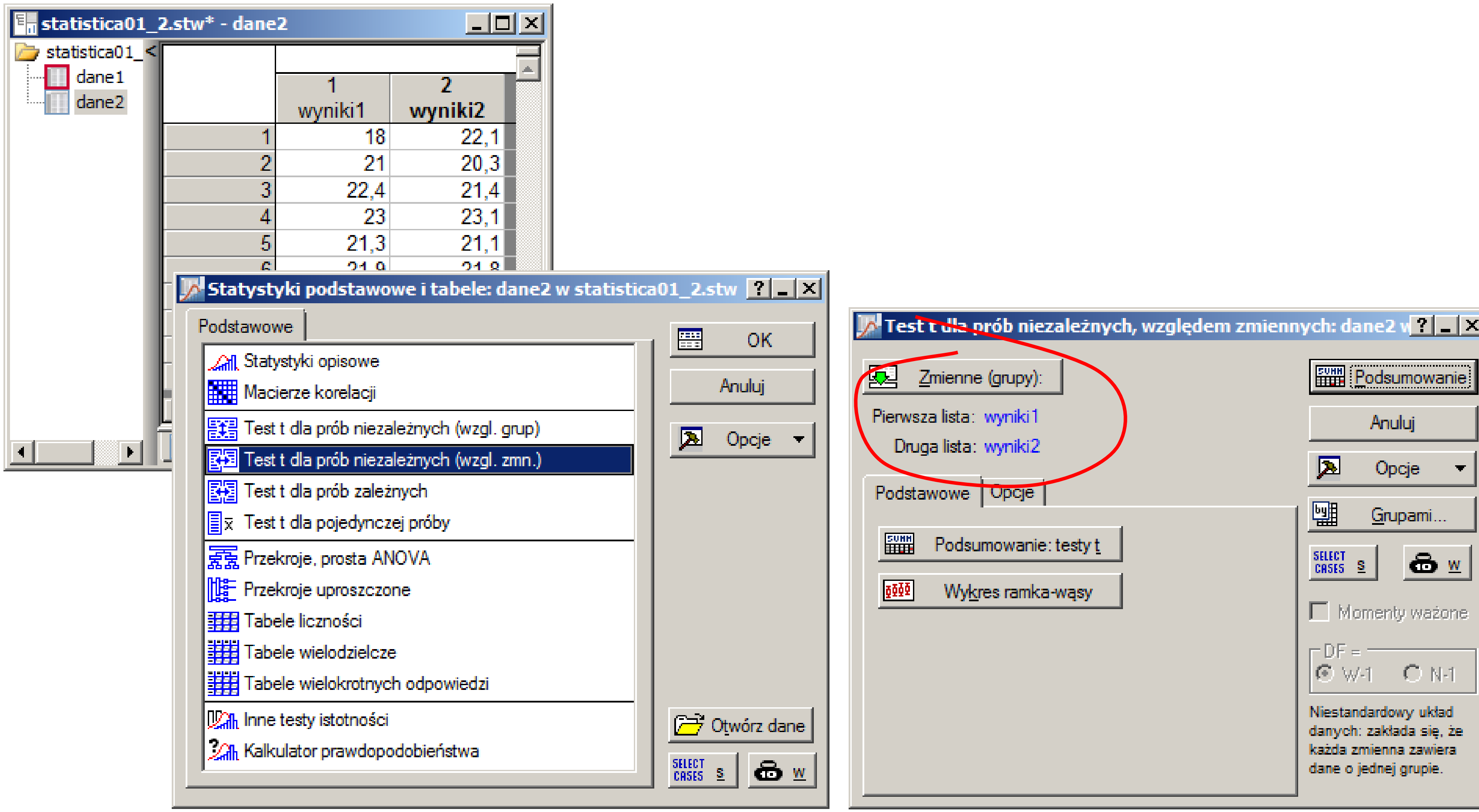
$$p\text{-}\,value \approx 0{,}11.$$



Ponieważ założony *poziom istotności* α jest mniejszy od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Wykonano dwie serie pomiarów długości detalu z jednakową dokładnością. Wyniki zapisano w arkuszu *dane2*, w zmiennych *wyniki1* i *wyniki2*. Zweryfikować na poziomie istotności hipotezę, że rozbieżność średnich jest nieprzypadkowa.



Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

statistica01_2.stw - Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)
Uwaga: Zmienne traktowane są jako niezależne próby.

Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa1	Średnia Grupa2	t	df	p	Nważn. Grupa1	Nważn. Grupa2	Odch.std Grupa1	Odch.std Grupa2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
wyniki1 vs. wyniki2	20,34	21,65	-1,6885	16	0,1107	10	8	1,996219	0,995705	4,019340	0,080154

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

wyniki testu o równości średnich

- $p - value = 0{,}1107$ jest wartością dla testu dwustronnego (tzn. testu który należało przeprowadzić),
- poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ jest **mniejszy** od granicznego poziomu istotności $p - value$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 – nie można więc stwierdzić, że średnie różnią się od siebie w sposób istotny.

Weryfikacja hipotez o równości wariancji dwóch populacji

Hipotezy dotyczące równości dwóch wariancji sprawdzane są w celu wyjaśnienia przypadkowej lub nieprzypadkowej rozbieżności dokładności dwóch serii pomiarów.

Przy założeniu, że populacje generalne mają rozkład: $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ i nie są znane parametry tych rozkładów, do weryfikacji hipotezy o równości wariancji wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie ***F Snedecora (Fishera)*** o $v_1 = n_1 - 1$ i $v_2 = n_2 - 1$ stopniach swobody (n_1, n_2 – liczebności prób losowanych z obydwu populacji):

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

gdzie: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

Uwagi:

- Oznaczenia populacji przyjmowane są w taki sposób, że:

$$s_1^2 > s_2^2.$$

- Hipoteza alternatywna H_1 (wobec hipotezy zerowej $H_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) formułowana jest w postaci:

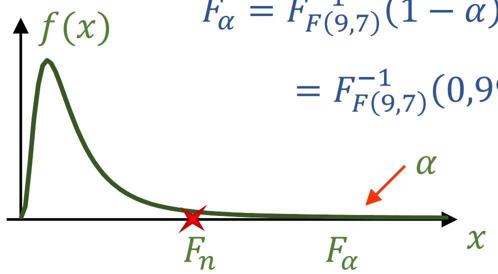
$$H_1\colon\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Weryfikacja hipotez o równości wariancji dwóch populacji

Dla danych ze slajdu 19. zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę o jednakowej wariancji obydwu serii pomiarów.

Wartość statystyki testowej wynosi: $F_n = \frac{s_1^2}{s_2^2} \approx \frac{2^2}{1^2} = 4 \;\; (s_1 \approx 2{,}00,\ s_2 \approx 1{,}00).$

Obszar krytyczny



$$F_\alpha = F_{F(9,7)}^{-1}(1-\alpha) =$$
$$= F_{F(9,7)}^{-1}(0{,}99) \approx 6{,}72.$$

Graniczny poziom istotności

$$p\text{–}value = 1 - F_{F(9,7)}(F_n) \approx 1 - 0{,}96 = 0{,}04.$$

Wartość statystyki testowej **poza** *obszarem krytycznym*, poziom istotności α jest **mniejszy** od $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

statistica01_2.stw - Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)
Uwaga: Zmienne traktowane są jako niezależne próby.

Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa1	Średnia Grupa2	t	df	p	Nważn. Grupa1	Nważn. Grupa2	Odch.std Grupa1	Odch.std Grupa2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
wyniki1 vs. wyniki2	20,34	21,65	-1,6885	16	0,1107	10	8	1,996219	0,995705	4,019340	0,080154

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

wyniki testu o równości wariancji

$p - value = 0{,}080154$ jest wartością dla testu dwustronnego,

dla testu jednostronnego $p - value = 0{,}040077.$

Proste eksperymenty porównawcze

Badano wpływ materiału trącego na czas obróbki pewnego detalu. Wykonano 10 pomiarów dla pierwszego materiału trącego i 8 dla drugiego. Zakładając, że czas obróbki dla obydwu materiałów ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym $1{,}5$ minuty zweryfikować hipotezę o braku istotności wpływu materiału trącego (slajd 20).

Pomiary wykonano wg. planu randomizowanego kompletnego (doświadczenia w losowej kolejności, na dwóch poziomach: *materiał*$_1$ i *materiał*$_2$) i zapisano w poniższej tablicy.

materiał	numer doświadczenia									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	21	22,4	23	21,3	21,9	17,6	21	17,8	19,4
2	22,1	20,3	21,4	23,1	21,1	21,8	20,6	22,8		

Rozwiązanie:

- postawione zostały hipotezy $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ i $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$..
- weryfikacja hipotezy dała *graniczny poziom istotności* $p - value = 0{,}066$, dla *poziomu istotności* $\alpha = 0{,}01$ nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy H_0,
- **wykorzystywany materiał nie ma istotnego wpływu na czas obróbki detalu**.

Statystyka matematyczna – błąd I i II rodzaju

W procesie weryfikacji hipotezy statystycznej można popełnić:

- *błąd I rodzaju* polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa (*poziom istotności* α to prawdopodobieństwo popełnienia *błędu I rodzaju*),
- *błąd II rodzaju* polegający na nieodrzuceniu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* oznaczane jest jako β).

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	**Decyzja**	
	nie odrzucać H_0	odrzucić H_1
prawdziwa	*decyzja poprawna*	błąd I rodzaju α
fałszywa	błąd II rodzaju β	*decyzja poprawna*

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu statystycznego to prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie **poprawnej decyzji** w przypadku gdy **hipoteza zerowa jest fałszywa** (tzn. odrzucenie hipotezy na rzecz hipotezy alternatywnej), moc testu opisuje więc zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych.

Istnieje ścisła zależność pomiędzy mocą testu a liczebnością próby:

im większa liczebności próby → tym większa moc testu.

Przyjmuje się, że moc testu powinna wynosić co najmniej $0{,}8$, tzn. prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* nie może być wyższe niż $0{,}2$, wartości te pozwalają na wykrywanie znaczących odchyleń od wartości postulowanych w hipotezie zerowej.

Przedmiotem kontroli jest proces napełniania butelek wodą. Zakładając, że rozkład ilości wody jest rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym $\sigma = 0{,}1$, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ należy sprawdzić czy istnieją dowody na to, że ilość wody w napełnianych butelkach jest mniejsza niż $\mu_0 = 1$.

W zadaniu należy więc zweryfikować *hipotezę zerową*

$$H_0: \mu_0 = 1,$$

wobec *hipotezy alternatywnej*

$$H_1: \mu_0 < 1,$$

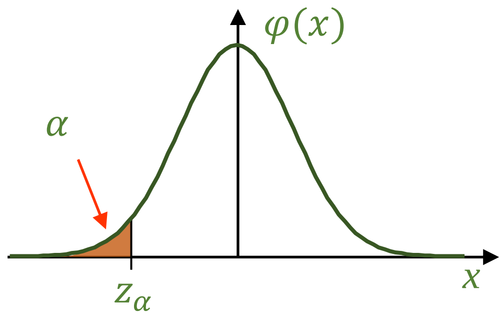
Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ i do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest standaryzowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}},$$

$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Obszar krytyczny wyznacza się jako:

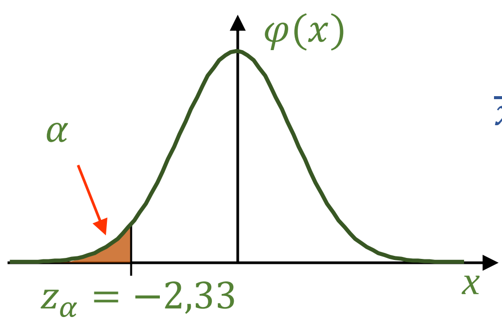


$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0{,}01) \approx -2{,}33.$$

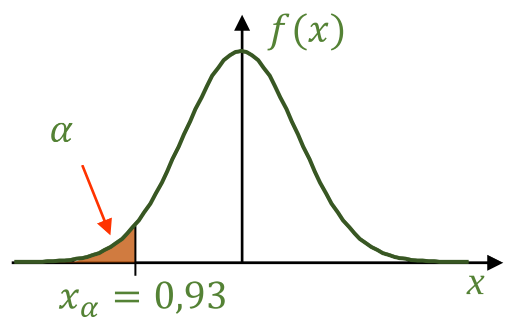
Otrzymana wartość graniczna jest wartością standaryzowaną (została obliczona z rozkładu normalnego standaryzowanego $\mathcal{N}(0,1)$). Rzeczywistą wartość graniczną otrzymuje się z zależności:

$$z_\alpha = \frac{\bar{x}_\alpha - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_\alpha = z_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0.$$

Zakładając, że do kontroli pobranych zostanie 10 butelek, średnia ilość wody w butelkach, która umożliwi odrzucenie hipotezy zerowej wynosi:



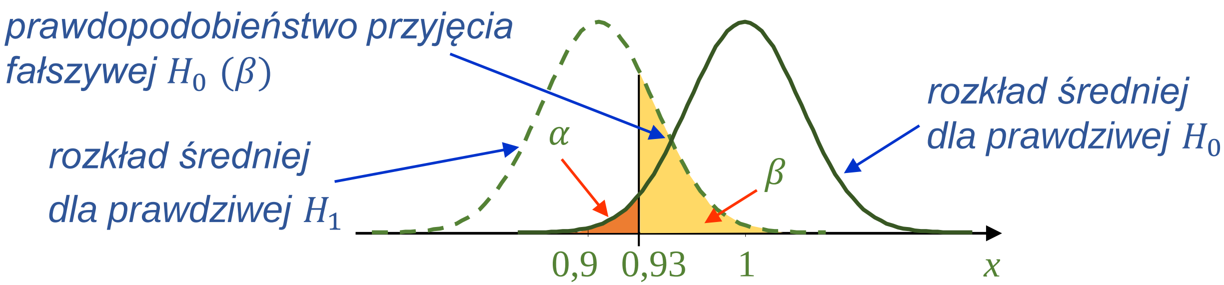
$$\bar{x}_\alpha = -2{,}33\frac{0{,}1}{\sqrt{10}} + 1 \approx 0{,}93$$



Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu opisuje zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych. Załóżmy, że :

$H_0\colon \mu_0 = 1$ (*fałszywa*) $H_1\colon \mu_1 = 0{,}9$ (*prawdziwa*)



Jeśli hipoteza H_0 jest fałszywa to test statystyczny dla wartości średnich:

- mniejszych od $0{,}93$ odrzuci hipotezę H_0 (decyzja poprawna)
- większych od $0{,}93$ nie odrzuci fałszywej hipotezy H_0 (decyzja błędna),

prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju β)* wyniesie w tym przypadku:

$$\beta = P(\bar{x} > \bar{x}_\alpha) = 1 - P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}93 - 0{,}9}{0{,}1/\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}2.$$

Moc testu (prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie poprawnej decyzji w przypadku gdy H_0 jest fałszywa) jest w tym przypadku akceptowalna i wynosi: $(1-\beta) = 0{,}8$.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Dla rozważanego w przykładzie testu lewostronnego wzór na ***moc*** można po przekształceniach:

$$1-\beta = P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = F_{\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{z_\alpha\sigma_{\bar{x}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right),$$

zapisać w postaci ogólnej jako:

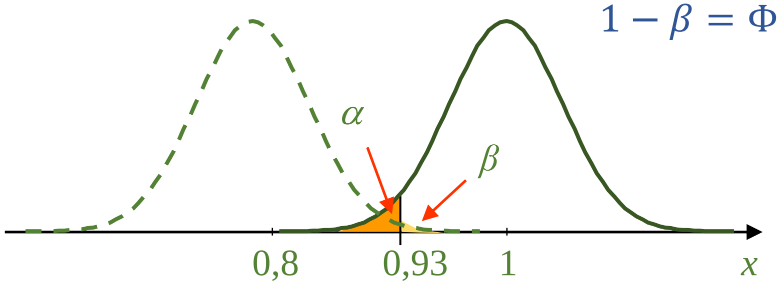
$$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + z_\alpha\right), \qquad z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha).$$

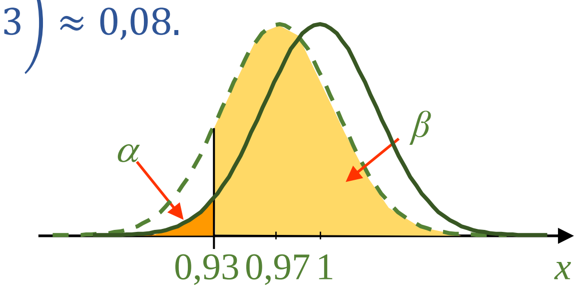
Oznacza to, że przy założeniu, że rzeczywista średnia $\mu_1 = 0{,}8$, moc testu ma wartość:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{1-0{,}8}{0{,}1/\sqrt{10}} - 2{,}33\right) \approx 1,$$

dla rzeczywistej średniej $\mu_1 = 0{,}97$, moc testu spadłaby poza dopuszczalne granice:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{1-0{,}97}{0{,}1/\sqrt{10}} - 2{,}33\right) \approx 0{,}08.$$





Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Zależność na moc testu:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}+z_\alpha\right),$$

pozwala na szacowanie minimalnej liczebności próby dla określonej mocy testu. Wiedząc, że $\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}$, liczebność próby n otrzymuje się po przekształceniach:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_\alpha\right) \longrightarrow \Phi^{-1}(1-\beta)=\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_\alpha \longrightarrow z_{1-\beta}-z_\alpha=\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\frac{(z_{1-\beta}-z_\alpha)\sigma}{\sqrt{n}}=\mu_0-\mu_1 \longrightarrow n=\left(\frac{(z_{1-\beta}-z_\alpha)\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2,$$

$$z_\alpha=\Phi^{-1}(\alpha),\ z_{1-\alpha}=-z_\alpha,\ z_{1-\beta}=\Phi^{-1}(1-\beta).$$

Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Załóżmy, że należy wyznaczyć minimalną liczebność próby, która umożliwi wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0{,}97$ z mocą $(1-\beta) = 0{,}8$.

Korzystając z zależności:

$$n = \left(\frac{\left(z_{1-\beta} - z_\alpha\right)}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2 \sigma^2,$$

wyznacza się kolejno:

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}01) \approx -2{,}32, \quad z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}84,$$

$$n = \left(\frac{0{,}84 + 2{,}32}{0{,}97 - 1}\right)^2 0{,}1^2 \approx 111{,}51.$$

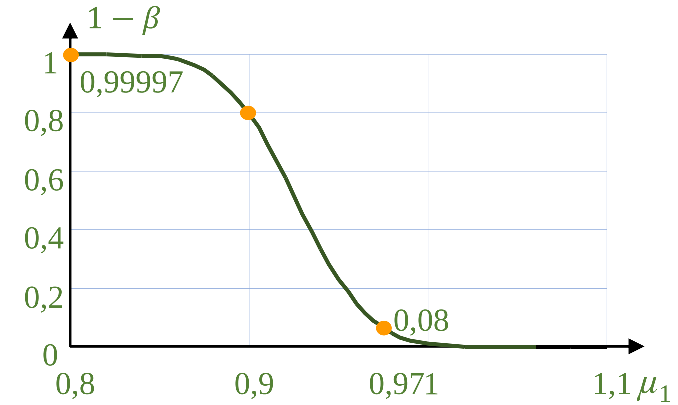
Z przeprowadzonej analizy wynika, że wykrycie spadku ilości wody w napełnianych butelkach z nominalnej $\mu_0 = 1$ do $\mu_1 = 0{,}97$ będzie możliwe z mocą o $(1-\beta) = 0{,}8$

o ile do testu zostanie wykorzystanych co najmniej 112 butelek wody.

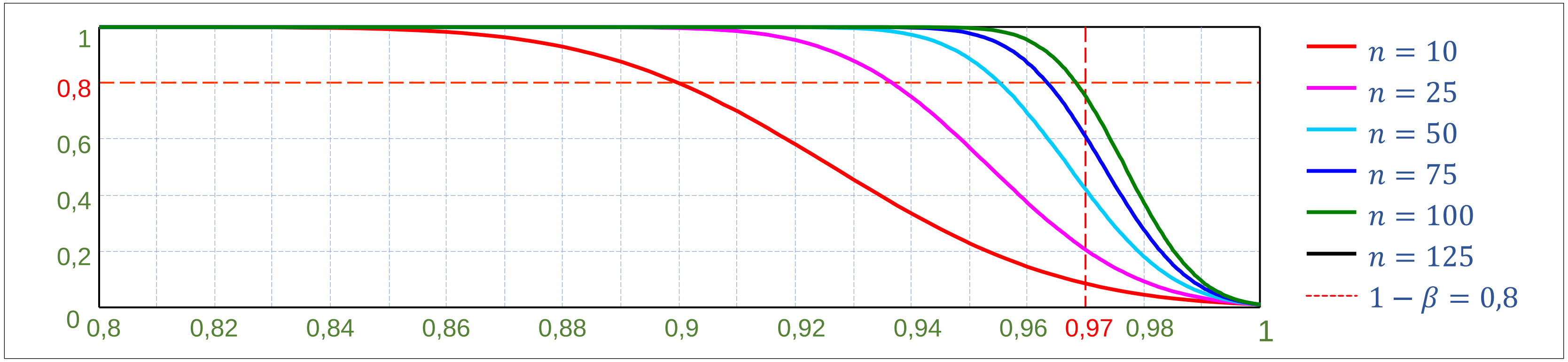
Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Zmiany mocy testu w zależności od rzeczywistej wartości średniej przedstawiane są na wykresach mocy:

Im większa odległość rzeczywistej średniej od weryfikowanej wartości tym większa moc testu.



Wykreślenie krzywych dla różnych rozmiarów próby pozwala na oszacowanie minimalnej liczebności próby z wykresu, np. wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0{,}97$ z mocą $(1-\beta) = 0{,}8$ umożliwi test wykonany dla próby o liczebności $n \approx 112$.



Hipoteza o średniej (znane σ) – moc i rozmiar próby

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}.$$

Test	Moc testu i minimalna liczebność próby	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\lvert\mu_1 - \mu_0\rvert}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha),\ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2),\ z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta),\ \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}.$		

Hipoteza o równości średnich (znane σ) – moc

Dla populacji o rozkładach: $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma)$ i $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma)$ i znanym odchyleniu standardowym σ do weryfikacji hipotezy o równości ich średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{(\overline{x}_A - \overline{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}},$$

lub

$$Z = \frac{\Delta\bar{x} - \Delta}{\sigma_{\Delta\overline{x}}},$$

gdzie: $\Delta\overline{x} = \overline{x}_A - \overline{x}_B$ – obserwowana różnica średnich, $\Delta = \mu_A - \mu_B$ – postulowana różnica średnich, w przypadku weryfikacji hipotezy zerowej o równości średnich $\Delta_0 = 0$,

$\sigma_{\Delta\overline{x}}$ – błąd standardowy różnicy średnich $\sigma_{\Delta\overline{x}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$.

Hipoteza o równości średnich (znane σ) – moc

Jednostronny obszar krytyczny wyznaczany jest z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:

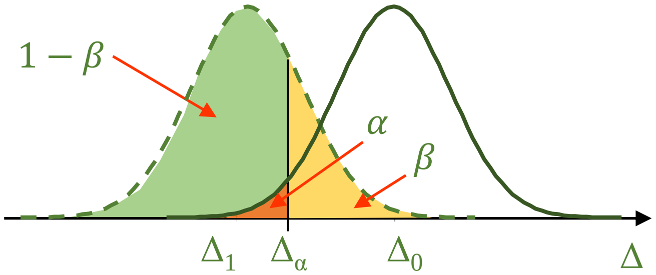
$$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Uwzględniając założenie o równości średnich i fakt, że rzeczywista różnica średnich ma rozkład $\mathcal{N}(\Delta_0, \sigma_{\Delta\bar{x}})$ rzeczywista granica obszaru krytycznego w **teście lewostronnym** wyznaczana jest z zależności:

$$\Delta_\alpha = -z_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\bar{x}}.$$

Moc testu wyznacza się na podstawie różnicy średnich Δ_1 postulowanej w hipotezie alternatywnej, **dla testów lewostronnych**:

$$1-\beta = P(\Delta\overline{x} \leq \Delta_\alpha) = F_{\mathcal{N}(\Delta_1,\sigma_{\Delta\bar{x}})}(\Delta_\alpha) = \Phi\left(\frac{\Delta_\alpha - \Delta_1}{\sigma_{\Delta\overline{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{-\Delta_1 - z_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\bar{x}}}{\sigma_{\Delta\overline{x}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\overline{x}}} - z_{1-\alpha}\right).$$



Hipoteza o równości średnich (znane σ) – moc

Dla **testu prawostronnego** granica obszaru krytycznego wynosi:

$$\Delta_\alpha = z_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\overline{x}}$$

moc testu otrzymuje się jako:

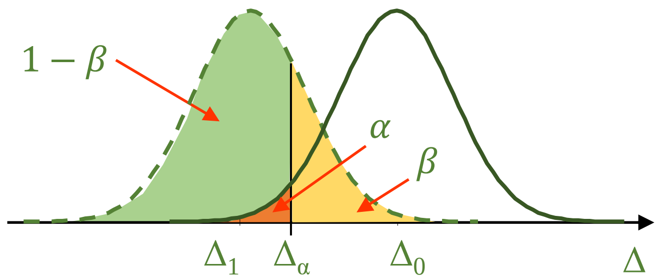
$$1-\beta = P(\Delta\overline{x} \geq \Delta_\alpha) = 1 - P(\Delta\overline{x} \leq \Delta_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\Delta_1,\sigma_{\Delta\overline{x}})}(\Delta_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{-\Delta_1 + z_{1-\alpha}\sigma_{\overline{x}}}{\sigma_{\Delta\overline{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\overline{x}}} - z_{1-\alpha}\right),$$

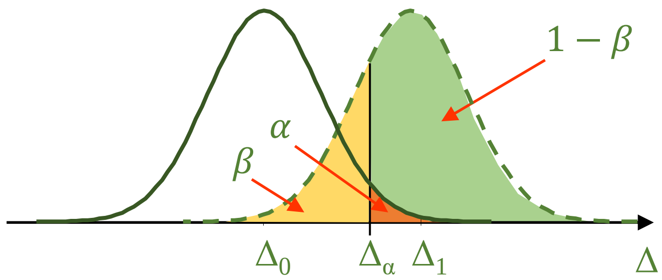
Dla obydwu **testów jednostronnych** moc można opisać wspólną zależnością:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{|\Delta_1|}{\sigma_{\Delta\overline{x}}} - z_{1-\alpha}\right),$$

dla **testów dwustronnych** moc wyznacza się jako:

$$1-\beta = \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right).$$





Hipoteza o równości średnich – moc i rozmiar próby

Wyznaczając minimalne liczebności prób dla ustalonej mocy testu często przyjmuje się dodatkowe założenia: zakłada się stałą liczebność jednej z prób lub stałą wartość proporcji liczebności prób:

$$k = \frac{n_A}{n_B}.$$

Test	Moc testu i minimalna liczebność próby	
$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A < \mu_B$ $H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\lvert\Delta_1\rvert}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha}\right)$	$n_A = kn_B$ $n_B = \frac{(k+1)\left(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}\right)^2 \sigma^2}{k(\mu_A - \mu_B)^2}$
$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$	$1 - \beta = \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(-\frac{\Delta_1}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right)$	$n_A = kn_B$ $n_B = \frac{(k+1)\left(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}\right)^2 \sigma^2}{k(\mu_A - \mu_B)^2}$
$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha),\ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2),\ z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta), \sigma_{\Delta\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$		

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Czas obróbki elementu z wykorzystaniem pewnego materiału trącego wynosi 21 minut. Należy pokazać, że zastosowanie nowego materiału skróci czas obróbki o 1 minutę. Wykonano 8 pomiarów dla aktualnego i 10 pomiarów dla nowego materiału. Zakładając, że czas obróbki obydwu materiałów ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym $1{,}5$ minuty, wyznaczyć moc testu na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$.

Z treści zadania wynika, że:

$$\Delta_1 = 1, \qquad z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(0{,}99) \approx 2{,}32, \qquad \sigma_{\Delta\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} = 1{,}5\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \approx 0{,}71,$$

moc testu prawostronnego wynosi więc:

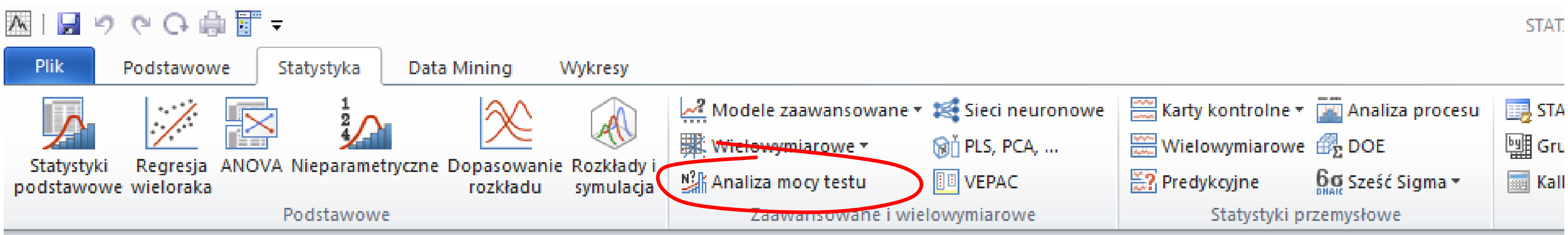
$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{|\Delta_1|}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} - z_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{1}{0{,}71} - 2{,}32\right) = 0{,}18.$$

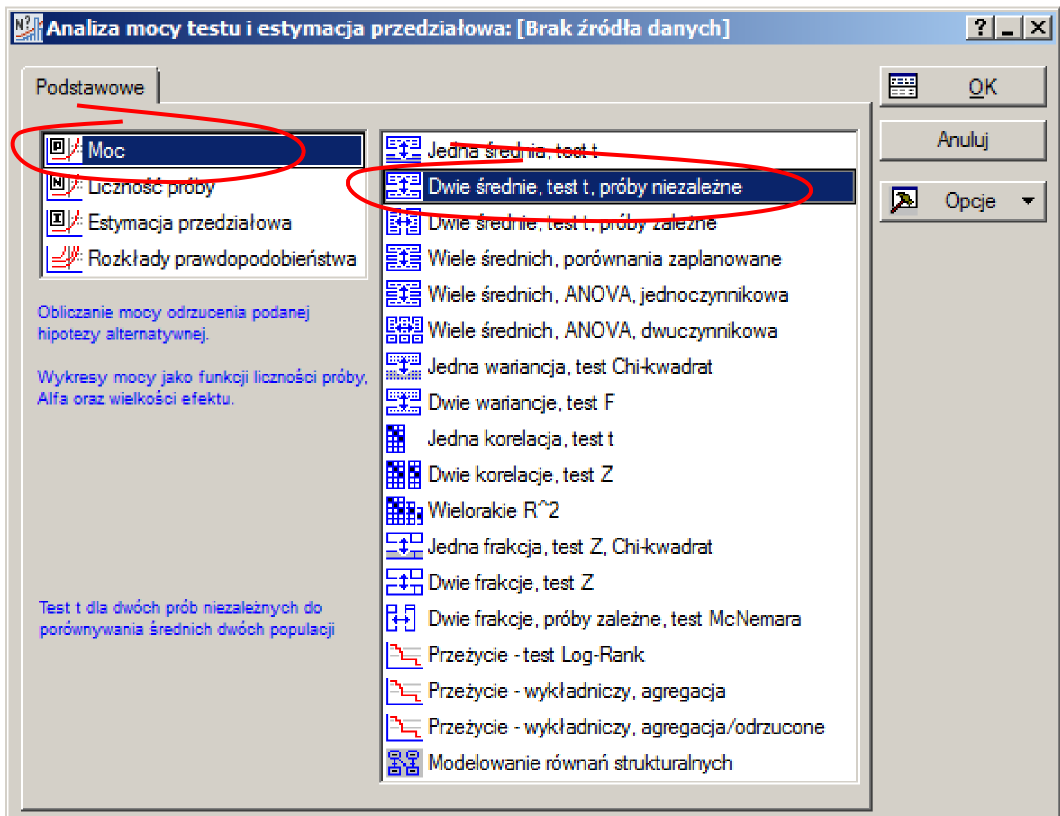
Moc testu jest zbyt niska, minimalna liczebność prób (przy założeniu, że będą one równe) dla testu o mocy $(1-\beta) = 0{,}8$ wyznacza się jako:

$$n_B = \frac{(k+1)\left(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}\right)^2 \sigma^2}{k(\mu_A - \mu_B)^2} = \frac{2(0{,}84 + 2{,}32)^2 1{,}5^2}{1} \approx 45{,}16 \quad \rightarrow n_A = n_B = 46,$$

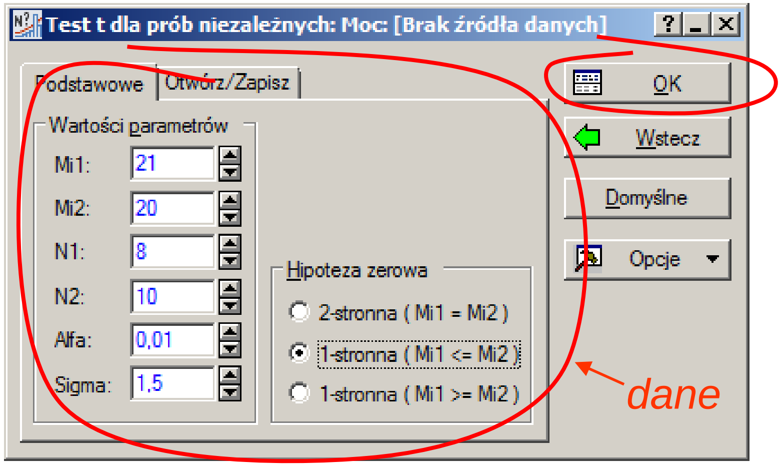
($k = 1$, $z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}84$, $\sigma = 1{,}5$, $\mu_A = 21$, $\mu_B = 20$).

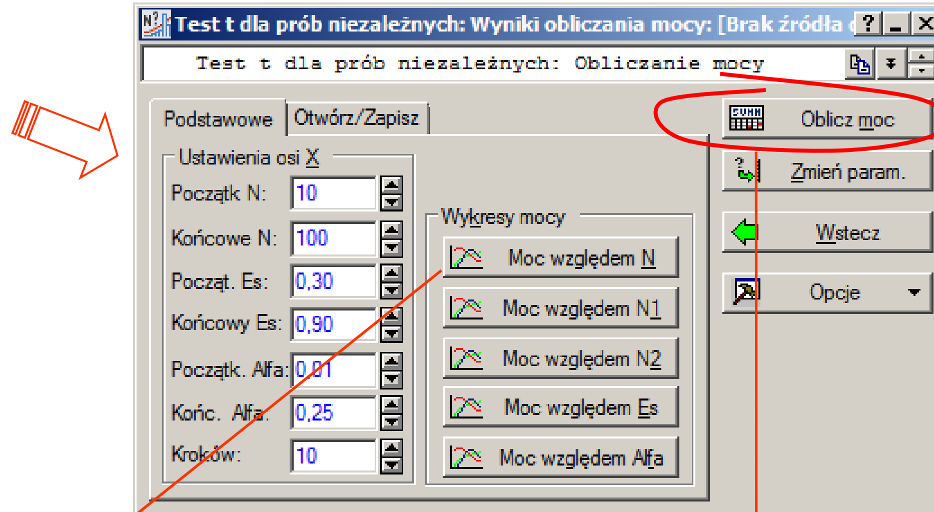
STATISTICA – analiza mocy testu

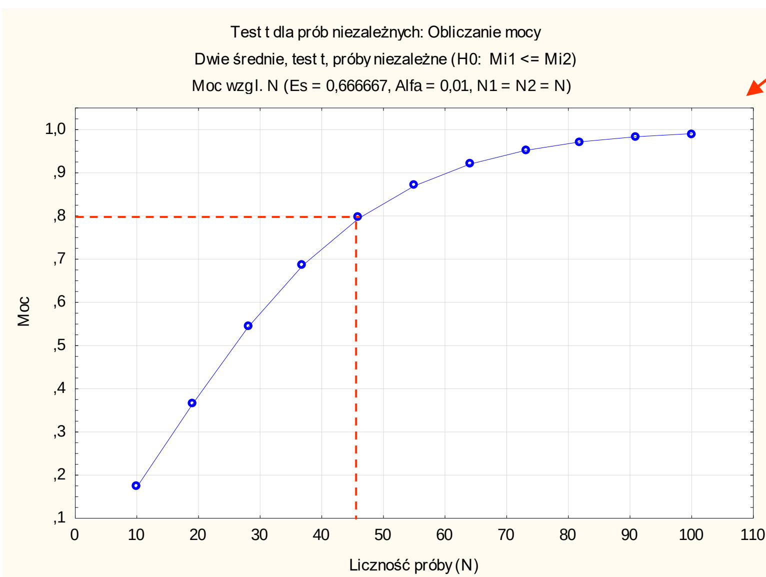




STATISTICA – analiza mocy testu







Dane: Moc ([Brak źródła danych])

	Moc ([Brak Dwie średni H0: Mi1 <= Wartość
Średnia populacyjna Mi1	21,0000
Średnia populacyjna Mi2	20,0000
Odch. std. w populacji (Sigma)	1,5000
Efekt standaryzowany (Es)	0,6667
Liczność próby N1	8,0000
Liczność próby N2	10,0000
Prawdop. bł. I rodzaju (Alfa)	0,0100
Wartość krytyczna t	2,5835
Moc	0,1499

moc jest mniejsza od obliczonej na slajdzie 43.
w analizie zakłada się, że dane jest s (a nie σ)

STATISTICA – minimalna liczebność próby