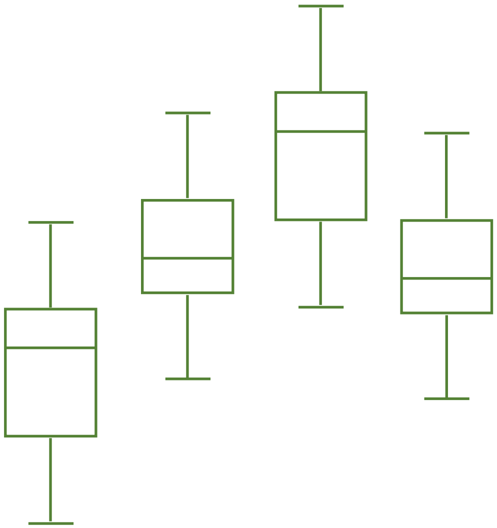
Planowanie doświadczeń



Eksperymenty jednoczynnikowe
ANOVA

Materiały
`http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/`

Eksperymenty jednoczynnikowe *(ang. experiments with a single factor)*

- badają istotność wpływu zmiennej niezależnej na zmienną zależną,
- uwzględniana jest jedna zmienna zależna,
- uwzględniana jest jedna zmienna niezależna,
- zmienna niezależna może przyjmować wartości na kilku poziomach.

.

poziom zmiennej niezależnej	numer doświadczenia			
	1	2	...	r
1				
$\vdots$				
a				

Eksperymenty jednoczynnikowe

Eksperymenty jednoczynnikowe wykonywane są wg. *planu randomizowanego kompletnego*.

Plan taki zakłada, że:

- doświadczenia wykonywane są w losowej kolejności,
- wartości zmiennej niezależnej są z góry określone,
- liczba wartości jest uzależniona od rodzaju przeprowadzanego badania, wartości nazywane są *poziomami*, w eksperymentach jednoczynnikowych liczba poziomów może być dowolna.

poziom zmiennej niezależnej	numer doświadczenia			
	1	2	...	r
1				
$\vdots$				
a				

Badanie istotności wpływu

Należy zbadać wpływ mocy reaktora plazmowego na szybkość trawienia płytek krzemowych. Planując eksperyment zdecydowano o wyborze 4 poziomów mocy: 160, 180, 200 i 220 W i 5 doświadczeń dla każdego z ustalonych poziomów mocy.

Po zaplanowaniu eksperymentu i ustaleniu** kolejności prowadzenia poszczególnych doświadczeń wyniki uzyskanych szybkości trawienia w $[\text{Å}/min]$ zapisano w tablicy:

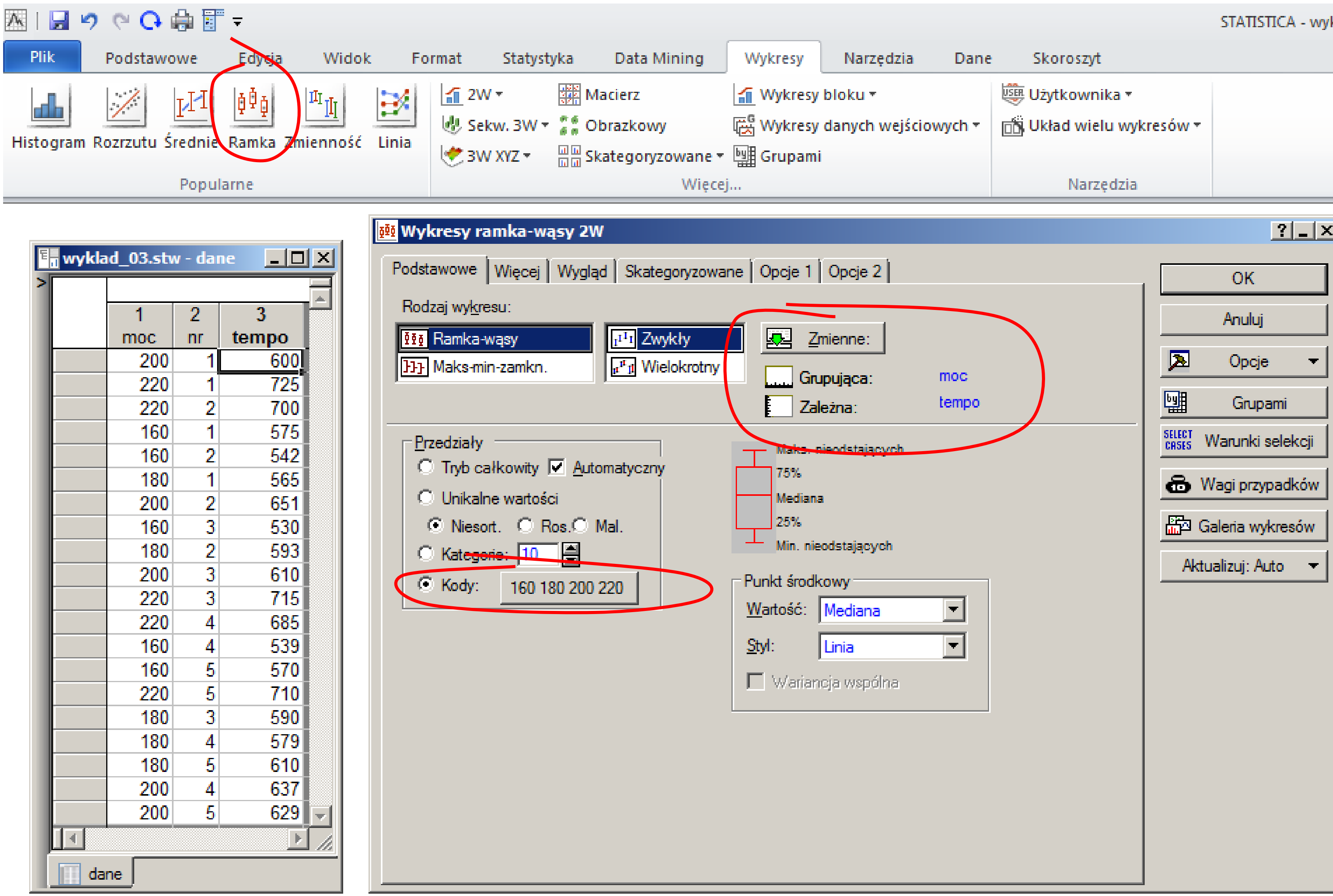
moc	numer doświadczenia				
	1	2	3	4	5
160	575_{13}	542_{14}	530_{08}	539_{05}	570_{04}
180	565_{18}	593_{09}	590_{06}	579_{16}	610_{17}
200	600_{07}	651_{19}	610_{10}	637_{20}	629_{01}
220	725_{02}	700_{03}	715_{15}	685_{11}	710_{12}

moc	=LOS()
160	24621
160	29337
160	40062
160	57102
160	63548
180	32318
180	43289
180	71834
180	77216
180	84675
200	12417
200	36481
200	49271
200	89323
200	94037
220	18369
220	21238
220	49813
220	52286
220	67710

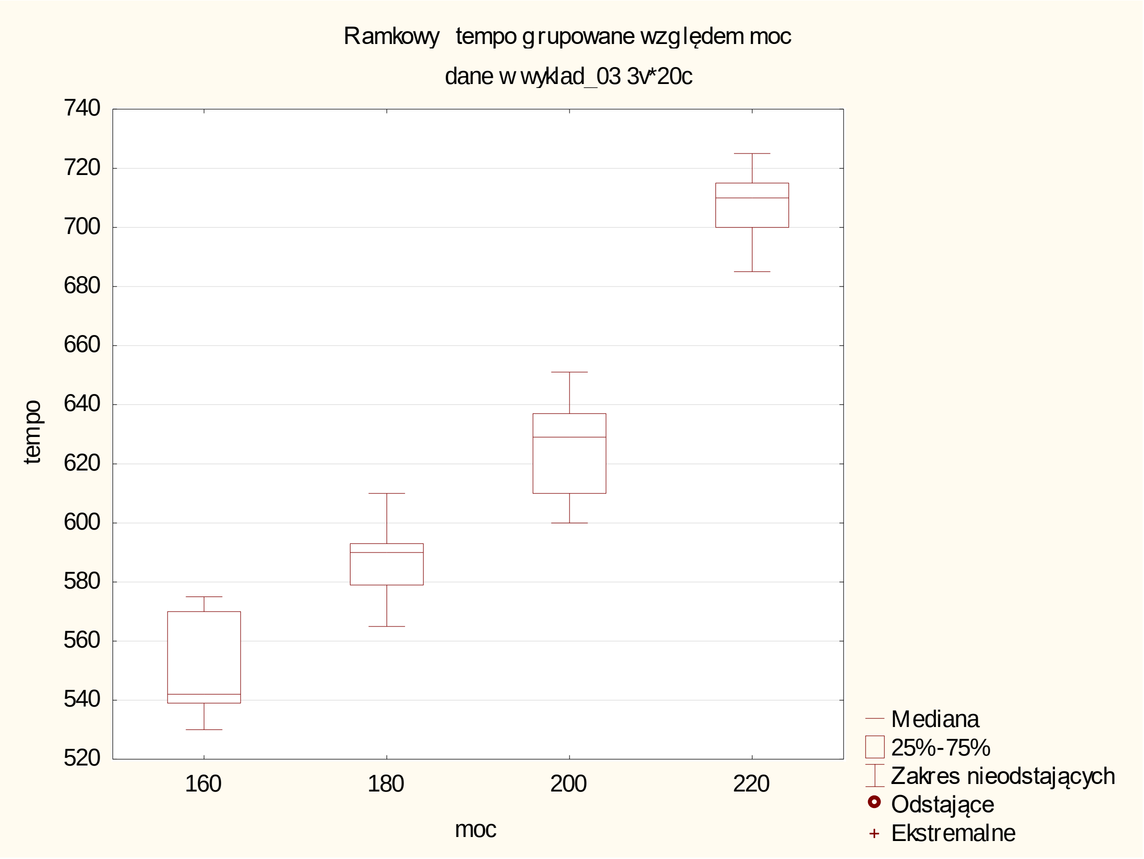
* Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley, 2012

** przygotowano w Excelu arkusz przypisując każdemu doświadczeniu losową liczbę, po porządkowaniu liczb otrzymano kolejność doświadczeń, indeksy dolne w tablicy z wynikami odpowiadają uzyskanej kolejności przeprowadzania doświadczeń

Badanie istotności wpływu – wykresy



Badanie istotności wpływu – wykresy



Z analizy graficznej można podejrzewać, że moc reaktora wpływa na szybkość trawienia: im wyższa moc tym większe tempo trawienia płytek

Testowanie hipotez parametrycznych

Istotność wpływu mocy generatora na tempo trawienia można zbadać weryfikując hipotezy parametryczne:

$$H_0: \mu_{moc_1} = \mu_{moc_2} \qquad H_1: \mu_{moc_1} \neq \mu_{moc_2}$$

gdzie μ_{moc} to tempo trawienia odpowiadające mocy moc a $moc = \{160, 180, 200, 220\}$.

W przypadku analizowanego eksperymentu należy więc wykonać 6 testów:

1. $H_0: \mu_{160} = \mu_{180} \quad H_1: \mu_{160} \neq \mu_{180}$,

2. $H_0: \mu_{160} = \mu_{200} \quad H_1: \mu_{160} \neq \mu_{200}$,

3. $H_0: \mu_{160} = \mu_{220} \quad H_1: \mu_{160} \neq \mu_{220}$,

4. $H_0: \mu_{180} = \mu_{200} \quad H_1: \mu_{180} \neq \mu_{200}$,

5. $H_0: \mu_{180} = \mu_{220} \quad H_1: \mu_{180} \neq \mu_{220}$,

6. $H_0: \mu_{200} = \mu_{220} \quad H_1: \mu_{200} \neq \mu_{220}$.

Istotność wpływu mocy generatora zostanie wykazana jeżeli dla jednego (lub więcej) testów hipoteza o braku istotności zostanie odrzucona.

Badanie istotności wpływu a błąd I rodzaju

Zakładając, że moc generatora nie wpływa na tempo trawienia płytek, tzn.:

$$\mu_{160} = \mu_{180} = \mu_{200} = \mu_{220}.$$

Przyjmując dla każdego z testów ten sam poziom istotności α, otrzymuje się prawdopodobieństwo, że żaden z testów z $c = 6$ testów nie odrzuci hipotezy zerowej, wyniesie ono

$$(1-\alpha)^c.$$

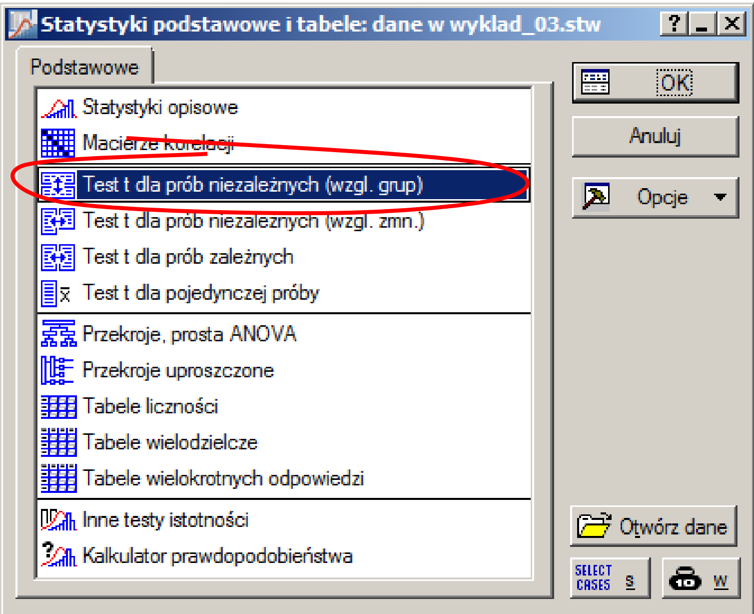
Prawdopodobieństwo popełnienia *błędu I rodzaju*, tzn. odrzucenia hipotezy zerowej w co najmniej jednym teście, wyniesie

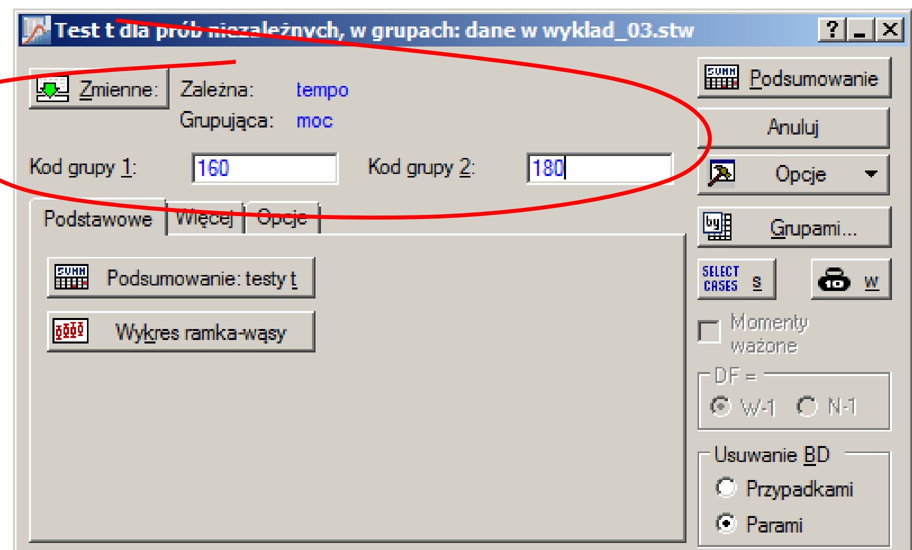
$$1-(1-\alpha)^c.$$

Błąd I rodzaju przy takim sposobie analizy jest więc większy od błędu dla pojedynczego testu, stosowane mogą być różne korekty poziomu α np. korekta Sidaka

$$1-(1-\alpha)^{\frac{1}{c}}.$$

Testowanie hipotez parametrycznych





Testowanie hipotez parametrycznych

Testy t; Grupująca: moc (dane w wyklad_03.stw)
Grupa 1: 160
Grupa 2 180

Zmienna	Średnia 160	Średnia 180	t	df	p	Nważnych 160	Nważnych 180	Odch.std 160	Odch.std 180	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	551,2000	587,4000	-3,10184	8	0,014625	5	5	20,01749	16,74216	1,429540	0,737565

Grupa 1: 160
Grupa 2 200

Zmienna	Średnia 160	Średnia 200	t	df	p	Nważnych 160	Nważnych 200	Odch.std 160	Odch.std 200	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	551,2000	625,4000	-5,78699	8	0,000411	5	5	20,01749	20,52559	1,051410	0,962417

Grupa 1: 160
Grupa 2 220

Zmienna	Średnia 160	Średnia 220	t	df	p	Nważnych 160	Nważnych 220	Odch.std 160	Odch.std 220	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	551,2000	707,0000	-13,8447	8	0,000001	5	5	20,01749	15,24795	1,723441	0,610920

Grupa 1: 180
Grupa 2 200

Zmienna	Średnia 180	Średnia 200	t	df	p	Nważnych 180	Nważnych 200	Odch.std 180	Odch.std 200	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	587,4000	625,4000	-3,20792	8	0,012463	5	5	16,74216	20,52559	1,503032	0,702605

Grupa 1: 180
Grupa 2 220

Zmienna	Średnia 180	Średnia 220	t	df	p	Nważnych 180	Nważnych 220	Odch.std 180	Odch.std 220	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	587,4000	707,0000	-11,8098	8	0,000002	5	5	16,74216	15,24795	1,205591	0,860584

Grupa 1: 200
Grupa 2 220

Zmienna	Średnia 200	Średnia 220	t	df	p	Nważnych 200	Nważnych 220	Odch.std 200	Odch.std 220	iloraz F Wariancje	p Wariancje
tempo	625,4000	707,0000	-7,13596	8	0,000098	5	5	20,52559	15,24795	1,812043	0,578880

hipotezy o braku istotności należy odrzucić

hipotezy o równości wariancji nie można odrzucić

Jednoczynnikowa analiza wariancji – model

W ***eksperymentach jednoczynnikowych*** badana jest istotność wpływu *jednej zmiennej niezależnej* na *jedną zmienną zależną* w przypadku, gdy zmienna niezależna może przyjmować *wartości* na *kilku poziomach*.

Dla wyników otrzymanych w eksperymencie można stworzyć **model**:

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

gdzie:

$i = 1 \cdots a$, $j = 1 \cdots r$,

y_{ij} – wynik j–tej powtórki doświadczenia przeprowadzonego na i–tym poziomie,

μ_i – średnia wartość zmiennej wyjściowej dla i–tego poziomu,

e_{ij} – błąd losowy zawierający wszystkie pozostałe składowe zmienności zmiennej wyjściowej (poza wpływem poziomu czynnika wejściowego),

zakłada się, że $E(e_{ij}) = 0$ więc $E(y_{ij}) = \mu_i$.

Jednoczynnikowa analiza wariancji – model

Oznaczając przez:

- μ ogólną średnią zmiennej wyjściowej,
- τ_i efekt i–tego poziomu czynnika,

średnią wartość zmiennej wyjściowej dla i–tego poziomu można zapisać

$$\mu_i = \mu + \tau_i,$$

więc model $y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$ można zapisać w równoważnej postaci:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}.$$

Założenia

- błędy mają rozkład normalny o tej samej wariancji σ^2, tzn. $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$,
- błędy e_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi (pomiary są przeprowadzane niezależnie).

Badanie istotności wpływu dla modelu można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$$

wobec hipotezy alternatywnej

$H_1\colon \mu_i \neq \mu_j$ (dla co najmniej dla jednej pary (i,j)).

Wykorzystując model:

$$\mu_i = \mu + \tau_i, \quad \text{dla } \mu = \frac{1}{a}\sum \mu_i \quad \text{(w konsekwencji } \sum \tau_i = 0\text{)}$$

istotność wpływu poziomu czynnika wejściowego można również zbadać testując hipotezę:

$$H_0\colon \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

wobec hipotezy alternatywnej

$H_1\colon \tau_i \neq 0$ (co najmniej dla jednego i).

Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

Całkowita zmienność zmiennej zależnej jest mierzona jako suma kwadratów odchyleń tej zmiennej od średniej wartości z wszystkich obserwacji *(ang. total sum of squares)*

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r} \left(y_{ij} - \bar{\bar{y}}\right)^2$$

możne być zdekomponowana na zmienność:

- SS_τ – *wyjaśnioną przyjętym modelem* (inaczej *zmienność międzygrupową*),
- SS_e – *niewyjaśnioną modelem* (inaczej *zmienność wewnątrzgrupową*).

$$S_\tau = r \sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2, \qquad SS_e = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2.$$

gdzie y_i i $\bar{y}_i$ to suma i średnia wartość obserwacji na i–tym poziomie a y i $\bar{\bar{y}}$ to suma i średnia wszystkich obserwacji:

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} y_{ij}\,, \qquad \bar{y}_i = \frac{1}{r} y_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{r} y_{ij}\,, \qquad \bar{\bar{y}} = \frac{1}{ar} y.$$

Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{\bar{y}}+\bar{y}_i-\bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left((\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})+(y_{ij}-\bar{y}_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}2(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})(y_{ij}-\bar{y}_i) =$$

$$= \underbrace{r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2}_{SS_\tau} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}_{SS_e} + 2\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_i),$$

$$\sum_{j=1}^{r}(y_{ij}-\bar{y}_i) = \sum_{j=1}^{r}y_{ij} - \sum_{j=1}^{r}\bar{y}_i =$$

$$= r\bar{y}_i - r\bar{y}_i = 0$$

ostatecznie:

$$\boxed{SS_T = SS_\tau + SS_e}$$

Szacowanie σ^2

Wariancję z próby dla i-tego poziomu można oszacować jako

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{r-1}$$

Wariancja a prób może być wykorzystana do oszacowania wariancji populacji, w ogólnym przypadku gdy liczebność prób jest różna wariancję szacuje się licząc średnią ważoną (rozmiar grupy stanowi wagę)

$$s^2 = \frac{(r-1)s_1^2 + (r-1)s_2^2 + \cdots + (r-1)s_a^2}{(r-1) + (r-1) + \cdots + (r-1)}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{a(r-1)} = \underbrace{\frac{SS_e}{N-a}}_{MS_e}$$

$N = ar$

Pokazuje się, że niezależnie od prawdziwości hipotezy o równości średnich:

$$E(MS_e) = \sigma^2.$$

Przy założeniu, że poziom zmiennej niezależnej nie ma wpływu na zmienna zależną (tzn. $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$) wariancję populacji można oszacować wykorzystując *zmienność międzygrupową*:

$$s^2 = \frac{r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2}{a-1} = \frac{SS_\tau}{a-1} \longleftarrow MS_\tau$$

Jeśli hipoteza o równości średnich jest prawdziwa to:

$$E(MS_\tau) = \sigma^2,$$

a jeżeli jest fałszywa to:

$$E(MS_\tau) = \sigma^2 + \frac{r}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\tau_i\,.$$

Analiza wariancji, ANOVA (ang. analysis of variance)

Istotność wpływu poziomu czynnika wejściowego można więc zbadać porównując szacowania wariancji przy pomocy MS_τ i MS_e. Do porównania wykorzystuje się zmienną:

$$F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1} \bigg/ \frac{SS_e}{N-a}.$$

Jeżeli hipoteza zerowa H_0 o równości średnich (tzn. o braku istotności wpływu zmiennej niezależnej) jest:

- prawdziwa to zmienna $F = 1$,
- fałszywa to zmienna $F > 1$.

Uwaga! W teście wyznaczany jest *prawostronny obszar krytyczny.*

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyki: $\frac{SS_\tau}{\sigma^2}$, $\frac{SS_e}{\sigma^2}$, F mają rozkład :

$$\frac{SS_\tau}{\sigma^2} \sim \chi^2(a-1), \qquad \frac{SS_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(N-a), \qquad F \sim F(a-1, N-a).$$

Jednoczynnikowa ANOVA

moc	numer doświadczenia						
	1	2	3	4	5	y_i	$\bar{y}_i$
160	575	542	530	539	570	2756	551,2
180	565	593	590	579	610	2937	587,4
200	600	651	610	637	629	3127	625,4
220	725	700	715	685	710_2	3535	707,0

$y = 2756 + 2937 + 3127 + 3535 = 12355,$ $\bar{\bar{y}} = 12355/(4 \cdot 5) = 617{,}75$

$$SS_\tau = r \sum \left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 = 5\left((551{,}2 - 617{,}75)^2 + (587{,}4 - 617{,}75)^2 + \dots + (707 - 617{,}75)^2\right) = 66870{,}55$$

$$SS_e = \sum\sum \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 = (575 - 551{,}2)^2 + (542 - 551{,}2)^2 + \dots + (685 - 707)^2 + (710 - 707)^2 = 5339{,}2$$

$MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 66870{,}55/3 \approx 22290{,}18$ $MS_e = SS_e/(N-a) \approx 5339{,}2/16 \approx 333{,}7$

$F_n = MS_\tau / MS_e = 22290{,}18/333{,}7 \approx 66{,}8$

dla $\alpha = 0{,}05$

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24$$

$$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(66{,}8) \approx 2{,}88 \cdot 10^{-9}$$

$F_n > F_\alpha$
$\alpha > p - value$

hipotezę H_0 należy odrzucić
poziomy czynnika wejściowego w istotny sposób wpływają na wartość zmiennej zależnej

Błędy e_{ij} nazywane są też ***resztami*** (*ang. residual*) i reprezentują różnice pomiędzy wartościami obserwowanymi y_{ij} a wartościami otrzymywanymi z wykorzystywanego modelu $\hat{y}_{ij}$

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}.$$

Wartości $\hat{y}_{ij}$ szacują wartość obserwacji y_{ij} i są obliczane jako:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ij} = \quad & \hat{\mu} + \hat{\tau}_i \\ & \bar{\bar{y}} + \left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right) \\ & \bar{y}_i \end{aligned}$$

Jednoczynnikowa ANOVA – założenia

W analizie wariancji zakłada się, że błędy e_{ij} są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym

$$e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma).$$

Sprawdzanie założeń analizy sprowadza się więc do kontroli:

- typu i niezależności rozkładu błędów,
- jednorodności wariancji (wariancje błędów na każdym poziomie eksperymentu powinny być równe).

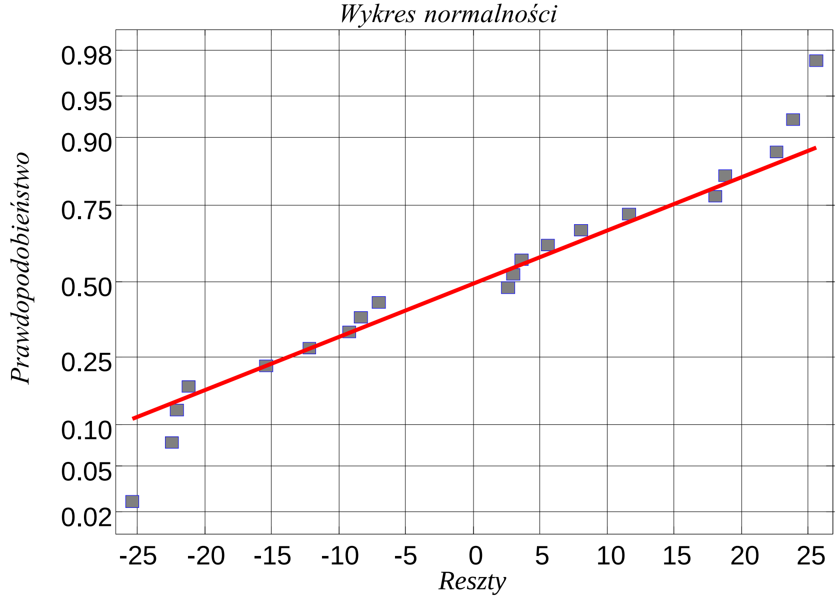
Kontrola założeń może być przeprowadzana graficznie:

- wykresy normalności (sprawdzanie założeń o normalności rozkładu),
- wykresy reszt w funkcji numeru doświadczenia (sprawdzanie niezależności),
- wykresy reszt w funkcji wartości przewidywanych z modelu (sprawdzanie jednorodności wariancji).

Sprawdzanie założeń

moc	numer doświadczenia					
	1	2	3	4	5	$\bar{y}_i$
160	575_{13}	542_{14}	530_{08}	539_{05}	570_{04}	551,2
180	565_{18}	593_{09}	590_{06}	579_{16}	610_{17}	587,4
200	600_{07}	651_{19}	610_{10}	637_{20}	629_{01}	625,4
220	725_{02}	700_{03}	715_{15}	685_{11}	710_{12}	707,0

moc	reszty				
	1	2	3	4	5
160	$23{,}8_{13}$	$-9{,}2_{14}$	$-21{,}2_{08}$	$-12{,}2_{05}$	$18{,}8_{04}$
180	$-22{,}4_{18}$	$5{,}6_{09}$	$2{,}6_{06}$	$-8{,}4_{16}$	$22{,}6_{17}$
200	$-25{,}4_{07}$	$25{,}6_{19}$	$-15{,}4_{10}$	$11{,}6_{20}$	$3{,}6_{01}$
220	$18{,}0_{02}$	$-7{,}0_{03}$	$8{,}0_{15}$	$-22{,}0_{11}$	$3{,}0_{12}$

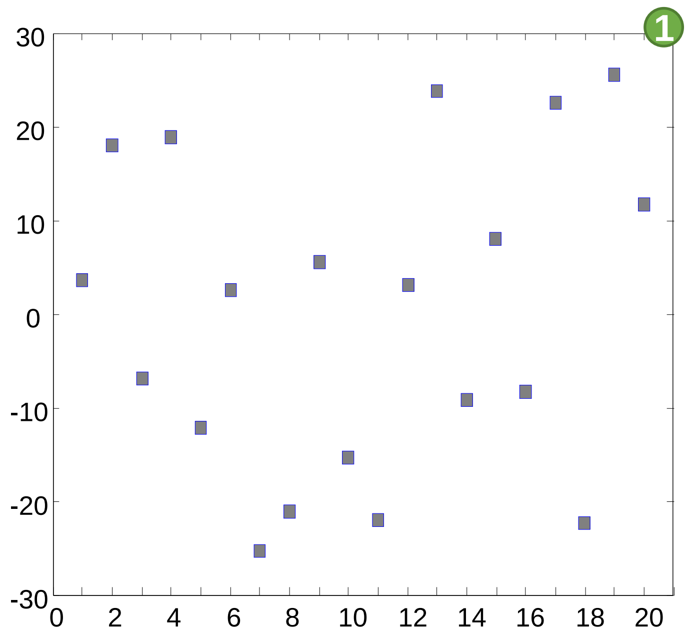


rozkład reszt jest w przybliżeniu rozkładem normalnym

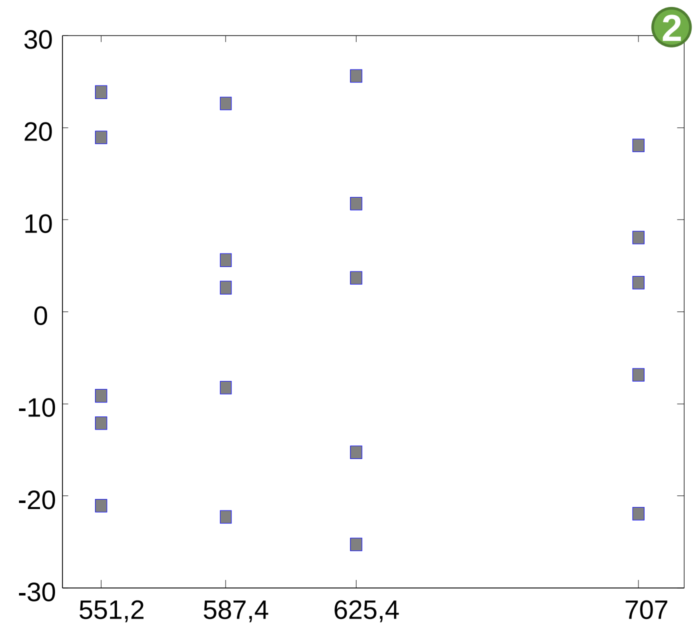
Sprawdzanie założeń

moc	reszty				
	1	2	3	4	5
160	23,8$_{13}$	-9,2$_{14}$	-21,2$_{08}$	-12,2$_{05}$	18,8$_{04}$
180	-22,4$_{18}$	5,6$_{09}$	2,6$_{06}$	-8,4$_{16}$	22,6$_{17}$
200	-25,4$_{07}$	25,6$_{19}$	-15,4$_{10}$	11,6$_{20}$	3,6$_{01}$
220	18,0$_{02}$	-7,0$_{03}$	8,0$_{15}$	-22,0$_{11}$	3,0$_{12}$

1. nie widać wpływu kolejności przeprowadzania doświadczeń – założenie o niezależności błędów nie zostało naruszone (doświadczenia były przeprowadzane w losowej kolejności)
2. nie widać, że założenie o jednorodności wariancji zostało naruszone



Wykres reszt w funkcji numeru doświadczenia



Wykres reszt w funkcji wartości przewidywanych z modelu

Test Levene'a – test statystyczny wykorzystywany do sprawdzenia czy wariancja w próbach jest równa. Dla potrzeb testu wyznaczane są wartości bezwzględne odchyleń zmiennej zależnej od średnich grupowych

$$d_{ij} = \left|y_{ij} - \overline{y}_i\right|.$$

Weryfikacja hipotezy o jednorodności wariancji sprowadza się do przeprowadzenia *analizy wariancji* dla zmiennej d. Wyznaczane są zmienności:

$$SS_\tau = r\sum\left(\overline{d}_i - \overline{d}\right)^2, \qquad SS_e = \sum\sum\left(d_{ij} - \overline{d}_i\right)^2, \qquad \left(MS_\tau = \frac{SS_\tau}{a-1}, \quad MS_e = \frac{SS_e}{N-a}\right)$$

i wyznaczana jest statystyka *testowa Levene'a*

$$F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1} \Big/ \frac{SS_e}{N-a}.$$

Uwagi

- Przy założeniu prawdziwości hipotezy o jednorodności wariancji zmienna F ma rozkład $F \sim F(a-1, N-a)$.
- Obszar krytyczny w teście wyznaczany jest jako prawostronny.

Test Browna–Forsytha – test statystyczny wykorzystywany do sprawdzenia czy wariancja w próbach jest równa, dla potrzeb testu bezwzględne odchylenia zmiennej zależnej od średnich grupowych wyznaczane są w oparciu o *medianę*

$$d_{ij} = \left|y_{ij} - \tilde{y}_i\right|.$$

Weryfikacja hipotezy o jednorodności wariancji sprowadza się do przeprowadzenia *analizy wariancji* dla zmiennej d. Wyznaczane są zmienności: SS_τ, SS_e, (MS_τ, MS_e) i wyznaczana jest statystyka *testowa Browna–Forsytha*:

$$F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1} \Big/ \frac{SS_e}{N-a}.$$

Uwagi

- Przy założeniu prawdziwości hipotezy o jednorodności wariancji zmienna F ma rozkład $F \sim F(a-1, N-a)$.
- Obszar krytyczny w teście wyznaczany jest jako prawostronny.
- Uznaje się, że ***test Browna–Forsytha*** jest bardziej *odporny na odstępstwa od rozkładu normalnego*.

Sprawdzanie założeń – test Levene'a

moc	reszty					
	1	2	3	4	5	$\bar{d}_i$
160	$23{,}8_{13}$	$-9{,}2_{14}$	$-21{,}2_{08}$	$-12{,}2_{05}$	$18{,}8_{04}$	17,04
180	$-22{,}4_{18}$	$5{,}6_{09}$	$2{,}6_{06}$	$-8{,}4_{16}$	$22{,}6_{17}$	12,32
200	$-25{,}4_{07}$	$25{,}6_{19}$	$-15{,}4_{10}$	$11{,}6_{20}$	$3{,}6_{01}$	16,32
220	$18{,}0_{02}$	$-7{,}0_{03}$	$8{,}0_{15}$	$-22{,}0_{11}$	$3{,}0_{12}$	11,60

$d = 23{,}8 + 9{,}2 + \cdots + 3{,}0 = 286{,}4$

$\bar{\bar{d}} = 286{,}4/(4 \cdot 5) = 14{,}32$

$SS_\tau = r \sum \left(\bar{d}_i - \bar{\bar{d}}\right)^2 = 5\left((17{,}04 - 14{,}32)^2 + \cdots + (11{,}6 - 14{,}32)^2\right) \approx 113{,}984$

$SS_e = \sum \sum \left(d_{ij} - \bar{d}_i\right)^2 = (23{,}8 - 17{,}04)^2 + \cdots + (3 - 11{,}6)^2 \approx 1123{,}97$

$MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 113{,}984/3 \approx 37{,}99$

$MS_e = SS_e/(N-a) \approx 1123{,}97/16 \approx 70{,}25$

$F_n = MS_\tau/MS_e = 37{,}99/70{,}25 \approx 0{,}54$

dla $\alpha = 0{,}05$

$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24$

$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(0{,}54) \approx 0{,}66,$

$$\left.\begin{array}{l} F_n < F_\alpha \\ \alpha < p - value \end{array}\right\}$$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji

Sprawdzanie założeń – test Browna–Forsytha

moc	numer doświadczenia					
	1	2	3	4	5	$\tilde{y}_i$
160	575_{13}	542_{14}	530_{08}	539_{05}	570_{04}	542
180	565_{18}	593_{09}	590_{06}	579_{16}	610_{17}	590
200	600_{07}	651_{19}	610_{10}	637_{20}	629_{01}	629
220	725_{02}	700_{03}	715_{15}	685_{11}	710_{12}	710

moc	reszty					
	1	2	3	4	5	$\bar{d}_i$
160	33_{13}	0_{14}	12_{08}	3_{05}	28_{04}	15,2
180	25_{18}	3_{09}	0_{06}	11_{16}	20_{17}	11,8
200	29_{07}	22_{19}	19_{10}	8_{20}	0_{01}	15,6
220	15_{02}	10_{03}	5_{15}	25_{11}	0_{12}	11,0

$d = 33 + 0 + \cdots + 25 + 0 = 268$ $\qquad$ $\bar{\bar{d}} = 286{,}4/(4 \cdot 5) = 13{,}4$

$$SS_\tau = r\sum\left(\bar{d}_i - \bar{\bar{d}}\right)^2 = 5\left((15{,}2 - 13{,}4)^2 + \cdots + (11 - 13{,}4)^2\right) \approx 82{,}0$$

$$SS_e = \sum\sum\left(d_{ij} - \bar{d}_i\right)^2 = (33 - 15{,}2)^2 + \cdots + (0 - 11)^2 \approx 2232{,}8$$

$MS_\tau = SS_\tau/(a-1) \approx 82/3 \approx 27{,}33$ $\qquad$ $MS_e = SS_e/(N-a) \approx 2232{,}8/16 \approx 139{,}55$

$$F_n = MS_\tau/MS_e = 27{,}33/139{,}55 \approx 0{,}196$$

dla $\alpha = 0{,}05$

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(3,16)}(1 - 0{,}05) \approx 3{,}24$$

$$p - value = 1 - F_{F(3,16)}(0{,}196) \approx 0{,}898$$

$\left.\begin{array}{l} F_n < F_\alpha \\ \alpha < p - value \end{array}\right\}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji

Testy post–hoc

Testy post–hoc *(po fakcie)* wykonywane są po stwierdzeniu istotności wpływu zmiennej niezależnej na zmienną zależną. Celem testów jest określenie, które poziomy zmiennej zależnej różnią się od siebie w sposób istotny.

Takie badanie istotności można przeprowadzić weryfikując (slajdy 7-10) *hipotezy parametryczne*

$$H_0: \mu_i = \mu_j \qquad H_1: \mu_i \neq \mu_j.$$

Uwagi

- testy o równości średnich mogą być stosowane tylko pod warunkiem, że były wykonane tylko dwie próby,
- jeżeli wykonanych zostało więcej prób należy wykonać ***testy post-hoc*** *(*biorą pod uwagę fakt, że pobranych zostało więcej prób), np. *test NIR Fishera, test Bonferroniego.*

***Test NIR Fishera** (test Najmniej Istotnych Różnic, ang. LSD – Least Significant Difference)*

W teście do weryfikacji hipotezy o równości średnich μ_i oraz μ_j wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o $(N-a)$ stopniach swobody:

$$t = \frac{\overline{y}_i - \overline{y}_j}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}}.$$

W teście (w odróżnieniu od testów na slajdach 7 – 10) uwzględniane są wyniki wszystkich prób, ale nie jest uwzględniana korekta poziomu α. Korekta poziomu α przeprowadzana jest np. w *teście Bonferroniego*.

Test Bonferroniego koryguje poziom α dla pojedynczego porównania odwrotnie proporcjonalnie do liczby wszystkich par testów c, które można byłoby przeprowadzić, tzn.:

$$\frac{\alpha}{c}$$

moc	numer doświadczenia						
	1	2	3	4	5	y_i	$\bar{y}_i$
160	575	542	530	539	570	2756	551,2
180	565	593	590	579	610	2937	587,4
200	600	651	610	637	629	3127	625,4
220	725	700	715	685	710_2	3535	707,0

$MS_e = SS_e/(N-a)$

$MS_e \approx 5339{,}2/16 \approx 333{,}7$

Porównanie istotności wpływu mocy $160\ W$ i $180\ W$ na szybkość trawienia płytek

Test NIR

$$t_n = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}} = \frac{551{,}2 - 587{,}4}{\sqrt{\frac{2}{5} 333{,}7}} \approx -3{,}13$$

dla $\alpha = 0{,}05$

$$t_\alpha = F^{-1}_{t(16)}(0{,}05/2) \approx -2{,}12$$

$$p - value = 2F_{t(16)}(t_n) \approx 0{,}0064$$

Test Bonferroniego

dla $c = 6$, $\alpha = \frac{0{,}05}{c} \approx 0{,}0083$

$$t_\alpha = F^{-1}_{t(16)}(0{,}0083/2) \approx -3{,}008$$

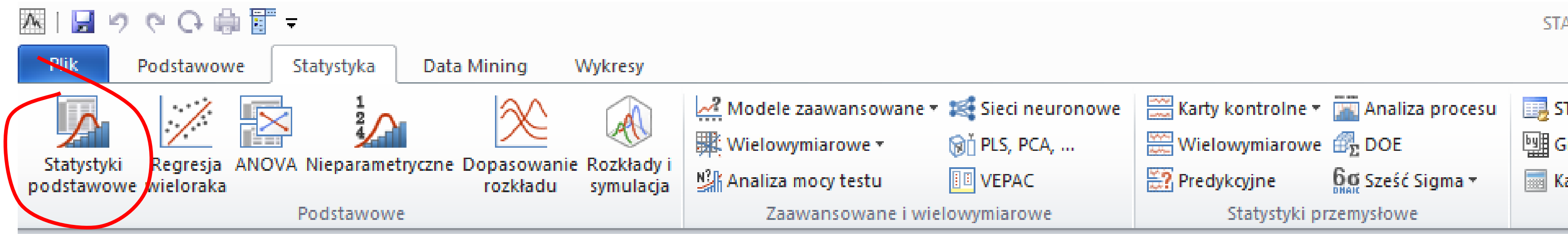
$$p - value = c(p - value)_{NIR} = 0{,}0385$$

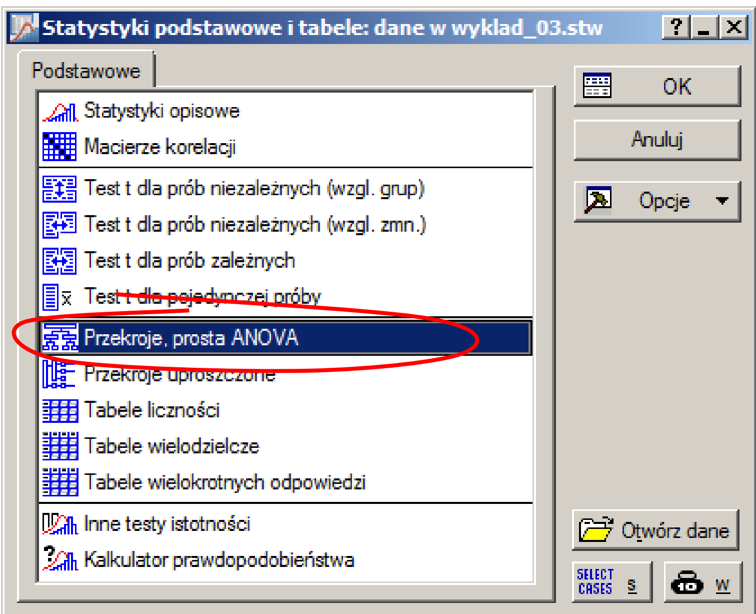
$$\left.\begin{array}{c} t_\alpha > t_n \\ \alpha > p - value \end{array}\right\}$$

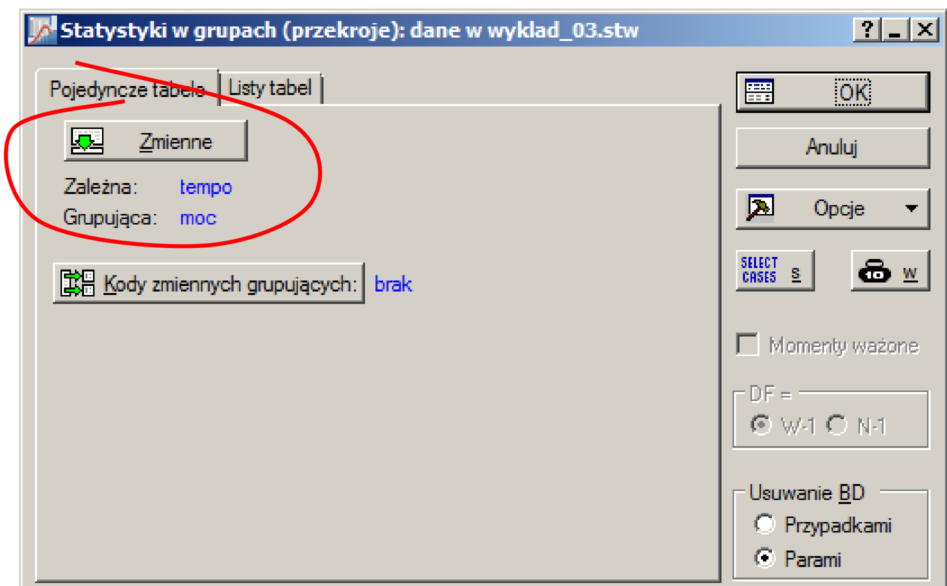
hipotezę H_0 należy odrzucić

poziomy mocy 160 i 180 w istotny sposób wpływają na wartość zmiennej zależnej

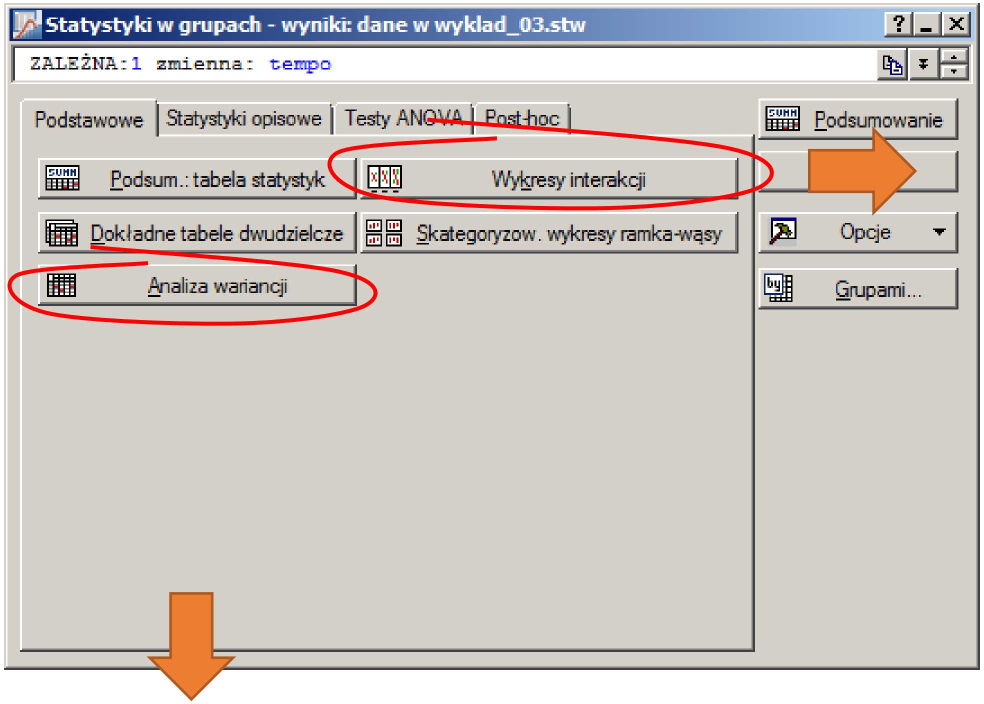
STATISTICA – ANOVA (metoda 1)

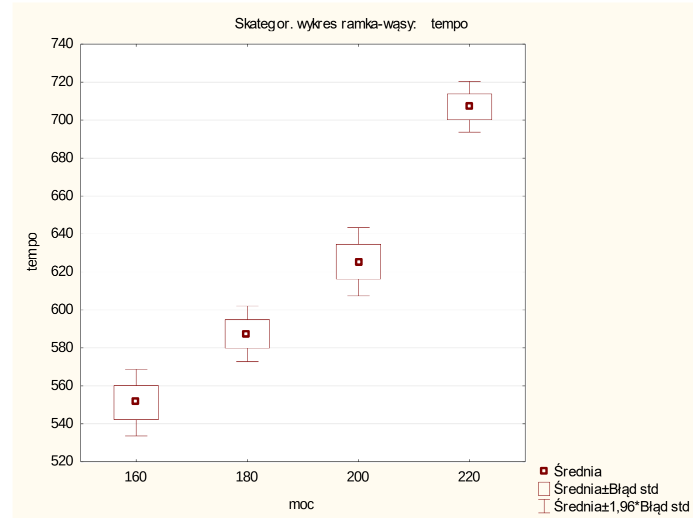






STATISTICA – ANOVA (metoda 1)





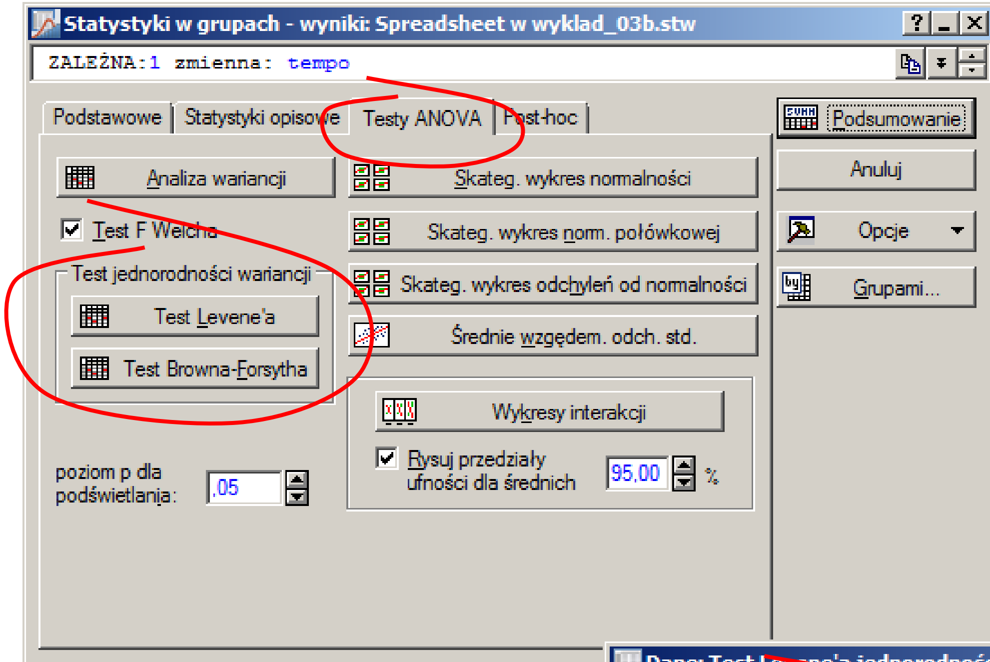
Dane: Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)

Analiza wariancji (dane w wyklad_03.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	66870,55	3	22290,18	5339,200	16	333,7000	66,79707	0,000000

SS_τ MS_τ SS_e MS_e

STATISTICA – ANOVA (metoda 1)



nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji

Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

Test Levene'a jednorodności wariancji (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

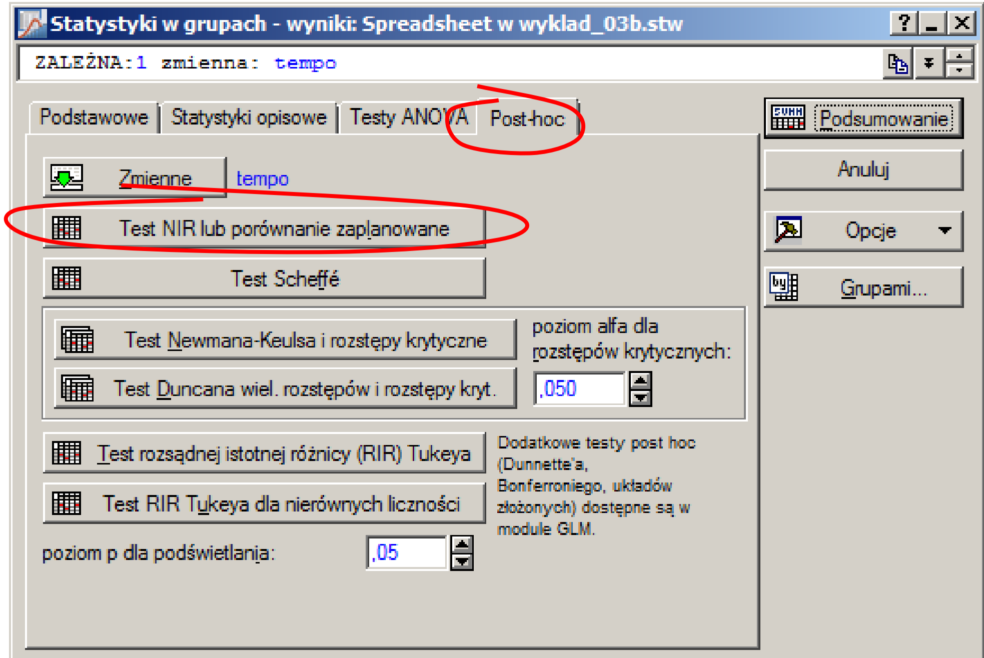
Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	113,9840	3	37,99467	1123,968	16	70,24800	0,540865	0,661164

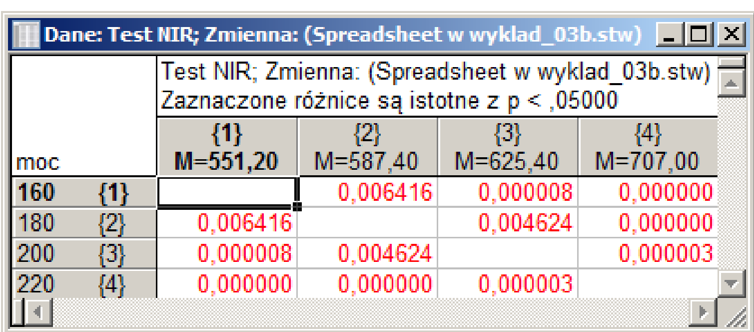
Dane: Test jednorod. wariancji Browna-Forsythe'a (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

Test jednorod. wariancji Browna-Forsythe'a (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
Zaznaczone efekty są istotne z p < ,05000

Zmienna	SS Efekt	df Efekt	MS Efekt	SS Błąd	df Błąd	MS Błąd	F	p
tempo	82,00000	3	27,33333	2232,800	16	139,5500	0,195868	0,897669

STATISTICA – ANOVA (metoda 1)





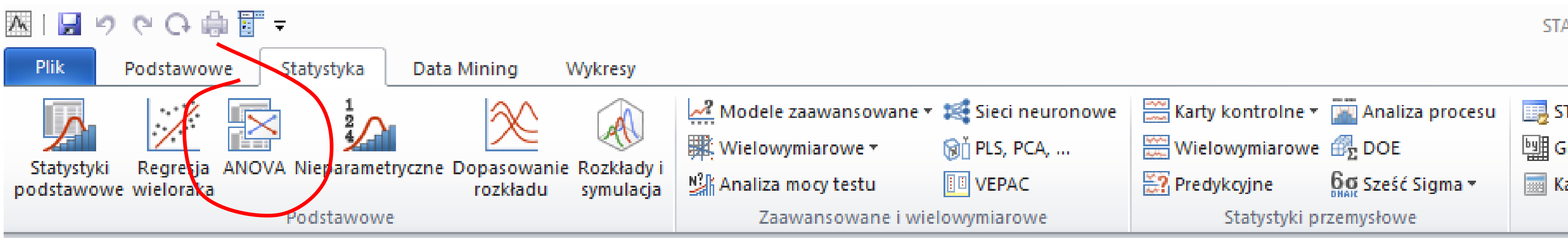
Dane: Test NIR; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)

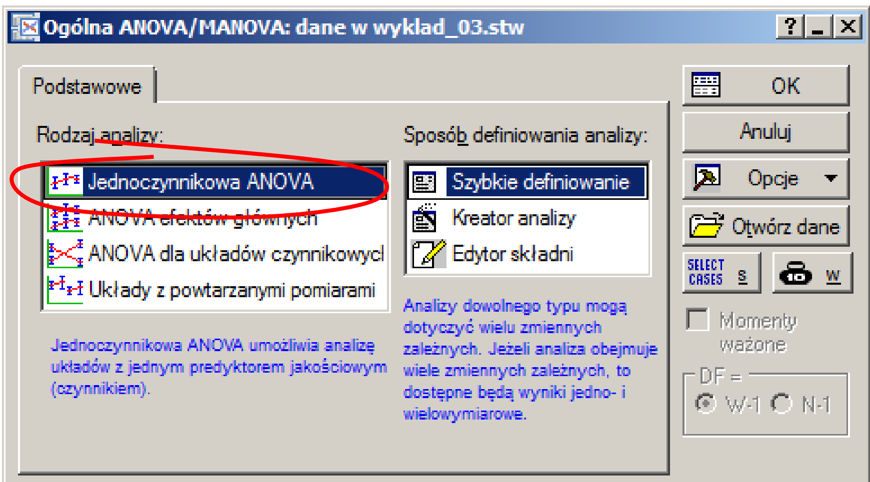
Test NIR; Zmienna: (Spreadsheet w wyklad_03b.stw)
Zaznaczone różnice są istotne z p < ,05000

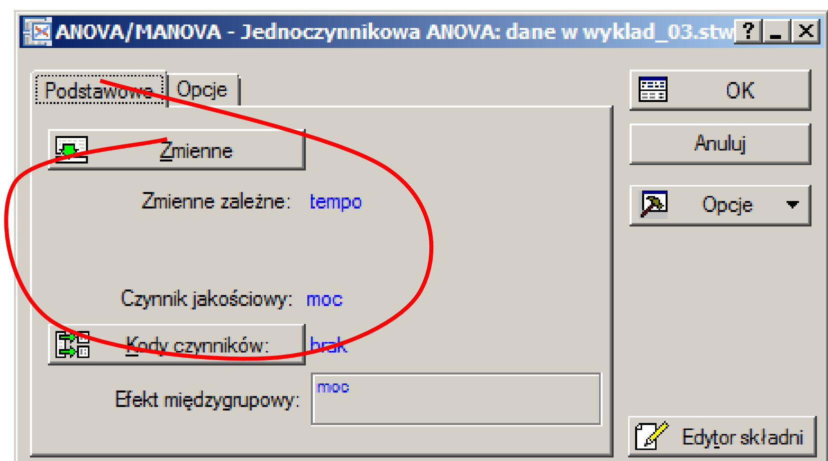
moc		{1} M=551,20	{2} M=587,40	{3} M=625,40	{4} M=707,00
160	{1}		0,006416	0,000008	0,000000
180	{2}	0,006416		0,004624	0,000000
200	{3}	0,000008	0,004624		0,000003
220	{4}	0,000000	0,000000	0,000003	

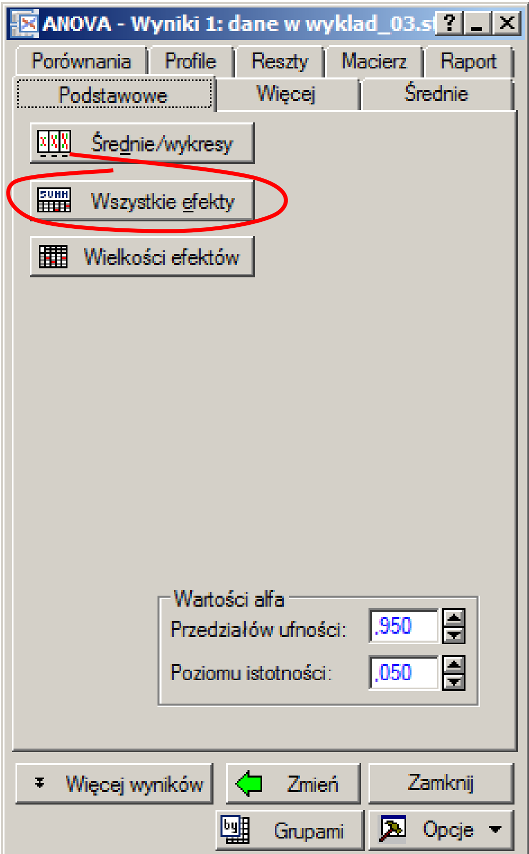
$\alpha > p - value$ dla wszystkich par mocy, hipotezę o braku istności we wszystkich 6 przypadkach należy odrzucić

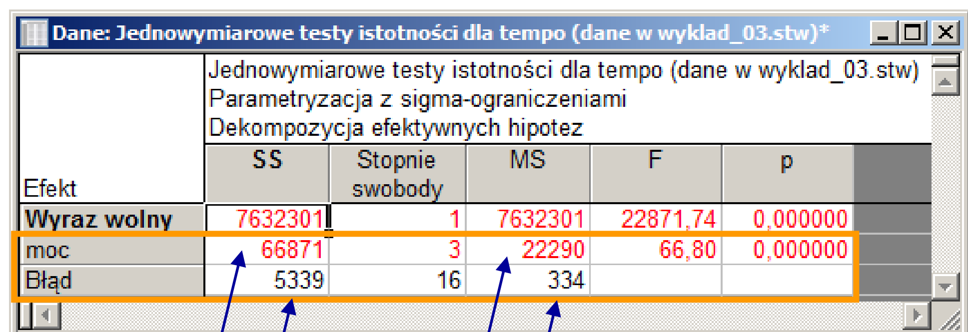
STATISTICA – ANOVA (metoda 2)









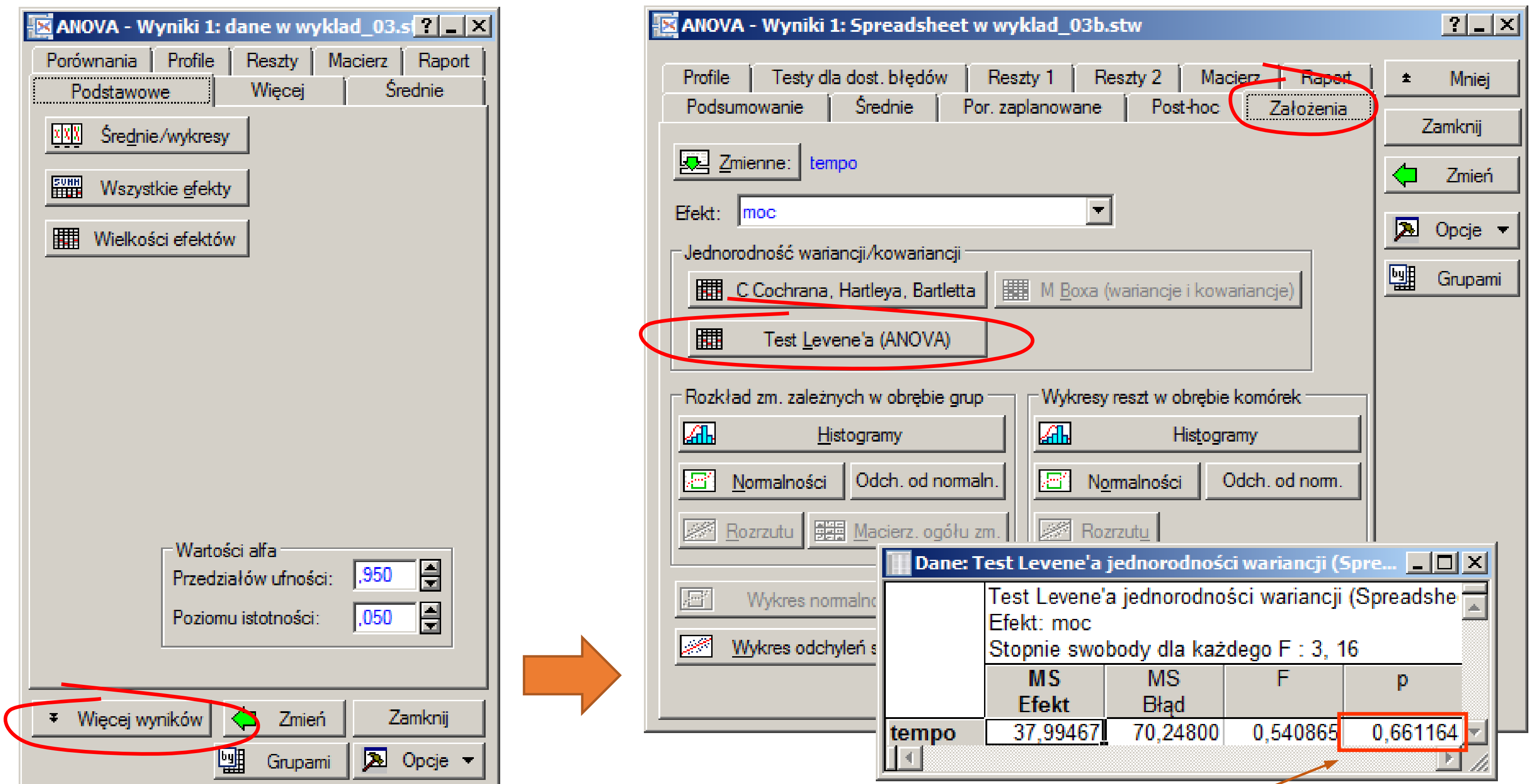

Dane: Jednowymiarowe testy istotności dla tempo (dane w wyklad_03.stw)*

Jednowymiarowe testy istotności dla tempo (dane w wyklad_03.stw)
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami
Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
Wyraz wolny	7632301	1	7632301	22871,74	0,000000
moc	66871	3	22290	66,80	0,000000
Błąd	5339	16	334		

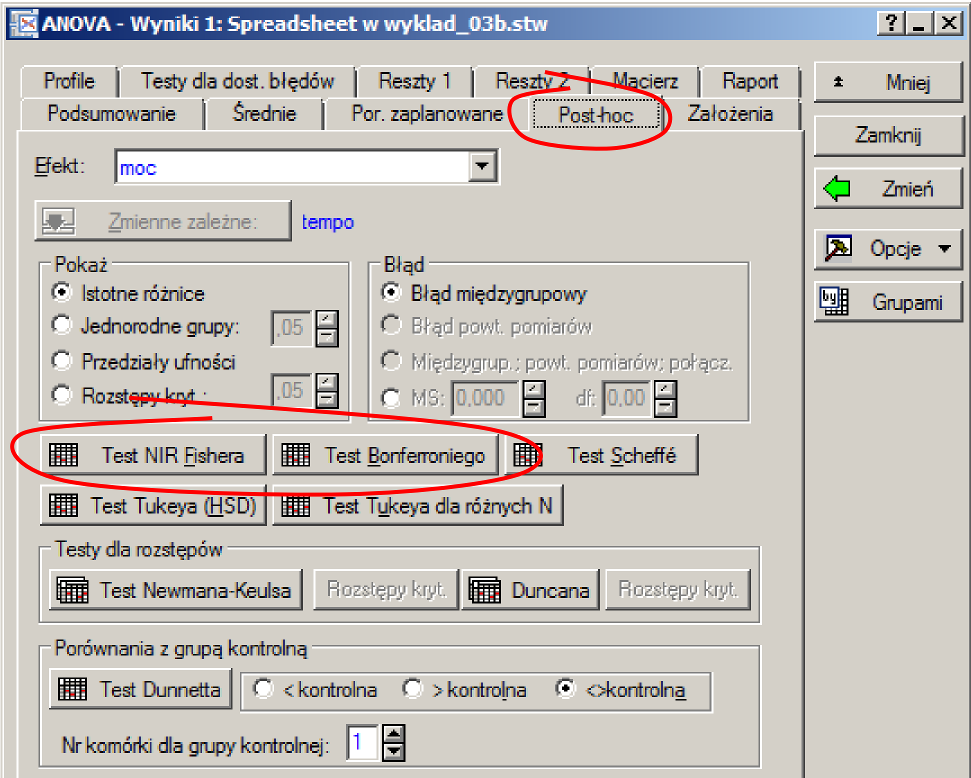
SS_τ SS_e MS_τ MS_e

STATISTICA – ANOVA (metoda 2)



nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji

STATISTICA – ANOVA (metoda 2)



$\alpha > p-value$ dla wszystkich par mocy, hipotezę o braku istności we wszystkich 6 przypadkach należy odrzucić

Dane: Test NIR; zmienna tempo (Spreadsheet w wyklad_03b....

Test NIR; zmienna tempo (Spreadsheet w wyklad_03b.stw
Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc
Błąd: MS międzygrupowe = 333,70, df = 16,000

Nr podkl.	moc	{1} 551,20	{2} 587,40	{3} 625,40	{4} 707,00
1	160		0,006416	0,000008	0,000000
2	180	0,006416		0,004624	0,000000
3	200	0,000008	0,004624		0,000003
4	220	0,000000	0,000000	0,000003	

Dane: Test Bonferroniego; zmienna tempo (Spreadsheet w w...

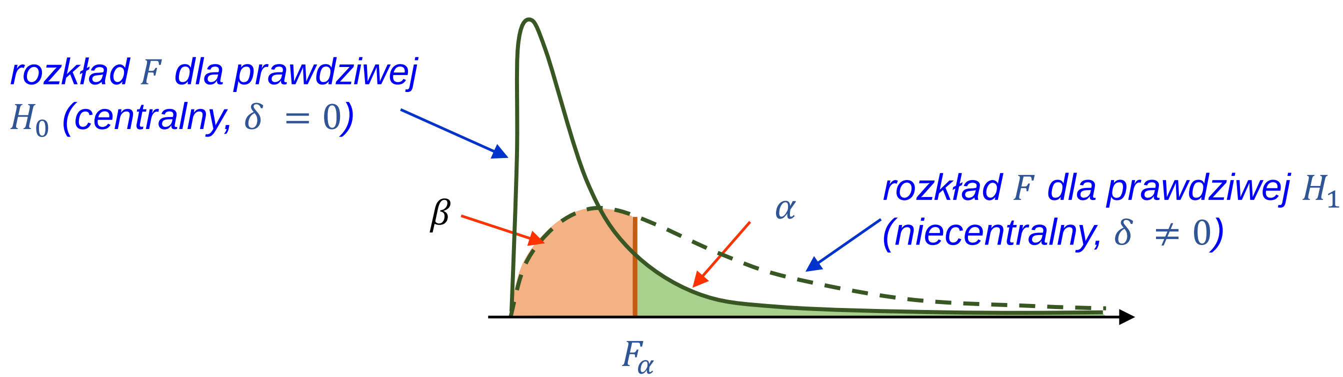
Test Bonferroniego; zmienna tempo (Spreadsheet w wykła
Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc
Błąd: MS międzygrupowe = 333,70, df = 16,000

Nr podkl.	moc	{1} 551,20	{2} 587,40	{3} 625,40	{4} 707,00
1	160		0,038497	0,000051	0,000000
2	180	0,038497		0,027746	0,000000
3	200	0,000051	0,027746		0,000016
4	220	0,000000	0,000000	0,000016	

Jednoczynnikowa ANOVA – rozkład F

Istotność wpływu poziomu czynnika wejściowego badana jest przez porównanie wariancji: MS_τ i MS_e z pomocą statystyki $F = \frac{MS_\tau}{MS_e} = \frac{SS_\tau}{a-1} / \frac{SS_e}{N-a}$.

H_0	Rozkład statystyki F	
	rozkład	parametry
prawdziwa	centralny rozkład F $F(a-1, N-a)$	stopnie swobody: $v_1 = (a-1)$ $v_2 = (N-a)$
fałszywa	niecentralny rozkład F $F^{nc}(a-1, N-a, \delta)$	stopnie swobody: v_1, v_2 stopień niecentralności: $\delta = r\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2$



Jednoczynnikowa ANOVA – moc testu

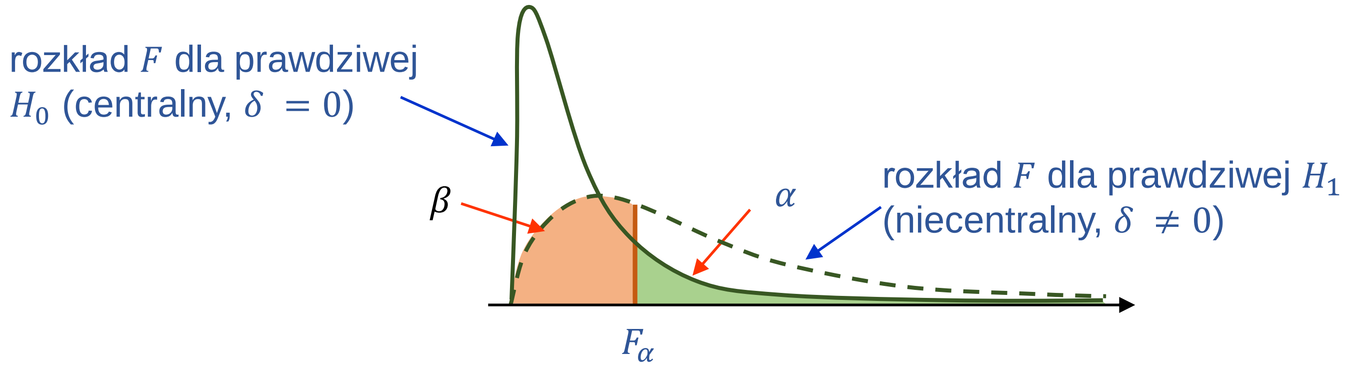
Moc testu opisuje zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych, więc w analizie wariancji:

$$1-\beta = P(F_n > F_\alpha | H_1) = 1 - \underbrace{P(F_n < F_\alpha | H_1)}_{F_{F^{nc}(a-1,N-a,\delta)}(F_\alpha)}$$

gdzie $F_\alpha = F^{-1}_{F(a-1,N-a)}(1-\alpha)$.

Ostatecznie moc testu wyznacza się jako:

$$1-\beta = 1 - F_{F^{nc}(a-1,N-a,\delta)}(F_\alpha)$$



Jednoczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

Wielkość efektu* – stopień do jakiego zjawisko istnieje.

Miara efektu – to wskaźnik pozwalający ocenić wielkość efektu lub jego miara liczbowa, istnieje wiele różnych wskaźników pozwalających wyrazić wielkość efektu, np.:

- **d Cohena**

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$$

← bezwymiarowy wskaźnik pozwalający ocenić wielkość różnicy pomiędzy średnimi w 2 porównywanych próbach

- **f i f^2 Cohena (iloraz sygnału do szumu)**

$$f = \frac{\sigma_\mu}{\sigma}$$

← bezwymiarowy wskaźnik pozwalający ocenić wielkość różnicy pomiędzy średnimi w kilku porównywanych próbach,

$$f = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}$$

σ_μ to wielkość różnicy średnich w kilku porównywanych próbach od średniej w próbach połączonych:

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}(\mu_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}$$

$$f^2 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\frac{\tau_i}{\sigma}$$

*Cohen J., *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*, Academic Press, 1977

Jednoczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

eta i eta^2

$$\eta = \frac{\sigma_\mu}{\sigma_t}$$

$$\eta^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_t^2} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2}$$

$$\eta^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$$

$$\eta^2 = \frac{\delta}{N+\delta}$$

f i f^2 Cohena

$$f^2 = \frac{1}{a}\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{\delta}{N}$$

$$f = \sqrt{f^2} = \sqrt{\frac{\delta}{N}}$$

$$f^2 = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$$

stopień niecentralności

$$\delta = r\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2$$

Ψ średniokwadratowy efekt standaryzowany RMSSE

(ang. Root Mean Square Standardized Effect)

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{a-1}\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2} = \sqrt{\frac{\delta}{r(a-1)}}$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{a}{a-1}}f$$

Jednoczynnikowa ANOVA – moc testu

Wyznaczyć moc testu dla przykładu z badaniem istotności wpływu mocy reaktora na szybkość trawienia płytek. Założyć, że poziom istotności $\alpha = 0{,}01,$ odchylenie standardowe pomiarów wynosi $\sigma = 25\ [\text{Å}/\min]$. Przyjąć, że uzyskanie szybkości trawienia 575, 600, 650 i $675\ [\text{Å}/\min]$ dla przyjętych poziomów mocy reaktora 160, 180, 200 i 220W oznacza, że wpływ mocy reaktora jest istotny statystycznie.

Podstawy odrzucenia hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1

Przyjmując, że:

$$\mu_1 = 575,\ \ \mu_2 = 600,\ \ \mu_3 = 650 \text{ i } \ \mu_4 = 675,$$

średnią wyznacza się jako:

$$\mu = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_i = \frac{1}{4}(575 + 600 + 650 + 675) = 625,$$

założone efekty ($\tau_i = \mu_i - \mu$) dla każdego z poziomów mocy wynoszą:

$$\tau_1 = 575 - 625 = -50, \qquad \tau_2 = 600 - 625 = -25,$$

$$\tau_3 = 650 - 625 = 25, \qquad \tau_4 = 675 - 625 = 50,$$

stopień niecentralności rozkładu w hipotezie H_1 powinien wynosić:

$$\delta = r\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2 = 5\cdot(2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2) = 5\cdot 10 = 50.$$

Zakładany efekt

Suma kwadratów efektów standaryzowanych wynosi:

$$\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2 = \left(\left(-\frac{50}{25}\right)^2 + \left(-\frac{25}{25}\right)^2 + \left(\frac{25}{25}\right)^2 + \left(\frac{50}{25}\right)^2\right) = 10.$$

Zakładany w eksperymencie efekt wynosi:

$$f^2 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot 10 = 2{,}5, \qquad f = \sqrt{f^2} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58,$$

$$RMSSE = \sqrt{\frac{1}{a-1}\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot 10} \approx 1{,}83.$$

Moc testu

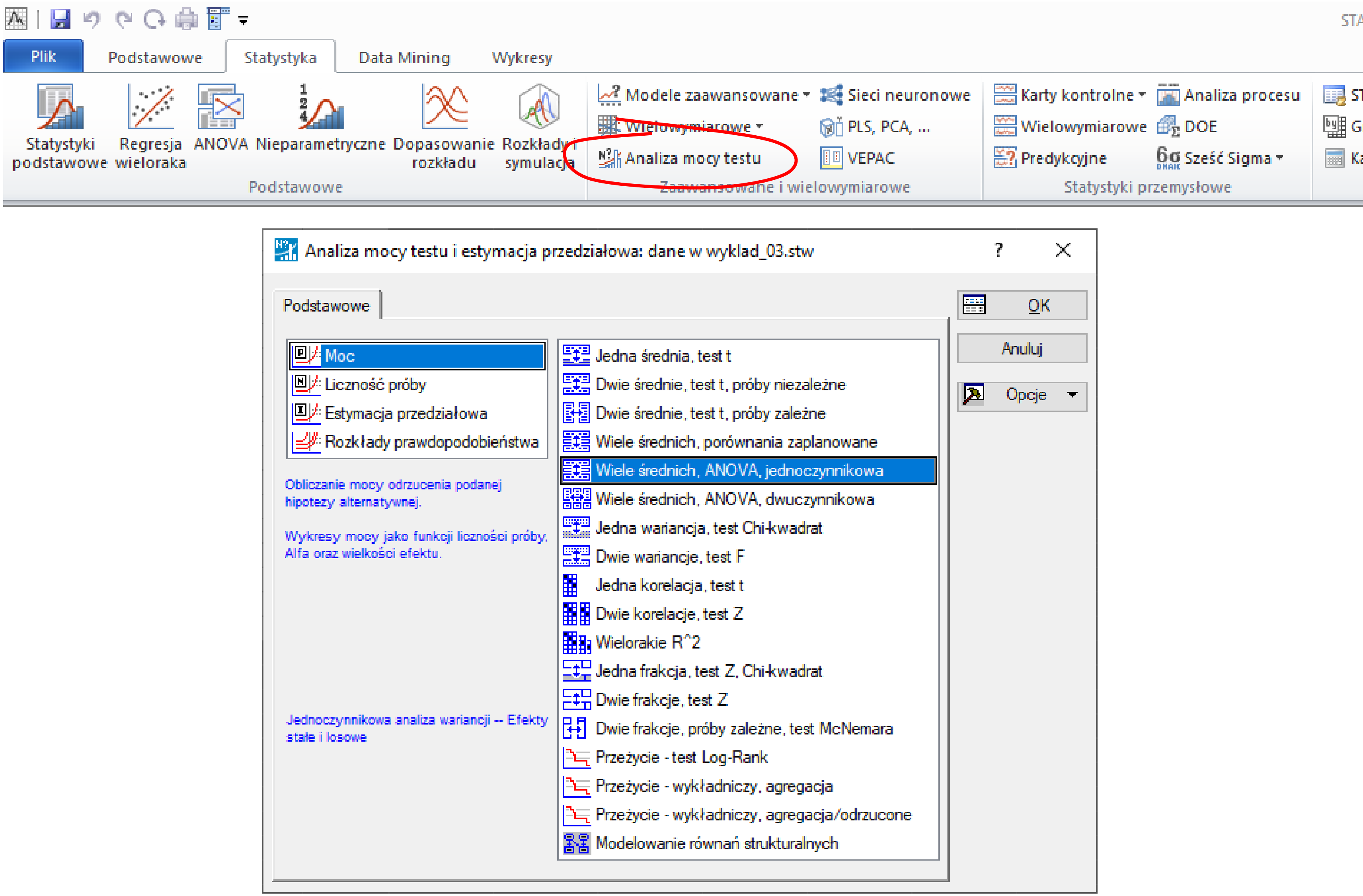
Dla przyjętego poziomu istotności, odrzucenie hipotezy H_0 nastąpi, gdy wartość statystyki F przekroczy wartość krytyczną ($a = 4$ poziomy mocy reaktora, $r = 5$ doświadczeń dla każdego z poziomów, liczba wszystkich doświadczeń $N = 20$):

$$F_\alpha = F^{-1}_{F(a-1,N-a)}(1-\alpha) = F^{-1}_{F(3,16)}(1-0{,}01) \approx 5{,}29.$$

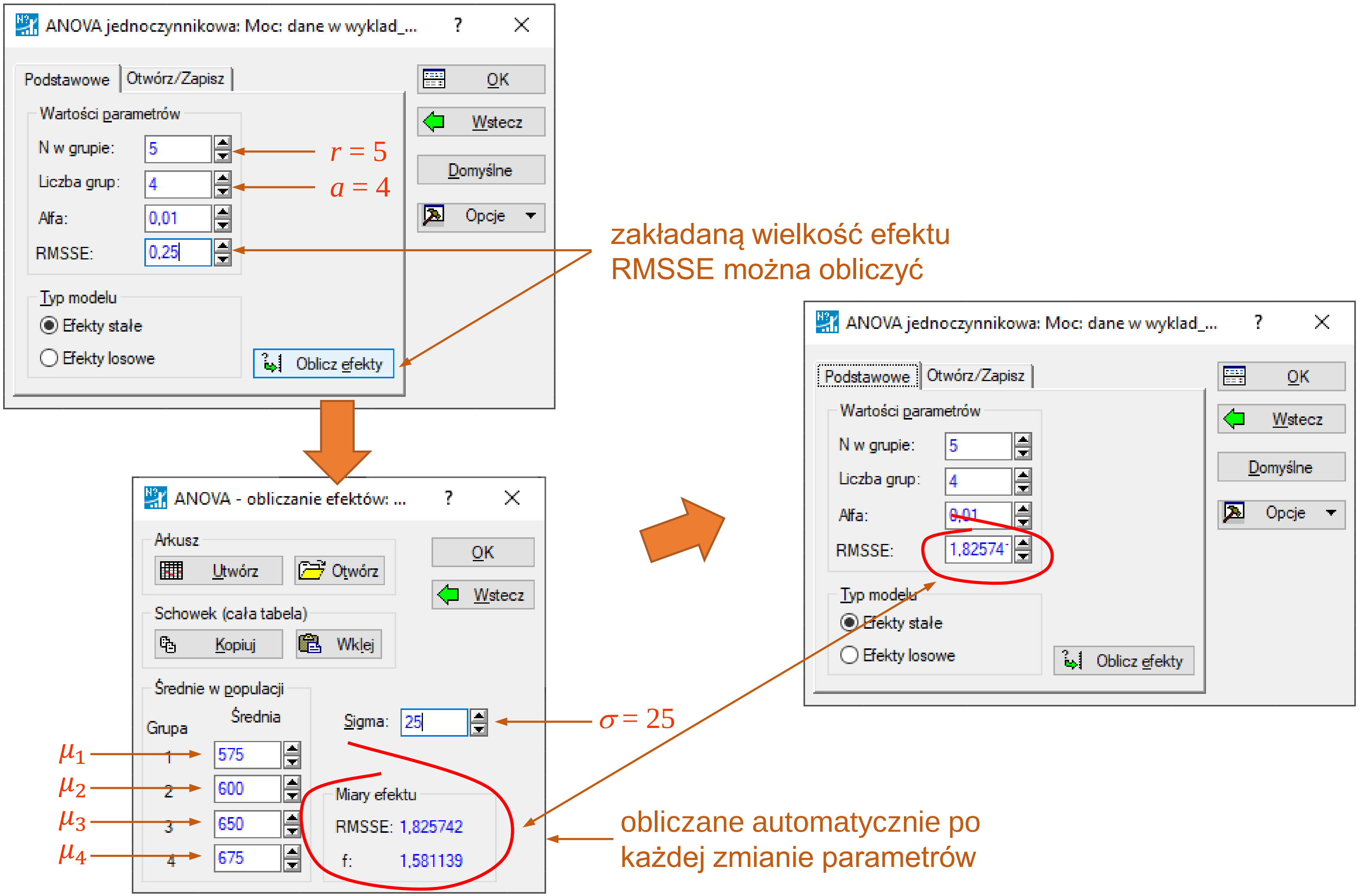
Moc testu dla zakładanego efektu

$$1-\beta = 1 - F_{F^{nc}(a-1,N-a,\delta)}(F_\alpha) = 1 - F_{F^{nc}(3,16,10)}(5{,}29) \approx 0{,}9964.$$

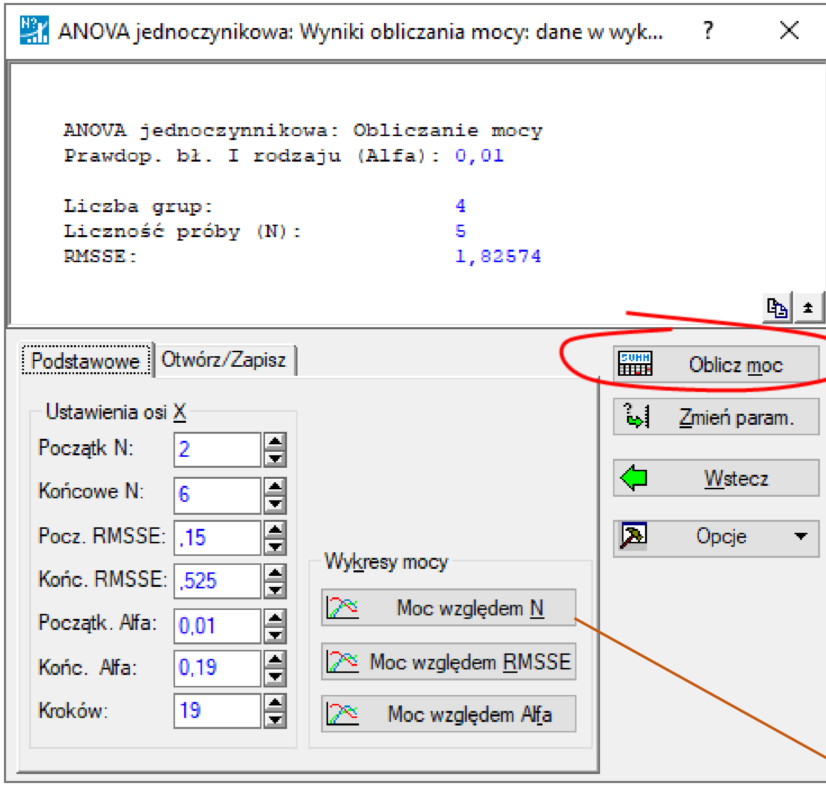
STATISTICA – analiza mocy testu



STATISTICA – analiza mocy testu



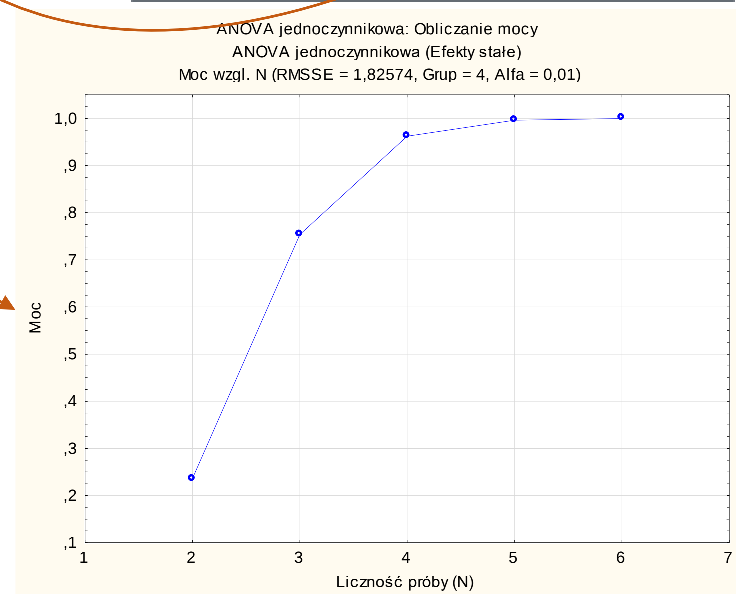
STATISTICA – analiza mocy testu



wyklad_03.stw - Moc (dane w wyklad_03.stw)

	Moc (dane w ANOVA jedr Efekty stałe Wartość
Liczba grup	4,0000
Liczność próby (N)	5,0000
RMSSE	1,8257
Parametr niecentralności (Delta)	50,0000
Prawdop. bł. I rodzaju (Alfa)	0,0100
Df efektu	3,0000
Df błędu	16,0000
Wartość krytyczna F	5,2922
Moc	0,9964

Moc (dane w wyklad_03.stw)



f Cohena a rozpiętość standaryzowana

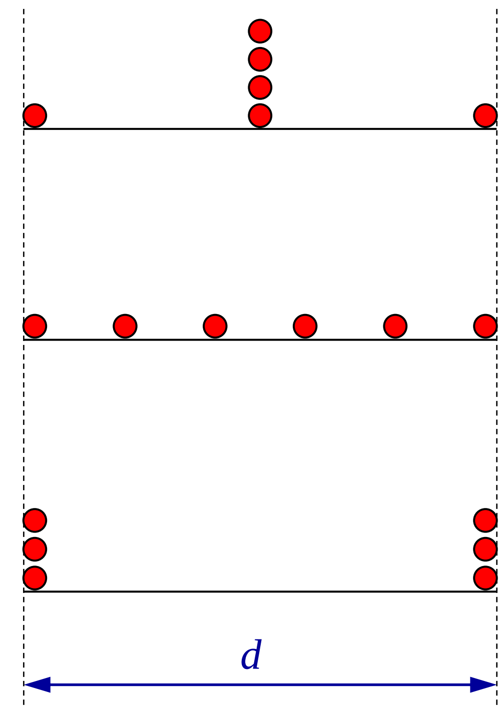
Niech d oznacza standaryzowaną rozpiętość, tzn.:

$$d = \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{\sigma}$$

μ_{max}, μ_{min} – największa i najmniejsza wartość średniej otrzymana na jednym z a analizowanych poziomów

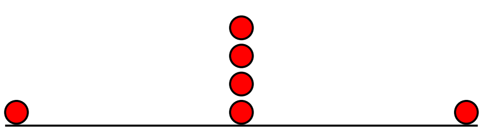
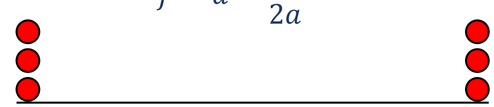
Podstawowe typy zmienności (wg. Cohena*):

- minimalna – średnie rozłożone równomiernie na przedziale wyznaczonym przez d
- średnia – średnie dla 2 poziomów na brzegach zakresu d, pozostałe średnie na środku zakresu
- maksymalna – średnie rozłożone na brzegach zakresu d



*Cohen J., *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*, Academic Press, 1977

Rozpiętość standaryzowana a f Cohena

d rozpiętość standaryzowana a f Cohena $\left(f=\sqrt{\frac{1}{a}\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}\right)$		
mała	**średnia**	**duża**
niech $\tau_1=-\frac{1}{2}d\sigma,\quad \tau_2=\frac{1}{2}d\sigma,$ $\tau_3=\cdots=\tau_a=0$ więc $\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}d\right)^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^2+0$ $\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{2}d^2$ czyli $f=\sqrt{\frac{1}{2a}d^2}=\frac{1}{\sqrt{2a}}d$ 	niech $\tau_i=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i-1}{a-1}\right)d\sigma$ więc $\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2=\sum\left(-\frac{1}{2}+\frac{i-1}{a-1}\right)^2d^2$ $\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2=\frac{a(a+1)}{12(a-1)}d^2$ czyli $f=\frac{1}{2}d\sqrt{\frac{a+1}{3(a-1)}}$ 	niech a jest parzyste, oraz $\tau_1=\cdots=\tau_{\frac{1}{2}a}=-\frac{1}{2}d\sigma$ $\tau_{\frac{1}{2}a+1}=\cdots=\tau_a=\frac{1}{2}d\sigma$ więc $\sum\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2=\sum\left(\frac{1}{2}d\right)^2=\frac{1}{4}ad^2$ czyli jeśli a jest parzyste $f=\frac{1}{2}d$ jeśli a jest nieparzyste $f=d\frac{\sqrt{a^2-1}}{2a}$ 

Efekt „mały”, „średni”, „duży”

efekt	„mały”	„średni”	„duży”
f Cohena*	0,1	0,25	0,4

Terminy* „mały”, „średni”, „duży” są względne, nie tylko wobec siebie, ale również wobec obszaru nauk behawioralnych, a nawet specyfiki badania lub użytej w nim metody. W obliczu tej względności, istnieje pewne niebezpieczeństwo w proponowaniu zwyczajowych definicji dla tych terminów w kontekście analizy mocy. Ryzyko to niemniej jest tolerowane ponieważ wierzymy, że narażając się na nie więcej zdobędziemy niż stracimy poprzez stworzenie jakiegoś źródła odniesienia w przypadku, gdy nie istnieją inne sposoby oszacowania wielkości efektu.

**Cohen J., Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences, Academic Press, 1977*

Wpływ f Cohena na rozpiętość standaryzowaną d									
	efekt „mały”			efekt „średni”			efekt „duży”		
a	min	$śr$	max	min	$śr$	max	min	$śr$	max
2	0,20	0,20	0,20	0,50	0,50	0,50	0,80	0,80	0,80
3	0,24	0,24	0,21	0,61	0,61	0,53	0,98	0,98	0,85
4	0,28	0,27	0,20	0,71	0,67	0,50	1,13	1,07	0,80
5	0,32	0,28	0,20	0,79	0,71	0,51	1,26	1,13	0,82
6	0,35	0,29	0,20	0,87	0,73	0,50	1,39	1,17	0,80
7	0,37	0,30	0,20	0,94	0,75	0,51	1,50	1,20	0,81
8	0,40	0,31	0,20	1,00	0,76	0,50	1,60	1,22	0,80
9	0,42	0,31	0,20	1,06	0,77	0,50	1,70	1,24	0,80
10	0,45	0,31	0,20	1,12	0,78	0,50	1,79	1,25	0,80

$min,\ śr,\ max$
zmienność minimalna, średnia i maksymalna

Jednoczynnikowa ANOVA – moc testu

Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}01$ i $a = 4$ poziomów mocy reaktora należy zaplanować eksperyment w taki sposób, żeby moc testu wyniosła $0{,}9$. Założyć, że z wcześniejszych doświadczeń wynika, że odchylenie standardowe pomiarów wynosi $\sigma = 25\ [\text{Å}/\min]$, zmienność jest minimalna a odrzucenie hipotezy o braku istotności wpływu mocy reaktora powinno nastąpić gdy odległość pomiędzy maksymalną i minimalną średnią wyniesie $75\ [\text{Å}/\min]$.

Z założeń eksperymentu wynika, że:

$$d = \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{\sigma} = \frac{75}{25} = 3$$

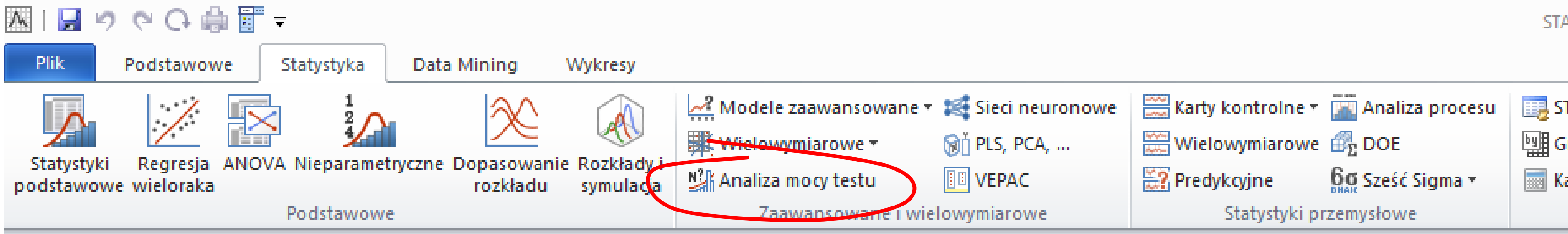
z zakładanej minimalnej zmienności można wyznaczyć wskaźnik f Cohena:

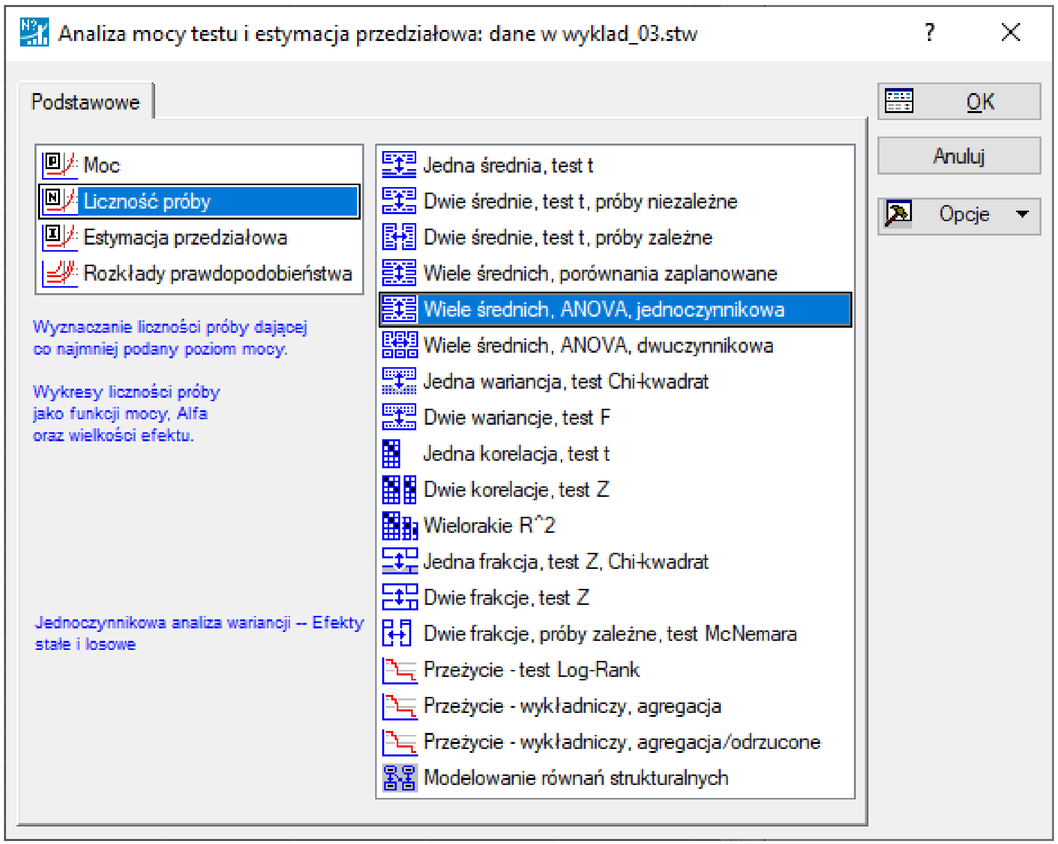
$$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{a}}}\mathrm{d} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4}}\ 3 \approx 1{,}0607,$$

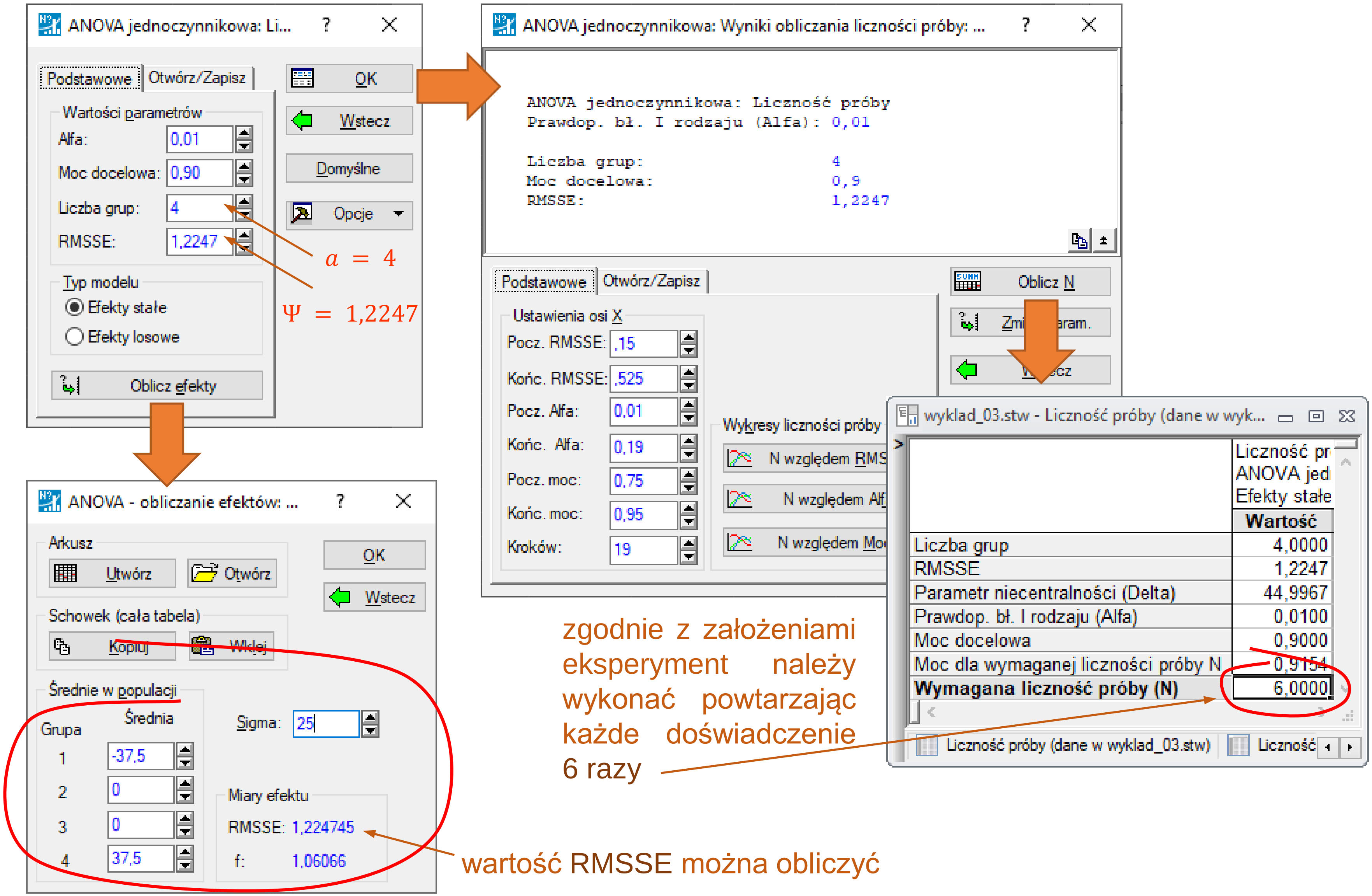
średniokwadratowy efekt standaryzowany Ψ (RMSSE) wynosi więc:

$$\Psi = \sqrt{\frac{a}{a-1}}\, f \approx \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot 1{,}0607 \approx 1{,}2247.$$

STATISTICA – analiza mocy testu







zgodnie z założeniami eksperyment należy wykonać powtarzając każde doświadczenie 6 razy

wartość RMSSE można obliczyć