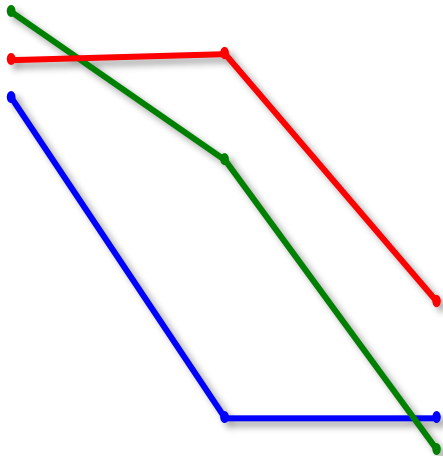


# Planowanie doświadczeń

## Eksperymenty dwuczynnikowe ANOVA



Materiały

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

# Eksperymenty dwuczynnikowe

## Eksperymenty dwuczynnikowe (*ang. experiments with two factors*)

- badają istotność wpływu dwóch zmiennych niezależnych na zmienną zależną,
- uwzględniana jest jedna zmienna zależna,
- uwzględniane są dwie zmienne niezależne,
- zmienne niezależne mogą przyjmować wartości na kilku poziomach.



Czynnik B \ Czynnik A	1	...	$b$
1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11r}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1br}$
⋮			
$a$	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1r}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abr}$

# Eksperymenty dwuczynnikowe

Eksperymenty dwuczynnikowe wykonywane są wg. *planu randomizowanego kompletnego*.

Plan taki zakłada, że:

- doświadczenia wykonywane są w losowej kolejności,
- wartości zmiennych niezależnych są z góry określone, liczba wartości jest uzależniona od rodzaju przeprowadzanego badania, wartości nazywane są *poziomami*, liczba poziomów może być dowolna.

*poziomy czynnik B*

		<i>poziomy czynnik B</i>		
		1	...	<i>b</i>
<i>poziomy czynnik A</i>	Czynnik B			
	Czynnik A			
	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11r}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1br}$
⋮				
<i>a</i>	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1r}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abr}$	

# Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki eksperymentu, w którym zmienne niezależne  $A$  i  $B$  przyjmowały wartości na poziomach: niskim i wysokim:  $A^-$ ,  $A^+$ ,  $B^-$ ,  $B^+$ .

$A \backslash B$	$B^-$	$B^+$
$A^-$	1	3
$A^+$	5	9

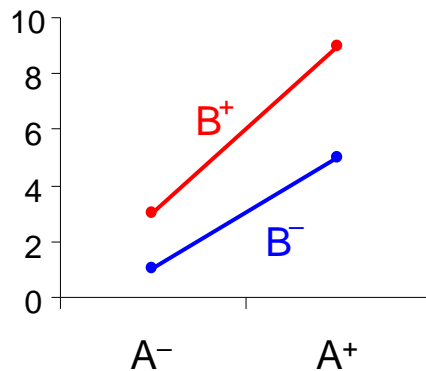
## Efekt $A$ (wpływ czynnika $A$ )

- na poziomie  $B^-$   
 $A = 5 - 1 = 4$
- na poziomie  $B^+$   
 $A = 9 - 3 = 6$
- średnio:  
 $A = (4 + 6)/2 = 5$

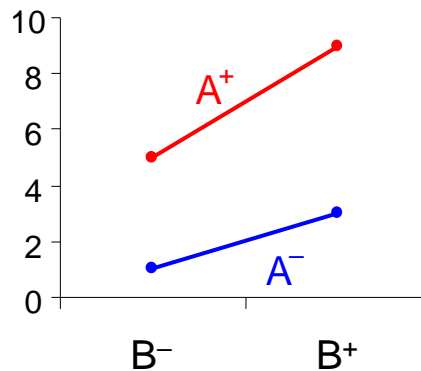
## Efekt $B$ (wpływ czynnika $B$ )

- na poziomie  $A^-$   
 $B = 3 - 1 = 2$
- na poziomie  $A^+$   
 $B = 9 - 5 = 4$
- średnio:  
 $B = (2 + 4)/2 = 3$

efekt  $A$  *jest zależny* od poziomu  $B$



efekt  $B$  *jest zależny* od poziomu  $A$



## Efekt interakcji wyznacza się licząc

- średnią różnicę efektu  $A$  na poziomach  $B^+$  i  $B^-$   
 $AB = (6 - 4)/2 = 1$
- średnią różnicę efektu  $B$  na poziomach  $A^+$  i  $A^-$   
 $AB = (4 - 2)/2 = 1$

\*zmienne niezależne np.:  $A$  – metoda produkcji,  $B$  – rodzaj surowca, zmienna zależna:  $y$  – wytrzymałość produktu

# Efekty główne i interakcje

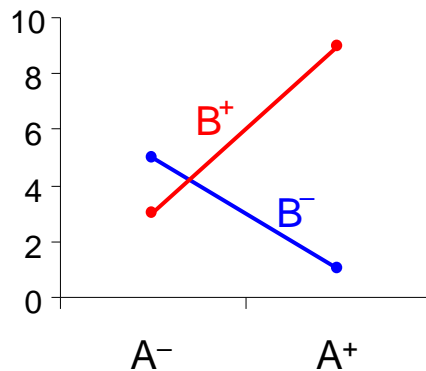
W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	$B^-$	$B^+$
$A^-$	5	3
$A^+$	1	9

## Efekt $A$ (wpływ czynnika $A$ )

- na poziomie  $B^-$   
 $A = 1 - 5 = -4$
- na poziomie  $B^+$   
 $A = 9 - 3 = 6$
- średnio  
 $A = (-4 + 6)/2 = 1$

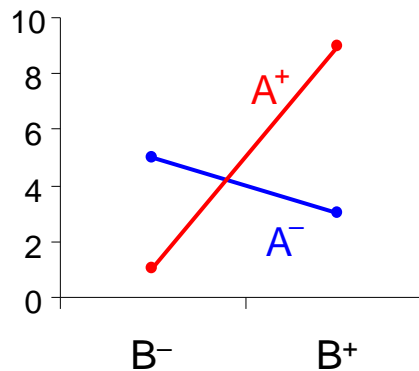
efekt  $A$  *jest zależny* od poziomu  $B$



## Efekt $B$ (wpływ czynnika $B$ )

- na poziomie  $A^-$   
 $B = 3 - 5 = -2$
- na poziomie  $A^+$   
 $B = 9 - 1 = 8$
- średnio  
 $B = (-2 + 8)/2 = 3$

efekt  $B$  *jest zależny* od poziomu  $A$



## efekt interakcji

- $AB = (6 - -4)/2 = 5$
- $AB = (8 - -2)/2 = 5$

# Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	$B^-$	$B^+$
$A^-$	2	4
$A^+$	2	6

## Efekt $A$ (wpływ czynnika $A$ )

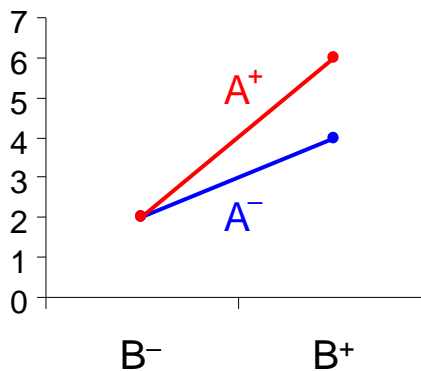
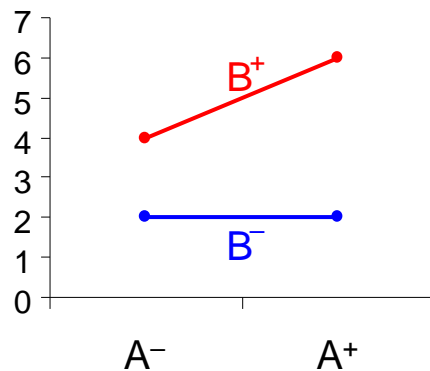
- na poziomie  $B^-$   
 $A = 2 - 2 = 0$
- na poziomie  $B^+$   
 $A = 6 - 4 = 2$
- średnio  
 $A = (0 + 2)/2 = 1$

efekt  $A$  *jest zależny* od poziomu  $B$

## Efekt $B$ (wpływ czynnika $B$ )

- na poziomie  $A^-$   
 $B = 4 - 2 = 2$
- na poziomie  $A^+$   
 $B = 6 - 2 = 4$
- średnio  
 $B = (2 + 4)/2 = 3$

efekt  $B$  *jest zależny* od poziomu  $A$



## efekt interakcji

- $AB = (2 - 0)/2 = 1$
- $AB = (4 - 2)/2 = 1$

# Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$B$	$B^-$	$B^+$
$A$		
$A^-$	3	1
$A^+$	5	3

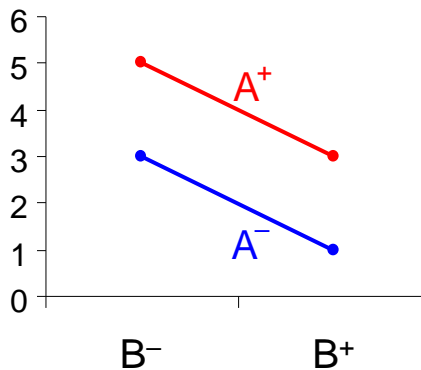
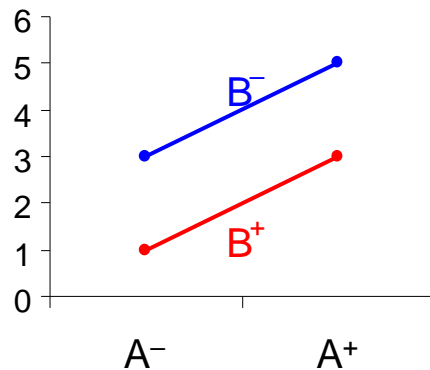
## Efekt $A$ (wpływ czynnika $A$ )

- na poziomie  $B^-$   
 $A = 5 - 3 = 2$
- na poziomie  $B^+$   
 $A = 3 - 1 = 2$
- średnio  
 $A = (2 + 2)/2 = 2$

## Efekt $B$ (wpływ czynnika $B$ )

- na poziomie  $A^-$   
 $B = 1 - 3 = -2$
- na poziomie  $A^+$   
 $B = 3 - 5 = -2$
- średnio  
 $B = (-2 + -2)/2 = -2$

efekt  $A$  *nie jest zależny* od poziomu  $B$     efekt  $B$  *nie jest zależny* od poziomu  $A$



## efekt interakcji

- $AB = (2 - 2)/2 = 0$
- $AB = (-2 - -2)/2 = 0$

# Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	$B^-$	$B^+$
$A^-$	2	5
$A^+$	2	5

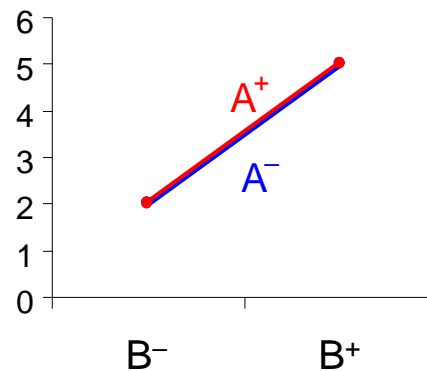
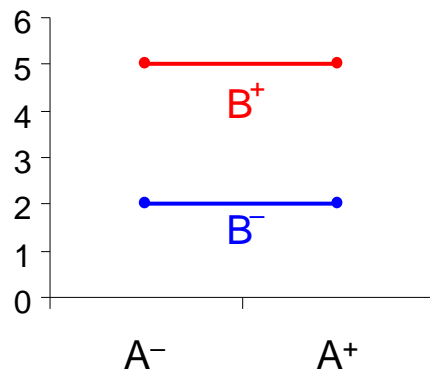
## Efekt $A$ (wpływ czynnika $A$ )

- na poziomie  $B^-$   
 $A = 2 - 2 = 0$
- na poziomie  $B^+$   
 $A = 5 - 5 = 0$
- średnio  
 $A = (0 + 0)/2 = 0$

## Efekt $B$ (wpływ czynnika $B$ )

- na poziomie  $A^-$   
 $B = 5 - 2 = 3$
- na poziomie  $A^+$   
 $B = 5 - 2 = 3$
- średnio  
 $B = (3 + 3)/2 = 3$

efekt  $A$  *nie jest zależny* od poziomu  $B$     efekt  $B$  *nie jest zależny* od poziomu  $A$



## efekt interakcji

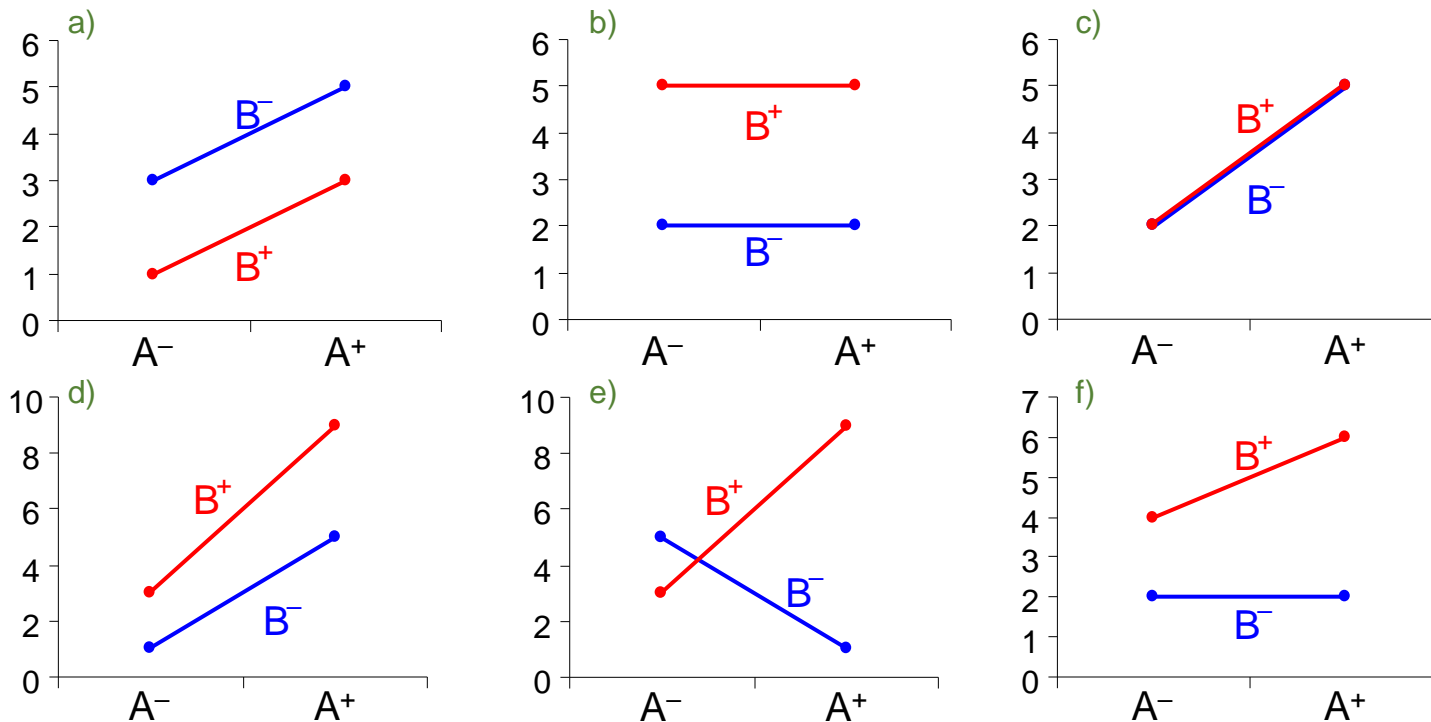
- $AB = (0 - 0)/2 = 0$
- $AB = (3 - 3)/2 = 0$



# Efekty główne i interakcje

**Efekt główny** czyli wpływ czynnika na zmienną zależną definiuje się jako zmianę wartości zmiennej zależnej wywołaną zmianą poziomu czynnika.

**Efekt interakcji** to jednoczesny wpływ kilku czynników na zmienną zależną.



*Równoległość linii na wykresach a)-c) wskazuje na brak interakcji czynników, poziome linie na wykresie b) oznaczają brak wpływu czynnika A na zmienną zależną, pozioma linia na wykresie f) oznacza brak wpływu czynnika A na poziom B<sup>-</sup> na zmienną zależną*

W **eksperymentach dwuczynnikowych** badana jest istotność wpływu *dwóch zmiennych niezależnych* na *jedną zmienną zależną* w przypadku, gdy zmienne niezależne przyjmują *wartości* na *kilku poziomach*.

Dla wyników otrzymanych w eksperymencie można stworzyć **model** uwzględniający efekty główne i efekty interakcji:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

gdzie:

$$i = 1 \dots a, j = 1 \dots b, k = 1 \dots r,$$

$y_{ijk}$  – wynik  $k$ -tej powtórki doświadczenia przeprowadzonego na  $i$ -tym poziomie czynnika  $A$  i  $j$ -tym poziomie czynnika  $B$ ,

$\tau_i, \beta_j$  – efekt  $i$ -tego poziomu czynnika  $A$  oraz  $j$ -tego poziomu czynnika  $B$ ,

$(\tau\beta)_{ij}$  – efekt interakcji  $i$ -tego poziomu czynnika  $A$  oraz  $j$ -tego poziomu czynnika  $B$ ,

$\mu$  – ogólna średnia zmiennej wyjściowej,

$e_{ijk}$  – błąd losowy zawierający wszystkie pozostałe składowe zmienności zmiennej wyjściowej, zakłada się, że  $E(e_{ijk}) = 0$

Zwykle przyjmuje się, że  $\tau_i$ ,  $\beta_j$ ,  $(\tau\beta)_{ij}$  opisują odchylenia od średniej  $\mu$ , w związku z tym:

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$$

**model**

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

można zapisać w równoważnej postaci:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}.$$

## Istotności wpływu:

- poziomu czynnika wejściowego  $A$  można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ (co najmniej dla jednego } i \text{)}$$

- poziomu czynnika wejściowego  $B$  można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: \beta_j \neq 0 \text{ (co najmniej dla jednego } j \text{)}$$

- interakcji czynników  $A$  i  $B$  można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

$$H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ (dla wszystkich } i \text{ i } j \text{)}$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ (co najmniej dla jednej pary } (i, j) \text{)}$$

# Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

*Całkowita zmienność zmiennej zależnej* jest mierzona jako suma kwadratów odchyłeń tej zmiennej od średniej wartości z wszystkich obserwacji (*ang. total sum of squares*):

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2.$$

może być ona zdekomponowana na *zmienność wyjaśnioną przyjętym modelem*:

$$SS_A = br \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2, \quad SS_B = ar \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2, \quad SS_{AB} = r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2,$$

i *zmienność niewyjaśnioną modelem*:

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2.$$

gdzie:  $y_{i..}$ ,  $y_{.j.}$ ,  $y_{ij.}$ ,  $y_{...}$ ,  $\bar{y}_{i..}$ ,  $\bar{y}_{.j.}$ ,  $\bar{y}_{ij.}$ ,  $\bar{y}_{...}$  to sumy i średnie:

$$\begin{aligned} y_{i..} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} & \bar{y}_{i..} &= \frac{1}{br} y_{i..} & y_{.j.} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^r y_{ijk} & \bar{y}_{.j.} &= \frac{1}{ar} y_{.j.} \\ y_{ij.} &= \sum_{k=1}^r y_{ijk} & \bar{y}_{ij.} &= \frac{1}{r} y_{ij.} & y_{...} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk} & \bar{y}_{...} &= \frac{1}{abr} y_{...} \end{aligned}$$

# Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r \left( \underbrace{(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})}_a + \underbrace{(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})}_b + \underbrace{(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})}_c + \underbrace{(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})}_d \right)^2 =$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 + \dots \\ &= br \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + ar \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 + \dots \\ &= SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_e \end{aligned}$$

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_e$$

pozostałe wyrazy się

zerują

np.

$$2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) = 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b r (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) = 2r \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) \underbrace{\sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})}_{=0} = 0$$

$$\sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) = \sum_{j=1}^b \bar{y}_{.j.} - b\bar{y}_{...} = \sum_{j=1}^b \frac{1}{ar} y_{.j.} - b \frac{1}{abr} y_{...} = \frac{1}{ar} y_{...} - \frac{1}{ar} y_{...} = 0$$

Po wprowadzeniu średnich kwadratów odchyłeń:

$MS_A$	$MS_B$	$MS_{AB}$	$MS_e$
$\frac{1}{a-1} SS_A$	$\frac{1}{b-1} SS_B$	$\frac{1}{(a-1)(b-1)} SS_{AB}$	$\frac{1}{ab(r-1)} SS_e$

i obliczeniu ich wartości oczekiwanych:

$E(MSA)$	$E(MSB)$	$E(MSAB)$	$E(MSe)$
$\sigma^2 + \frac{br}{a-1} \sum_{i=1}^a \tau_i^2$	$\sigma^2 + \frac{ar}{b-1} \sum_{j=1}^b \beta_j^2$	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2$	$\sigma^2$

okazuje się, że wariancję  $\sigma^2$  można oszacować w oparciu o:

- średnią  $MS_A$  – jeżeli dla każdego  $i$  prawdziwa jest hipoteza  $H_0: \tau_i = 0$
- średnią  $MS_B$  – jeżeli dla każdego  $j$  prawdziwa jest hipoteza  $H_0: \beta_j = 0$
- średnią  $MS_{AB}$  – jeżeli dla każdego  $i$  i  $j$  prawdziwa jest hipoteza  $H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0$
- średnią  $MS_e$  – niezależnie od prawdziwości stawianych hipotez zerowych:  
 $H_0: \tau_i = 0, H_0: \beta_j = 0, H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0$

# Dwuczynnikowa analiza wariancji

Istotność wpływu poziomów czynnika A, czynnika B oraz interakcji czynników A i B może być zbadana w wyniku porównania wariancji oszacowanej z pomocą:  $MS_A$ ,  $MS_B$  i  $MS_{AB}$  z wariancją oszacowaną na podstawie  $MS_e$ . Zmienne wykorzystane do porównania wariancji zestawione zostały w tabeli.

Istotność		
poziomów czynnika A	poziomów czynnika B	interakcji czynników A i B
$F_A = \frac{MS_A}{MS_e}$ $F_A = \frac{SS_A}{a-1} / \frac{SS_e}{ab(r-1)}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_e}$ $F_B = \frac{SS_B}{b-1} / \frac{SS_e}{ab(r-1)}$	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_e}$ $F_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)} / \frac{SS_e}{ab(r-1)}$

Statystyki  $F_A$ ,  $F_B$  i  $F_{AB}$  dla prawdziwych odpowiednich hipotez zerowych mają rozkład  $F$  Fishera-Snedecora

$F_A \sim F(a-1, ab(r-1))$	$F_B \sim F(b-1, ab(r-1))$	$F_{AB} \sim F((a-1)(b-1), ab(r-1))$
----------------------------	----------------------------	--------------------------------------

Jeśli hipotezy zerowe w testach istotności wpływu czynników i interakcji są:

- prawdziwe to odpowiednie zmienne  $F = 1$ ,
  - fałszywe to odpowiednie zmienne  $F > 1$ .
- } obszar krytyczny w teście  
} jest prawostronny



# Dwuczynnikowa analiza wariancji

Należy wybrać jeden z 3 rodzajów materiałów, który ma być zastosowany w baterii zasilającej urządzenie wystawione na działanie dużych różnic temperatur. Zaplanowano eksperyment, którego celem miało być ustalenie, który z materiałów jest bardziej odporny na wahania temperatury. Zdecydowano o wyborze 3 temperatur zgodnych z warunkami, w których będzie pracowało urządzenie 15, 70 i 125°F (−9,44°C, 21,11°C, 51,67°C) i zaplanowano po 4 doświadczenia dla każdej kombinacji: materiał i temperatura.

Po zaplanowaniu eksperymentu i przeprowadzeniu doświadczeń w losowej kolejności uzyskane wyniki czasu pracy baterii w [godz.] zapisano w tablicy:

temperatura materiał	15°F	70°F	125°F
I	130, 74, 155, 180	34, 80, 40, 75	20, 82, 70, 58
II	150, 159, 188, 126	136, 106, 122, 115	25, 58, 70, 45
III	138, 168, 110, 160	174, 150, 120, 139	96, 82, 104, 60

\*Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley, 2012

# Dwuczynnikowa analiza wariancji

temperatura materiał	15°F	70°F	125°F	$y_{i..}$	$\bar{y}_{i..}$
I	130, 74, 155, 180	34, 80, 40, 75	20, 82, 70, 58	998	83,17
II	150, 159, 188, 126	136, 106, 122, 115	25, 58, 70, 45	1300	108,33
III	138, 168, 110, 160	174, 150, 120, 139	96, 82, 104, 60	1501	125,08
$y_{.j.}$	1738	1291	770	$y_{...} = 3799$	
$\bar{y}_{.j.}$	144,83	107,58	64,17	$\bar{y}_{...} \approx 105,53$	

$$SS_A = br \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = 3 \cdot 4 \cdot ((83,17 - 105,53)^2 + (108,33 - 105,53)^2 + (125,08 - 105,53)^2) \approx 10683,72$$

$$SS_B = ar \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = 3 \cdot 4 \cdot ((144,83 - 105,53)^2 + (107,58 - 105,53)^2 + (64,17 - 105,53)^2) \approx 39118,72$$

$$SS_{AB} = r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 = 4 \cdot ((134,75 - 83,17 - 144,83 + 105,53)^2 + \dots) \approx 9613,78$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 = ((130 - 134,75)^2 + \dots + (60 - 85,50)^2) \approx 18230,75$$

# Dwuczynnikowa analiza wariancji

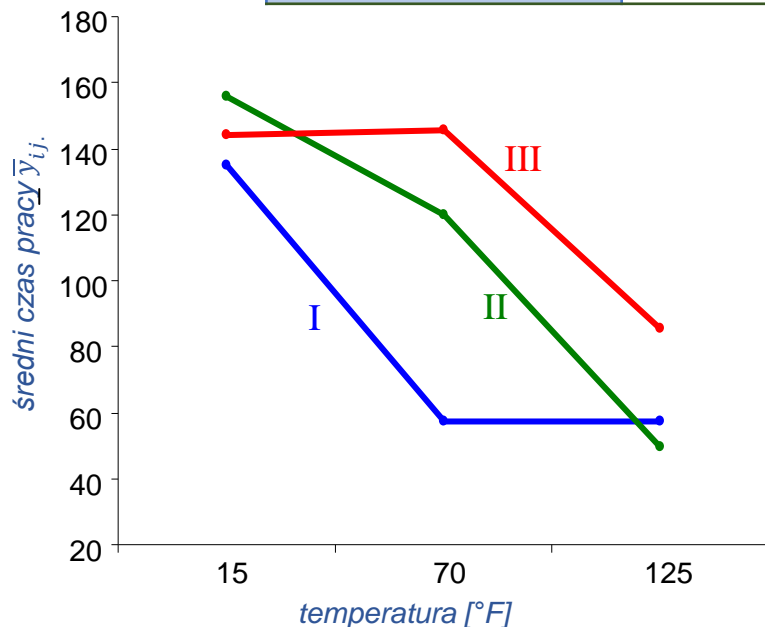
$MS_A$	$MS_B$	$MS_{AB}$	$MS_e$
$\frac{1}{a-1}SS_A \approx 5\,341,86$	$\frac{1}{b-1}SS_B \approx 19\,559,36$	$\frac{1}{(a-1)(b-1)}SS_{AB} \approx 2\,403,44$	$\frac{1}{ab(r-1)}SS_e \approx 675,21$
Istotność czynnika A			
$F_n = \frac{MS_A}{MS_e} \approx 7,91$ $F_\alpha = F_{F(2,27)}^{-1}(1 - 0,05) \approx 3,35$		$p - value = 1 - F_{F(2,27)}(7,91) \approx 0,001979$	
Istotność czynnika B			
$F_n = \frac{MS_B}{MS_e} \approx 28,97$ $F_\alpha = F_{F(2,27)}^{-1}(1 - 0,05) \approx 3,35$		$p - value = 1 - F_{F(2,27)}(28,97) \approx 0,000000$	
Istotność interakcji czynników A i B			
$F_n = \frac{MS_{AB}}{MS_e} \approx 3,56$ $F_\alpha = F_{F(4,27)}^{-1}(1 - 0,05) \approx 2,73$		$p - value = 1 - F_{F(4,27)}(3,56) \approx 0,018611$	

Zakładając  $\alpha = 0,05$  wszystkie testowane hipotezy zakładające brak istotności wpływu obydwu czynników i ich interakcji na wartość zmiennej zależnej (tzn. czasu pracy baterii) można odrzucić:

Czas pracy baterii zależy od obydwu testowanych czynników oraz od ich interakcji.

Badanie istotności można przeprowadzić w oparciu o analizę graficzną wykreślając średnie wartości zmiennej zależnej dla każdej kombinacji poziomu obydwu czynników.

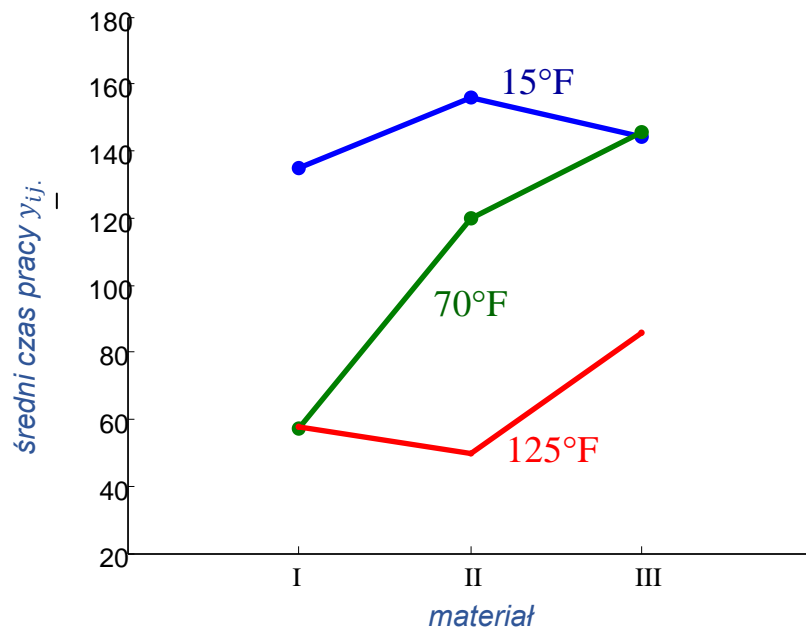
temperatura materiał	$\bar{y}_{ij}$			rozstęp
	15°F	70°F	125°F	
I	134,75	57,25	57,5	77,5
II	155,75	119,75	49,5	106,25
III	144	145,75	85,5	60,25



Z wykresu zmiennej zależnej w funkcji rodzaju materiału wynika, że

- efekt interakcji jest istotny (linie na wykresie nie są równoległe)
- uogólniając: wzrost temperatury prowadzi do krótszego czasu pracy baterii (wyjątki: materiał I: 70°F → 125°F; materiał III: 15°F → 70°F)
- materiał III daje najmniejszy spadek czasu pracy przy zmianie temperatury

temperatura materiał	$\bar{y}_{ij}$			rozstęp
	15°F	70°F	125°F	
I	134,75	57,25	57,5	77,5
II	155,75	119,75	49,5	106,25
III	144	145,75	85,5	60,25



Z wykresu zmiennej zależnej w funkcji rodzaju materiału wynika, że

- efekt interakcji jest istotny (linie na wykresie nie są równoległe)
- uogólniając: wzrost temperatury prowadzi do krótszego czasu pracy baterii (wyjątki: materiał I: 70°F → 125°F; materiał III: 15°F → 70°F)
- materiał III daje najmniejszy spadek czasu pracy przy zmianie temperatury

Model  $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$  ma  $1 + a + b + ab$  parametry ( $\mu, \tau_i, \beta_j, (\tau\beta)_{ij}$ ), są one szacowane  $\hat{\mu}, \hat{\tau}_i, \hat{\beta}_j, (\widehat{\tau\beta})_{ij}$  z zależności:

$$abr\hat{\mu} + br \sum \hat{\tau}_i + ar \sum \hat{\beta}_j + r \sum \sum (\widehat{\tau\beta})_{ij} = y_{...}$$

$$br\hat{\mu} + br \hat{\tau}_i + r \sum \hat{\beta}_j + r \sum (\widehat{\tau\beta})_{ij} = y_{i..}, \quad i = 1 \dots a$$

$$ar\hat{\mu} + r \sum \hat{\tau}_i + ar \hat{\beta}_j + r \sum (\widehat{\tau\beta})_{ij} = y_{.j.}, \quad j = 1 \dots b$$

$$r\hat{\mu} + r \hat{\tau}_i + r \hat{\beta}_j + r(\widehat{\tau\beta})_{ij} = y_{ij.}, \quad i = 1 \dots a, \quad j = 1 \dots b$$

ostatecznie

$$\hat{\mu} = y_{...}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad i = 1 \dots a$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, \quad j = 1 \dots b$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}, \quad i = 1 \dots a, \quad j = 1 \dots b$$

temperatura material	15°F	70°F	125°F	$\bar{y}_{i..}$
I	134,75	57,25	57,5	83,17
II	155,75	119,75	49,5	108,33
III	144	145,75	85,5	125,08
$\bar{y}_{.j.}$	144,83	107,58	64,17	$\bar{y}_{...} \approx 105,53$

$$\hat{\tau}_1 = 83,17 - 105,53 = -22,36$$

$$\hat{\beta}_1 = 144,83 - 105,53 = 39,31$$

$$\hat{\tau}_2 = 108,33 - 105,53 = 2,81$$

$$\hat{\beta}_2 = 107,58 - 105,53 = 2,06$$

$$\hat{\tau}_3 = 125,08 - 105,53 = 19,56$$

$$\hat{\beta}_3 = 64,17 - 105,53 = -41,36$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{11} = 134,75 - 83,17 - 144,83 + 105,53 = 12,28$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{12} = -27,97$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{13} = 15,69$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{21} = 8,11$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{22} = 9,36$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{23} = -17,47$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{31} = -20,39$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{32} = 18,61$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{33} = 1,78$$

W dwuczynnikowej analizie wariancji, podobnie jak w analizie jednoczynnikowej, w celu sprawdzenia założeń wykonywana jest **analiza resztowa**. W analizie badane są następujące własności **wartości resztowych**:

- normalność,
- homoscedastyczność tzn. stałość wariancji błędu dla poszczególnych wartości zmiennej niezależnej
- niezależność.

Reszty  $e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$  reprezentują różnice pomiędzy wartościami obserwowanymi  $y_{ijk}$  a wartościami otrzymywanymi z wykorzystywanego modelu  $\hat{y}_{ijk}$ . Wartości  $\hat{y}_{ijk}$  obliczane są jako:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{ijk} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + (\widehat{\tau\beta})_{ij} \\ &= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \\ &= \bar{y}_{ij.}\end{aligned}$$

więc reszty wyznaczone są jako:

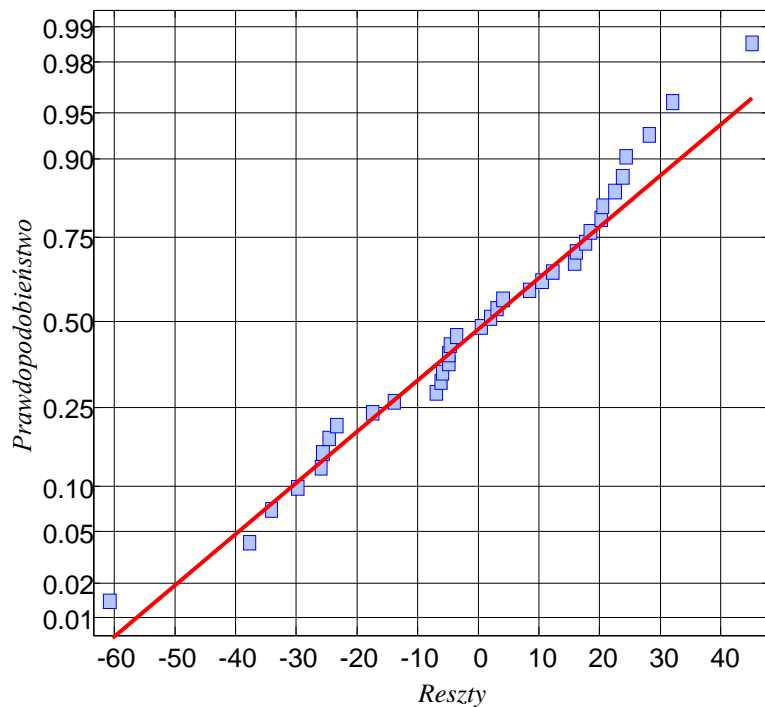
$$e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$$



# Sprawdzanie założeń

temperatura materiał	$e_{ijk}$											
	15°F				70°F				125°F			
I	-4,75	-60,75	20,25	45,25	-23,25	22,75	-17,25	17,75	-37,5	24,5	12,5	0,5
II	-5,75	3,25	32,25	-29,75	16,25	-13,75	2,25	-4,75	-24,5	8,5	20,5	-4,5
III	-6	24	-34	16	28,25	4,25	-25,75	-6,75	10,5	-3,5	18,5	-25,5

Wykres normalności



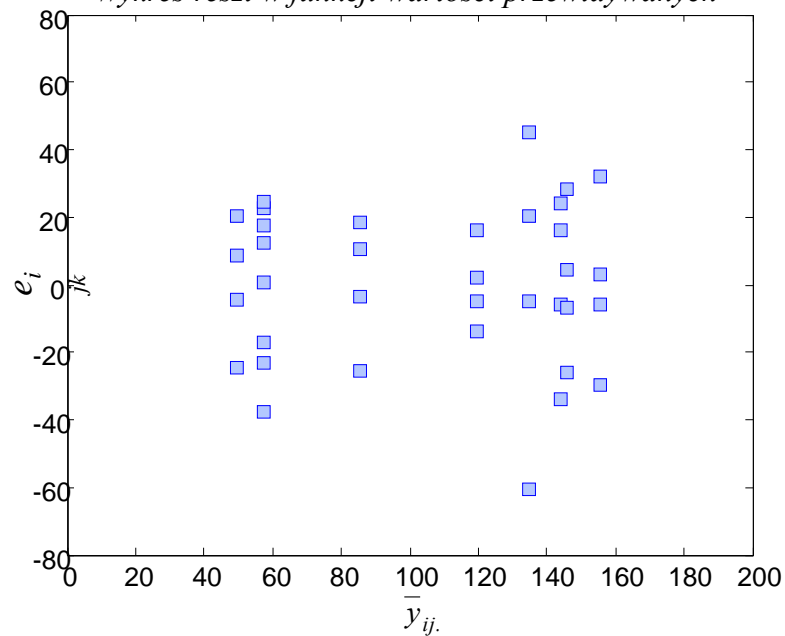
temperatura materiał	$\bar{y}_{ij}$		
	15°F	70°F	125°F
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

rozkład reszt jest w przybliżeniu  
rozkładem normalnym

# Sprawdzanie założeń

temperatura materiał	$e_{ijk}$											
	15°F				70°F				125°F			
I	-4,75	-60,75	20,25	45,25	-23,25	22,75	-17,25	17,75	-37,5	24,5	12,5	0,5
II	-5,75	3,25	32,25	-29,75	16,25	-13,75	2,25	-4,75	-24,5	8,5	20,5	-4,5
III	-6	24	-34	16	28,25	4,25	-25,75	-6,75	10,5	-3,5	18,5	-25,5

Wykres reszt w funkcji wartości przewidywanych



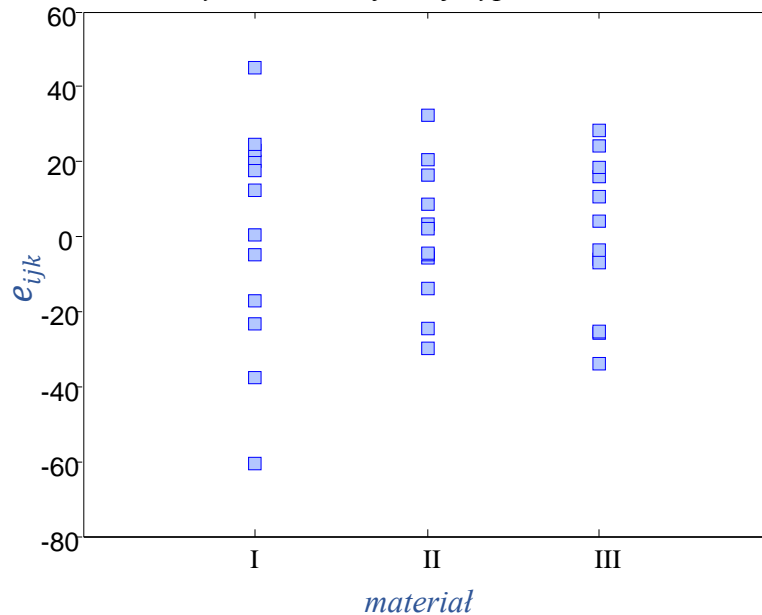
temperatura materiał	$\bar{y}_{ij}$		
	15°F	70°F	125°F
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

wykres pokazuje niewielki wzrost wariacji reszt dla dłuższych czasów pracy baterii

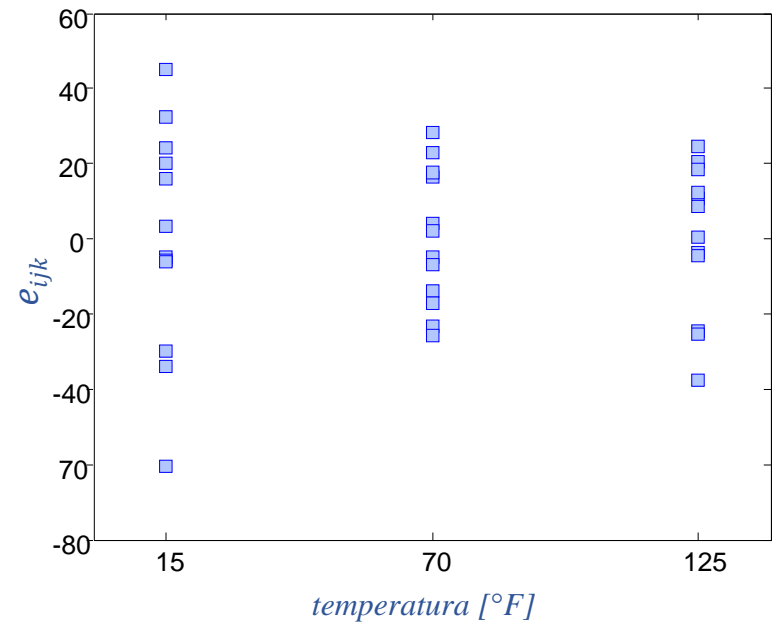
# Sprawdzanie założeń

temperatura material	$e_{ijk}$											
	15°F				70°F				125°F			
I	-4,75	-60,75	20,25	45,25	-23,25	22,75	-17,25	17,75	-37,5	24,5	12,5	0,5
II	-5,75	3,25	32,25	-29,75	16,25	-13,75	2,25	-4,75	-24,5	8,5	20,5	-4,5
III	-6	24	-34	16	28,25	4,25	-25,75	-6,75	10,5	-3,5	18,5	-25,5

Wykres reszt w funkcji typu materiału



Wykres reszt w funkcji temperatury pracy baterii



wykresy pokazują niewielki wzrost wariancji reszt dla materiału I i temperatury 15°F, różnica nie jest jednak na tyle duża żeby kwestionować wyniki przeprowadzonej analizy

**Testy post-hoc** (po fakcie) wykonywane są po stwierdzeniu istotności wpływu zmiennych niezależnych na zmienną zależną. Celem testów jest określenie, które poziomy zmiennej zależnej różnią się od siebie w sposób istotny. Badanie istotności można przeprowadzić przeprowadzając wybrany test **post-hoc**.

Najprostszym testem z tej grupy jest **test NIR Fishera**, w którym do weryfikacji hipotezy o równości średnich:

$$H_0: \mu_{ij} = \mu_{kl} \quad H_1: \mu_{ij} \neq \mu_{kl}$$

wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t* – Studenta o  $(ab(r-1))$  stopniach swobody:

$$t = \frac{\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{kl.}}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}}$$

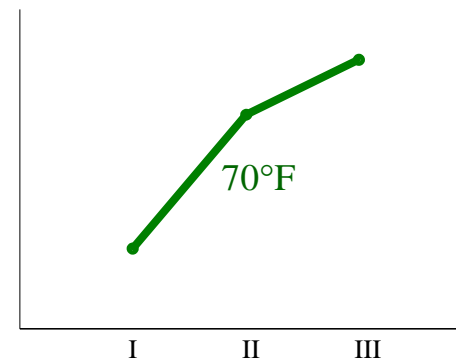
a obszar krytyczny budowany jest jako dwustronny.

W teście nie jest uwzględniana korekta poziomu  $\alpha$ , korekta taka wykonywana jest np. w **teście Bonferroniego**, który koryguje poziom  $\alpha$  dla pojedynczego porównania odwrotnie proporcjonalnie do liczby wszystkich par testów  $c$ , które można byłoby przeprowadzić:  $\frac{\alpha}{c}$ .

# Testy post-hoc

Porównanie istotności wpływu typu materiału na czas pracy baterii dla temperatury pracy  $70^{\circ}F$ .

temperatura materiał	$\bar{y}_{ij}$		
	$15^{\circ}F$	$70^{\circ}F$	$125^{\circ}F$
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5



Test NIR	$t_n$ dla $\alpha = 0,05$ $t_{\alpha} = F_{t(27)}^{-1}(\frac{1}{2}, 0,05) \approx -2,05$	$p\_value$
I vs. II	$\frac{\bar{y}_{12.} - \bar{y}_{22.}}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}} = \frac{57,25 - 119,75}{\sqrt{\frac{2}{4} 675,21}} \approx -3,4$	$2F_{t(27)}(-3,4) \approx 0,0021$
I vs. III	$\frac{\bar{y}_{12.} - \bar{y}_{32.}}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}} = \frac{57,25 - 145,75}{\sqrt{\frac{2}{4} 675,21}} \approx -4,82$	$2F_{t(27)}(-4,82) \approx 0,00005$
II vs. III	$\frac{\bar{y}_{22.} - \bar{y}_{32.}}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}} = \frac{119,75 - 145,75}{\sqrt{\frac{2}{4} 675,21}} \approx -1,42$	$2F_{t(27)}(-1,42) \approx 0,1685$

$$MS_e = \frac{SS_e}{ab(r-1)}$$

$$MS_e \approx \frac{18230,75}{27}$$

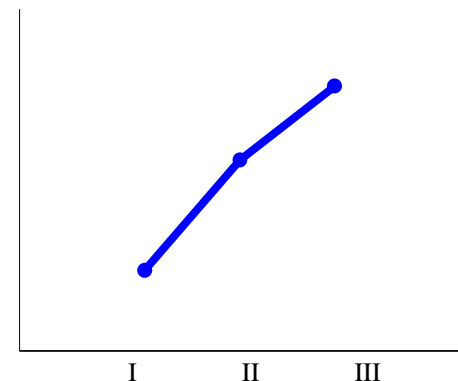
$$MS_e \approx 675,21$$

→ różnice średnich są istotne

→ różnica średnich nie jest istotna

Porównanie istotności wpływu typu materiału na czas pracy baterii.

temperatura materiał	$\bar{y}_{ij.}$			$\bar{y}_{i..}$
	15°F	70°F	125°F	
I	134,75	57,25	57,5	83,17
II	155,75	119,75	49,5	108,33
III	144	145,75	85,5	125,08



Test NIR	$t_n$	$p\_value$
	dla $\alpha = 0,05$ $t_\alpha = F_{t(27)}^{-1}(\frac{1}{2}, 0,05) \approx -2,05$	
I vs. II	$\frac{\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}}{\sqrt{\frac{2}{br} MS_e}} = \frac{83,17 - 108,33}{\sqrt{\frac{2}{12} 675,21}} \approx -2,37$	$2F_{t(27)}(-2,37) \approx 0,0251$
I vs. III	$\frac{\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{3..}}{\sqrt{\frac{2}{br} MS_e}} = \frac{83,17 - 125,08}{\sqrt{\frac{2}{12} 675,21}} \approx -3,95$	$2F_{t(27)}(-3,95) \approx 0,0005$
II vs. III	$\frac{\bar{y}_{2..} - \bar{y}_{3..}}{\sqrt{\frac{2}{br} MS_e}} = \frac{108,33 - 125,08}{\sqrt{\frac{2}{12} 675,21}} \approx -1,58$	$2F_{t(27)}(-1,58) \approx 0,1260$

$$MS_e = \frac{SS_e}{ab(r-1)}$$

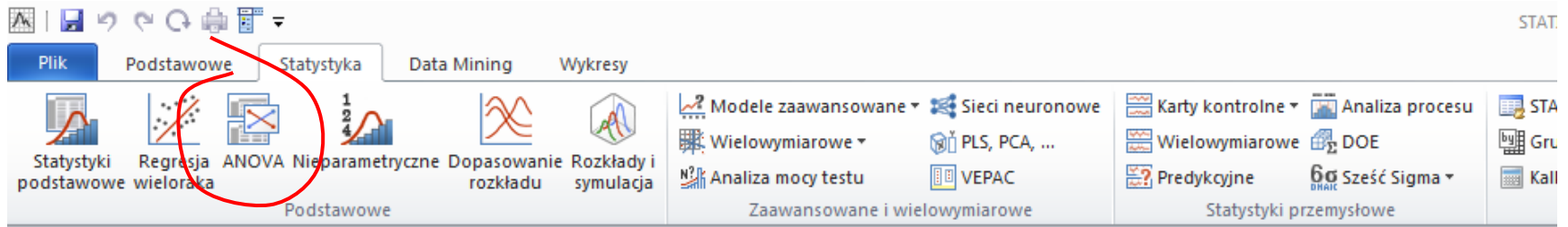
$$MS_e \approx \frac{18230,75}{27}$$

$$MS_e \approx 675,21$$

→ różnice średnich są istotne

→ różnica średnich nie jest istotna

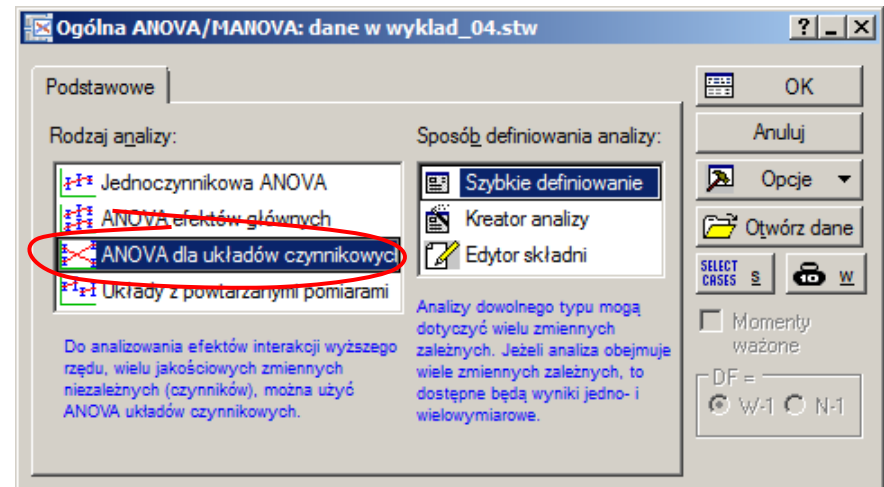
# STATISTICA – ANOVA



wykład\_04.stw - dane

	1 material	2 temperatura	3 czas pracy
	1	15	130
	1	15	74
	1	15	155
	1	15	180
	1	70	34
	1	70	80
	1	70	40
	1	70	75
	1	125	20
	1	125	82
	1	125	70
	1	125	58
	2	15	150
	2	15	159

dane0 dane



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA/MANOVA - ANOVA dla układów czynnikowych: dane w wyklad\_04.stw

Podstawowe | Opcje

Zmienne

Zmienne zależne: czas pracy

Czynniki jakościowe: materiał temperatura

Kody czynników: brak

Efekty międzygrupowe: materiał | "temperatura"

OK

Anuluj

Opcje

Edytor składni



ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Porównania | Profile | Reszty | Macierz | Raport

Podstawowe | Więcej | Średnie

Średnie/wykresy

Wszystkie efekty

Wielkości efektów

Wartości alfa

Przedziałów ufności: .950

Poziomu istotności: .050

Więcej wyników

Zmień

Zamknij

Grupami

Opcje



Dane: Jednowymiarowe testy istotności dla czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)\*

Jednowymiarowe testy istotności dla czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)\*  
 Parametryzacja z sigma-ograniczeniami  
 Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
Wyraz wolny	400900,0	1	400900,0	593,7386	0,000000
materiał	10683,7	2	5341,9	7,9114	0,001976
temperatura	39118,7	2	19559,4	28,9677	0,000000
materiał*temperatura	9613,8	4	2403,4	3,5595	0,018611
Błąd	18230,7	27	675,2		

$SS_A$   
 $SS_B$   
 $SS_{AB}$   
 $SS_e$

$MS_A$   
 $MS_B$   
 $MS_{AB}$   
 $MS_e$

Czas pracy baterii **zależy** od obydwu testowanych czynników oraz od ich interakcji.



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Porównania | Profile | Reszty | Macierz | Raport

Podstawowe | Więcej | Średnie

Średnie/wykresy

Wszystkie efekty

Wielkości efektów

Tabela wszystkich efektów: dane w wyklad\_04.stw

Parametryzacja z sigma-ograniczeniami  
Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
material	107E2	2	5342,	7,91	,002*
temperatura	391E2	2	196E2	28,97	,000*
material*temperatura	9614,	4	2403,	3,56	,019*

Podwójnie kliknij efekt, aby utworzyć wykres średnich lub arkusz wyników.

Kopiuj do schowka

OK

Anuluj

Zamykaj po OK

Pokaż

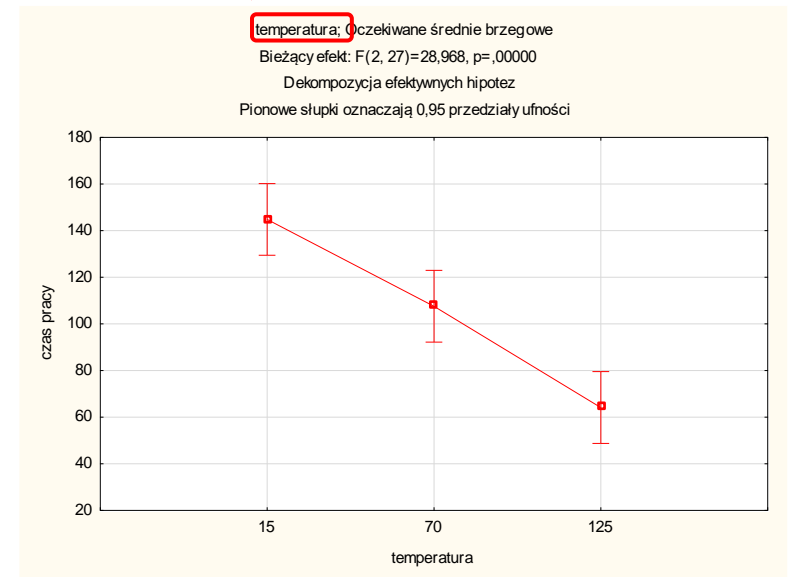
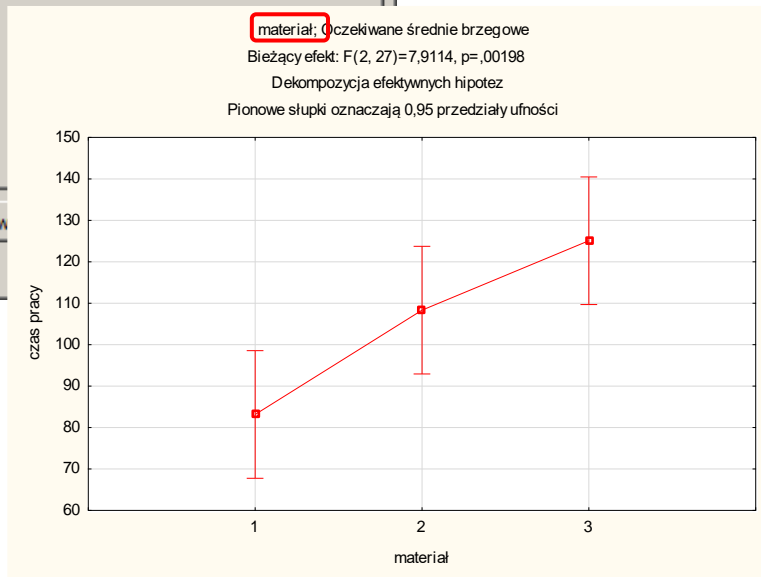
- Wykres
- Tabele

Średnie:

- Nieważone
- Ważone
- Oczek. śr. brzeg.

Oblicz błędy std.

Wyśw. +/- bł.std.



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Porównania | Profile | Reszty | Macierz | Raport

Podstawowe | Więcej | Średnie

**Średnie/wykresy**

Wszystkie efekty

Wielkości efektów

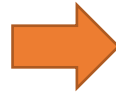


Tabela wszystkich efektów: dane w wyklad\_04.stw

Parametryzacja z sigma-ograniczeniami

Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
material	107E2	2	5342,	7,91	,002*
temperatura	391E2	2	196E2	28,97	,000*
material*temperatura	9614,	4	2403,	3,56	,019*

OK

Anuluj

Zamykaj po OK

Pokaż

Wykres

Tabele

Rozmieszczenie czynników

Góma X

material

temperatura

Wzór linii

material

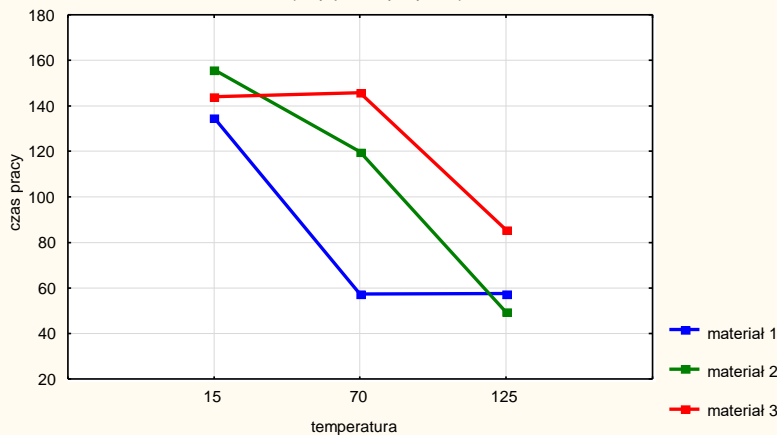
temperatura

OK

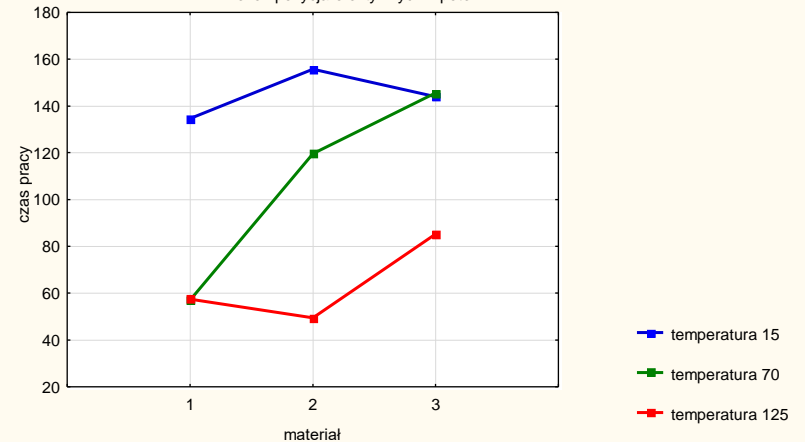
Określ rozmieszczenie czynników na wykresie

Wszystkie segmenty wykresu w jednym wierszu

material\*temperatura; Oczekiwane średnie brzegowe  
 Bieżący efekt:  $F(4, 27)=3,5595, p=,01861$   
 Dekompozycja efektywnych hipotez



material\*temperatura; Oczekiwane średnie brzegowe  
 Bieżący efekt:  $F(4, 27)=3,5595, p=,01861$   
 Dekompozycja efektywnych hipotez



ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.s

Podstawowe Więcej Średnie

Porównania Profile Reszty Macierz Raport

Próba do:  Analizy  Oceny krzyż.  Obie  Prognozy

Zmn. zależne czas pracy

Wartości przewidywane i reszty

Przewidywane i reszty  Rozszerzone

Arkusz dla każdej zmiennej zależnej

Sort. według: Numer przypadku Zapisz

Wykresy wartości przewidywanych i reszt

Przewidywane  Przewid. a reszty

Reszty  Obserw. a przewid.

Normalność reszt  Obserw. a reszty

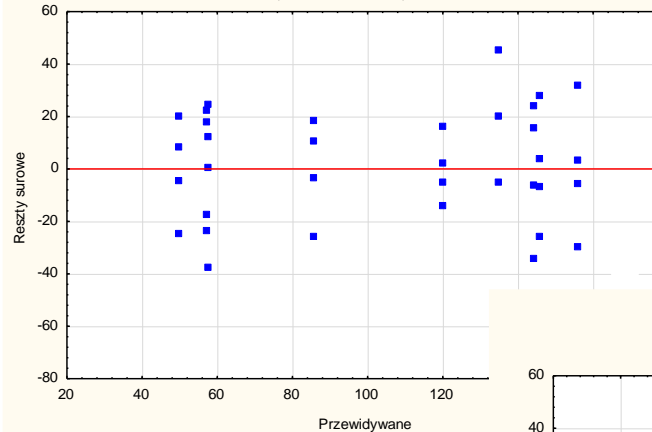
Połówk.  Moduł  Reszty a usunięte

Odchyleni od nom.  Nr przyp. a reszty

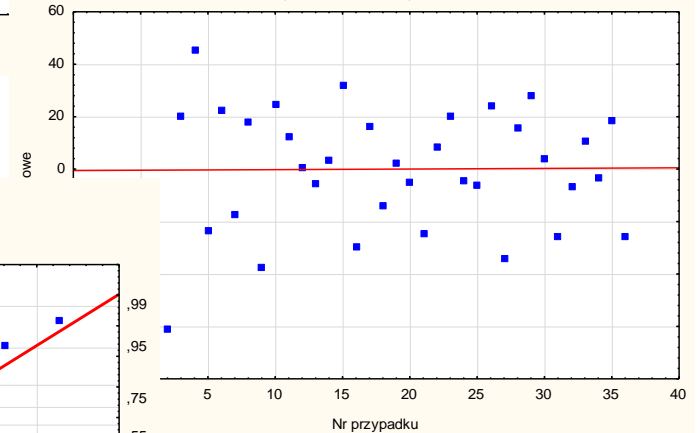
Więcej wyników Zmień Zamknij

Grupami Opcje

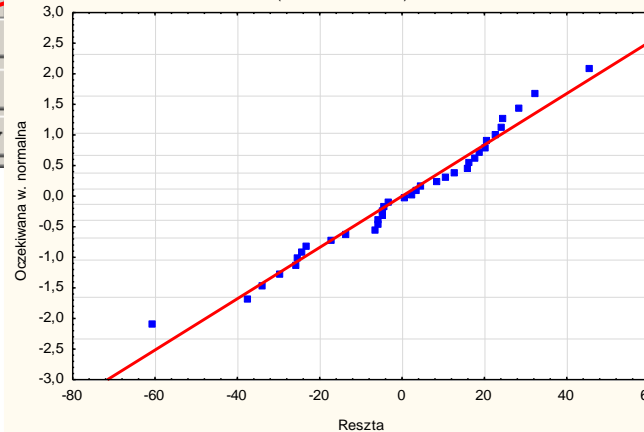
1 Przewidywane względem wartości resztowych  
Zmienna zależna: czas pracy  
(Próba analizowana)



2 Numery przypadków względem reszt  
Zmienna zależna: czas pracy  
(Próba analizowana)



3 Wykres normalności; Reszty surowe  
Zmienna zależna: czas pracy  
(Próba analizowana)



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.s

Podstawowe Więcej Średnie

Porównania Profile Reszty Macierz Raport

Próba do:  
 Analizy  Oceny krzyż.  Obie  Prognozy

Zmn. zależne czas pracy

Wartości przewidywane i reszty  
 Przewidywane i reszty  Rozszerzone  
 Arkusz dla każdej zmiennej zależnej

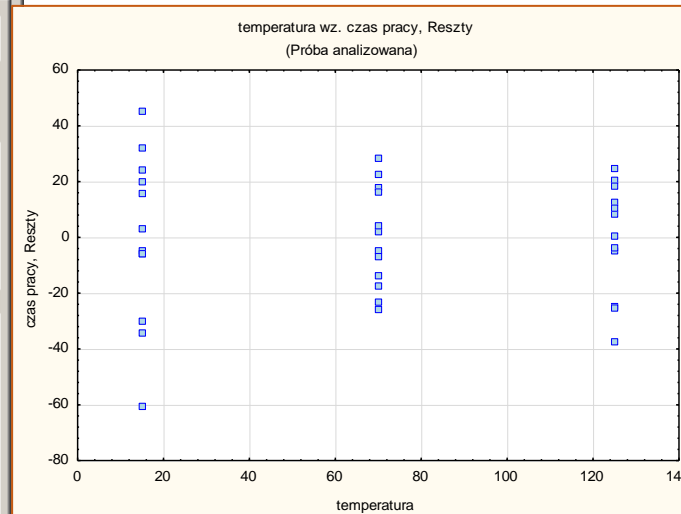
Sort. według: Numer przypadku Zapisz

Wykresy wartości przewidywanych i reszt

Przewidywane Przewid. a reszty  
Reszty Obserw. a przewid.  
Normalność reszt Obserw. a reszty  
Połówk.  Modul Reszty a usunięte  
Odchylen od nom. Nr przyp. a reszty

Więcej wyników Zmień Zamknij

Grupami Opcje



Reszty 2 Macierz Raport

Prognozy

Mniej Zamknij Zmień Opcje Grupami

Std.r.us." "Obserw." "Obserw."  
"Odl.Mah." "Przewid." "Przewid."  
"Odl.Cooka" Reszty Reszty  
Dffitsa "Bl\_std.p." "Bl\_std.p."  
"z\_Dffitsa" "PP dolna" "PP dolna"  
material "PP góna" "PP góna"  
"temperatura"

Histogram wybranego X (zmn., przewidywane, reszty)

Wykres normalności X Norm. połówk. Qdch. od nom.

Wykres rozrzutu Y względem X (zmn., przewidywane, reszty)

Wykres powierzchniowy X, Y i Z (zmn., przewidywane, reszty)



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Podsumowanie | Średnie | Por. zaplanowane | Post-hoc | Założenia

Profile | Testy dla dost. błędów | Reszty 1 | **Reszty 2** | Macierz | Raport

Zmienne zależne: czas pracy

Próba do:  
 Analizy  Oceny krzyżowej  Obie  Prognozy

X: "Std.r.us.", "Odl.Mah.", "Odl.Cooka", Df fitsa, "z.Df fitsa", **material**, "temperatura"

Y: "Obserw.", "Przewid.", **Reszty**, "Bł.std.p.", "PP dolna", "PP góma"

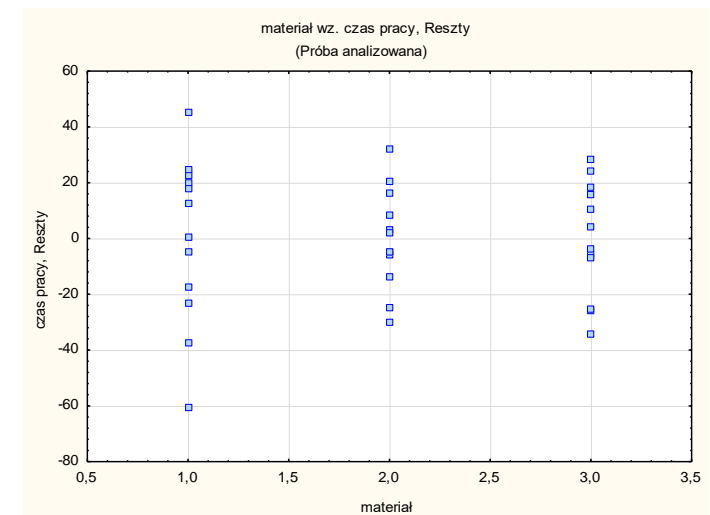
Z: "Obserw.", "Przewid.", Reszty, "Bł.std.p.", "PP dolna", "PP góma"

Histogram wybranego X (zmn., przewidywane, reszty)

Wykres normalności X | Nom. gołówk. | Odch. od nom.

**Wykres rozrzutu Y względem X (zmn., przewidywane, reszty)**

Wykres powierzchniowy X, Y i Z (zmn., przewidywane, reszty)



# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Profile | Testy dla dost. błędów | Reszty 1 | Reszty 2 | Macierz | **Raport**

Podsumowanie | Średnie | Por. zaplanowane | Post-hoc | **Założenia**

Zmienne: **czas pracy**

Efekt: **material**

Jednorodność wariancji/kowariancji

Cochrana, Hartleya, Bartletta  M-Boxa (wariancje i kowariancje)

**Test Levene'a (ANOVA)**

Rozkład zm. zależnych w obrębie grup

Wykresy reszt w obrębie komórek

nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji

Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...)

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl...)

Efekt: material

Stopnie swobody dla każdego F : 2, 33

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	297,8364	667,6950	0,446067	<b>0,643944</b>

Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...)

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl...)

Efekt: temperatura

Stopnie swobody dla każdego F : 2, 33

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	611,1443	392,7665	1,555999	<b>0,226063</b>

Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...)

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl...)

Efekt: material\*\*temperatura

Stopnie swobody dla każdego F : 8, 27

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	165,4653	183,4537	0,901946	<b>0,528938</b>

# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Profile Testy dla dost. błędów Reszty 1 Reszty 2 Macierz Raport

Podsumowanie Średnie Por. zaplanowane **Post-hoc** Założenia

Efekt: **material\*\*temperatura**

Zmienne zależne: czas pracy

Pokaż:
 

- Istotne różnice
- Jednorodne grupy: 0,05
- Przedziały ufności
- Rozstępy kryt.: 0,05

Błąd:
 

- Błąd międzygrupowy
- Błąd powt. pomiarów
- Międzygrup., powt. pomiarów; połączeni.
- MS: 0,000 df: 0,00

Testy:
 

- Test NIR Fishera
- Test Bonferroniego
- Test Scheffé
- Test Tukeya (HSD)
- Test Tukeya dla różnych N
- Test Newman-Keulsa
- Rozstępy kryt.
- Duncana
- Rozstępy kryt.

Dane: Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)

Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)  
 Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc  
 Błąd: MS międzygrupowe = 675,21, df = 27,000

Nr podkl.	material	temperatura	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}	{7}	{8}	{9}
			134,75	57,250	57,500	155,75	119,75	49,500	144,00	145,75	85,500
1	1	15		0,000248	0,000257	0,263107	0,421434	0,000080	0,618747	0,554383	0,012379
2	1	70	0,000248		0,989244	0,000012	0,002102	0,676518	0,000064	0,000050	0,135811
3	1	125	0,000257	0,989244		0,000012	0,002176	0,666736	0,000067	0,000052	0,139165
4	2	15	0,263107	0,000012	0,000012		0,060480	0,000004	0,527894	0,590739	0,000705
5	2	70	0,421434	0,002102	0,002176	0,060480		0,000705	0,197985	0,168488	0,073224
6	2	125	0,000080	0,676518	0,666736	0,000004	0,000705		0,000021	0,000016	0,060480
7	3	15	0,618747	0,000064	0,000067	0,527894	0,197985	0,000021		0,924825	0,003644
8	3	70	0,554383	0,000050	0,000052	0,590739	0,168488	0,000016	0,924825		0,002868
9	3	125	0,012379	0,135811	0,139165	0,000705	0,073224	0,060480	0,003644	0,002868	

wpływu typu materiału na czas pracy baterii dla temperatury pracy 70°F

I vs. II wpływ istotny I vs. III wpływ istotny II vs. III wpływ nieistotny

# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Profile Testy dla dost. błędów Reszty 1 Reszty 2 Macierz Raport  
 Podsumowanie Średnie Por. zaplanowane **Post-hoc** Założenia

Efekt: **material\*\*temperatura**

Zmienne zależne: czas pracy

Pokaż:
 

- Istotne różnice
- Jednorodne grupy: 0,05
- Przedziały ufności
- Rozstępy kryt.: 0,05

Błąd:
 

- Błąd międzygrupowy
- Błąd powt. pomiarów
- Międzygrup., powt. pomiarów; połącz.
- MS: 0,000 df: 0,00

Test NIR Fishera
  Test Bonferroniego
  Test Scheffé
  Test Tukeya (HSD)
  Test Tukeya dla różnych N

Testy dla rozstępów:
  Test Newman-Keulsa (Rozstępy kryt.)
  Duncana (Rozstępy kryt.)

Porównania z grupą kontrolną:
  Test Dunnetta
  < kontrolna
  > kontrolna
  <> kontrolna

Nr komórki dla grupy kontrolnej: 1

wpływu typu materiału na czas pracy baterii

Dane: Test NIR; zmienna czas pracy (

Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad\_04  
 Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc  
 Błąd: MS międzygrupowe = 675,21, df = 27,000

Nr podkl.	material	{1}	{2}	{3}
1	1	83,167	108,33	125,08
2	2	0,025059	0,000503	0,125992
3	3	0,000503	0,125992	

II vs. III  
wpływ **nieistotny**

I vs. II wpływ **istotny**

I vs. III wpływ **istotny**



# Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

$f$  Cohena (iloraz sygnału do szumu)

$$f = \frac{\sigma_s}{\sigma}$$

czynnik A	czynnik B	interakcja czynników
$\sigma_s$		
$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \tau_i^2}$	$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \beta_j^2}$	$\sigma_{AB} = \sqrt{\frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2}$
$f$		
$f_A = \sqrt{\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}$	$f_B = \sqrt{\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \left(\frac{\beta_j}{\sigma}\right)^2}$	$f_{AB} = \sqrt{\frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left(\frac{(\tau\beta)_{ij}}{\sigma}\right)^2}$

# Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

stopień niecentralności  $\delta$

$\eta^2$

$$\delta = Nf^2$$

$$\eta^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$$

$\Psi$  średniokwadratowy efekt standaryzowany RMSSE

$$\Psi = \sqrt{\frac{\delta}{n \cdot df}}^*$$

(ang. Root Mean Square Standardized Effect)

czynnik A	czynnik B	interakcja czynników
$\Psi$		
$\Psi_A = \sqrt{\frac{\delta_A}{br(a-1)}}$	$\Psi_B = \sqrt{\frac{\delta_B}{ar(b-1)}}$	$\Psi_{AB} = \sqrt{\frac{\delta_{AB}}{r(a-1)(b-1)}}$
$\Psi_A = \sqrt{\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a \left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}$	$\Psi_B = \sqrt{\frac{1}{b-1} \sum_{j=1}^b \left(\frac{\beta_j}{\sigma}\right)^2}$	$\Psi_{AB} = \sqrt{\frac{1}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left(\frac{(\tau\beta)_{ij}}{\sigma}\right)^2}$

\*  $n$  – liczba komórek zbiorczej tabeli, z której wyznaczane są efekty,  $df$  – liczba stopni swobody

# Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

	$\sigma_s$	$f$	$\delta$	$\Psi$
materiał	17,23	0,66	15,82	0,81
temperatura	32,96	1,27	57,94	1,55
materiał*temperatura	16,34	0,63	14,24	0,94

$$\sigma_{\text{materiał}} = \sqrt{\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \tau_i^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (22,36^2 + 2,81^2 + 19,56^2)} = 17,23$$

$$\sigma = \sqrt{MS_e} \approx 25,98$$

$$f_{\text{materiał}} = \frac{\sigma_{\text{materiał}}}{\sigma} = \frac{17,23}{25,98} = 0,66$$

$$\delta_{\text{materiał}} = N f_{\text{materiał}}^2 = 36 \cdot 0,66^2 = 15,82$$

$$\Psi_{\text{materiał}} = \sqrt{\frac{\delta_{\text{materiał}}}{br(a-1)}} = \sqrt{\frac{15,82}{3 \cdot 4 \cdot (3-1)}} = 0,81$$

# STATISTICA – ANOVA

ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad\_04.stw

Porównania | Profile | Reszty | Macierz | Raport

Podstawowe | Więcej | Średnie

Średnie/wykresy

Wszystkie efekty

**Wielkości efektów**

Więcej

wyklad\_04.stw\* - Jednowymiarowe testy istotności, wielkości efektów i moce dla czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)

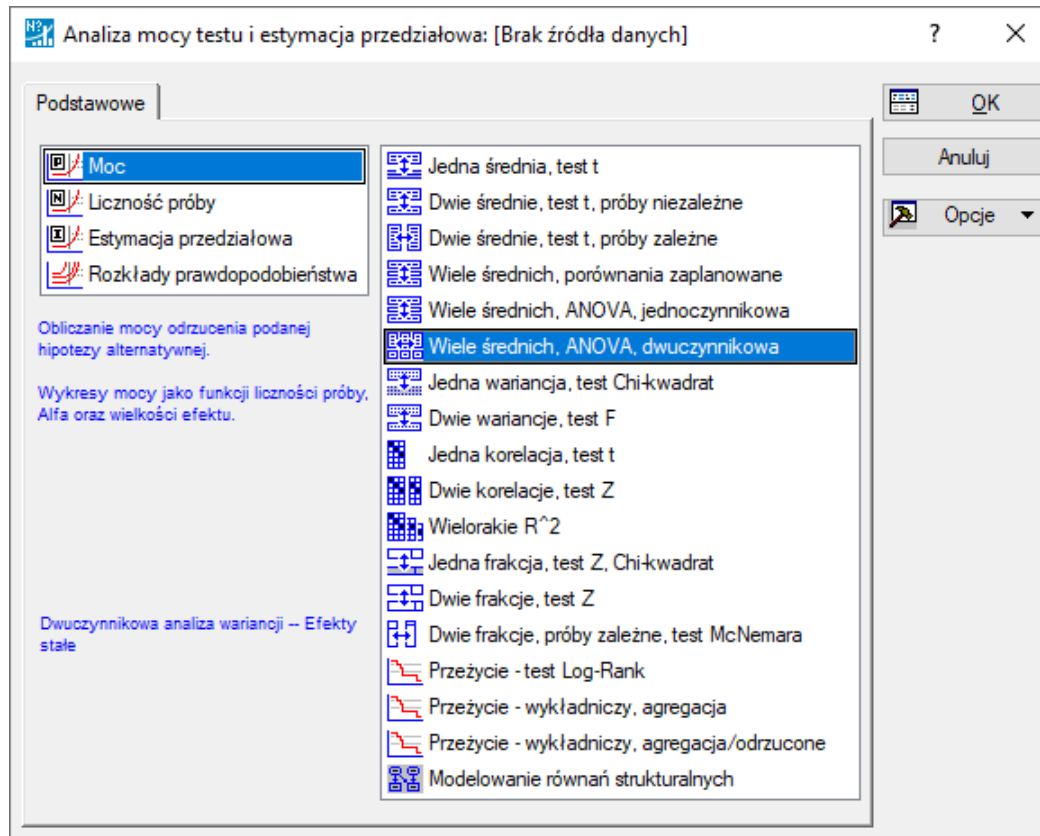
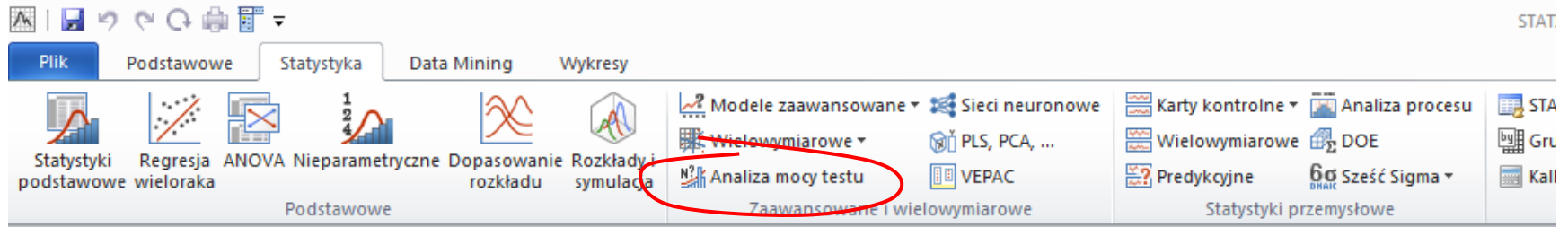
Jednowymiarowe testy istotności, wielkości efektów i moce dla czas pracy (dane w wyklad\_04.stw)  
 Parametryzacja z sigma-ograniczeniami  
 Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p	Eta-kwadrat cząstkowe	Niecentralność	Moc obserwowana (alfa=0,05)
Wyraz wolny	400900,0	1	400900,0	593,7386	0,000000	0,956503	593,7386	1,000000
materiał	10683,7	2	5341,9	7,9114	0,001976	0,369494	15,8227	0,930055
temperatura	39118,7	2	19559,4	28,9677	0,000000	0,682111	57,9354	0,999999
materiał*temperatura	9613,8	4	2403,4	3,5595	0,018611	0,345266	14,2381	0,800929
Błąd	18230,7	27	675,2					

	$\delta$
materiał	15,82
temperatura	57,94
materiał*temperatura	14,24

$\delta_A$   
 $\delta_B$   
 $\delta_{AB}$

# STATISTICA – analiza mocy testu



# STATISTICA – analiza mocy testu

ANOVA dwuczynnikowa: Moc: [Brak źródła dan...]

Podstawowe | Otwórz/Zapisz

Wartości parametrów

N w grupie: 4  $r = 4$

Alfa: 0,05

Liczba wierszy: 3  $a = 3$

Liczba kolumn: 3  $b = 3$

RMSSE wierszy: .25

RMSSE kolumn: .25

RMSSE interakcji: .25

Oblicz efekty

ANOVA dwuczynnikowa - Obliczanie efektó...

Arkusz

Utwórz Otwórz

Schowek (cała tabela)

Kopiuuj Wklej

Sigma: 25,9848

Średnie w populacji

	Kolumna 1	Kolumna 2	Kolumna 3
Wiersz 1	134,75	57,25	57,5
Wiersz 2	155,75	119,75	49,5
Wiersz 3	144	145,75	85,5

Miary efektu wierszy

RMSSE: .811963

f: .662965

Miary efektu kolumn

RMSSE: 1,5537

f: 1,268591

Miary efektu interakcji

RMSSE: .9433386

f: .6288924

$\Psi$	$f$	
0,81	0,66	materiał
1,55	1,27	temperatura
0,94	0,63	materiał*temperatura

temperatura materiał	15°F	70°F	125°F
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

$MS_e = \sigma^2$

Dane: Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wykład\_04.stw)

Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wykład\_04.stw)

Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc

Błąd: MS międzygrupowe = 675,21  $df = 27,000$

Nr podkl.	materiał	temperatura	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}	{7}	{8}	{9}
1	1	15	134,75	57,250	57,500	155,75	119,75	49,500	144,00	145,75	85,500
2	1	70	0,000248	0,000248	0,000257	0,263107	0,421434	0,000080	0,618747	0,554383	0,012379
3	1	125	0,000248	0,989244	0,989244	0,000012	0,002102	0,676518	0,000064	0,000050	0,135811
4	2	15	0,000257	0,989244		0,000012	0,002176	0,666736	0,000067	0,000052	0,139165
			0,263107	0,000012	0,000012		0,060480	0,000004	0,527894	0,590739	0,000705

# STATISTICA – analiza mocy testu

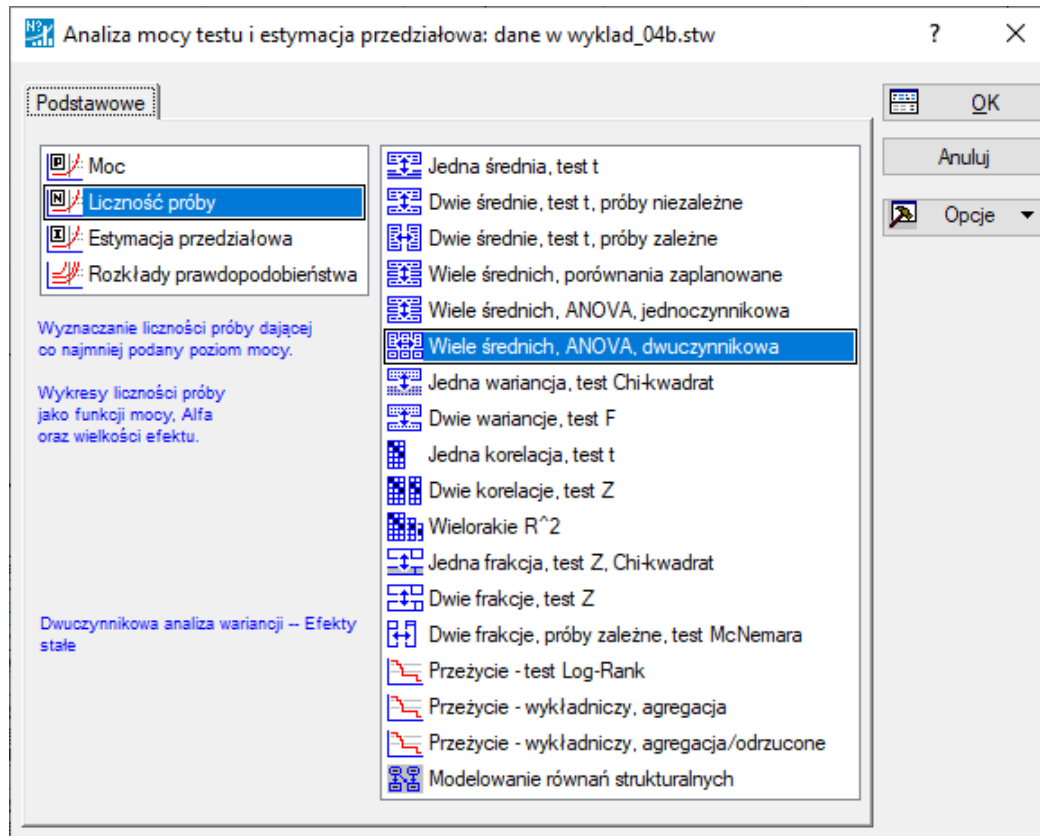
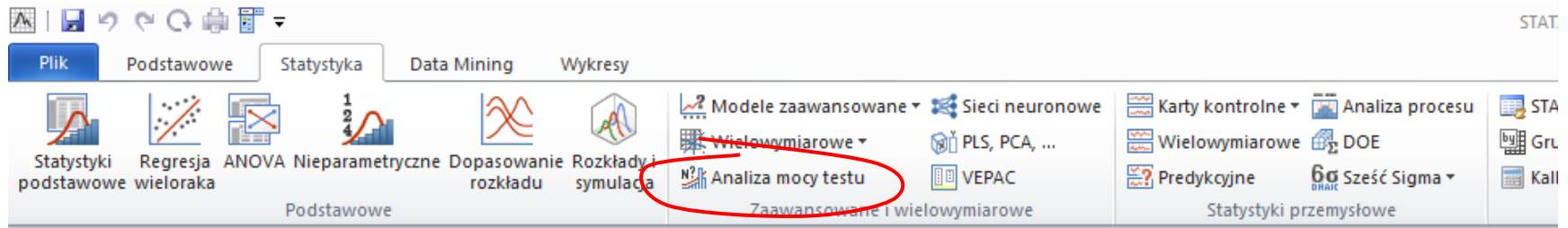
The image displays three windows from the STATISTICA software interface:

- ANOVA dwuczynnikowa: Moc: dane w wykład\_...** (Parameters):
  - Wartości parametrów
  - N w grupie: 4
  - Alfa: 0,05
  - Liczba wierszy: 3
  - Liczba kolumn: 3
  - RMSSE wierszy: 0,811963
  - RMSSE kolumn: 1,5537
  - RMSSE interakcji: 0,943386
- ANOVA dwuczynnikowa: Wyniki obliczania mocy: dane w wyk...** (Results):
  - ANOVA dwuczynnikowa: Obliczanie mocy
  - Prawdop. bł. I rodzaju (Alfa): 0,05
  - Liczba wierszy: 3
  - Liczba kolumn: 3
  - Liczność próby (N): 4
  - RMSSE wierszy: 0,811963
  - RMSSE kolumn: 1,5537
  - RMSSE interakcji: 0,943339
- wykład\_04b.stw - Moc (d...** (Summary Table):

	Moc (dane w ANOVA dwi...)
	Wartość
<b>Liczba wierszy</b>	3,0000
Liczba kolumn	3,0000
Liczność próby (N)	4,0000
Prawdop. bł. I rodzaju (Alfa)	0,0500
Efekt dla wierszy	
RMSSE	0,8120
Df efektu	2,0000
Df błędu	27,0000
Wartość krytyczna F	3,3541
<b>Moc</b>	<b>0,9301</b>
Efekt dla kolumn	
RMSSE	1,5537
Df efektu	2,0000
Df błędu	27,0000
Wartość krytyczna F	3,3541
<b>Moc</b>	<b>1,0000</b>
Efekt dla interakcji	
RMSSE	0,9433
Df efektu	4,0000
Df błędu	27,0000
Wartość krytyczna F	2,7278
<b>Moc</b>	<b>0,8009</b>

wykonany test jest mocny (obserwowane moce dla czynników i interakcji wnoszą: 0,93, 1,0, 0,8)

# STATISTICA – analiza mocy testu





# STATISTICA – analiza mocy testu

The image shows three windows from the STATISTICA software. The left window is the 'ANOVA dwuczynnikowa: Lic...' settings window, the middle is the 'ANOVA dwuczynnikowa: Wyniki obliczania licznosci próby...' results window, and the right is a spreadsheet window 'wyklad\_04b.stw\* - ...' showing the calculated results.

**ANOVA dwuczynnikowa: Lic...**

Wartości parametrów

Alfa: 0,05

Liczba wierszy: 3

Liczba kolumn: 3

RMSSE wierszy: 0,811963

RMSSE kolumn: 1,5537

RMSSE interakcji: 0,943386

Moc docelowa: 0,80

Oblicz efekty

**ANOVA dwuczynnikowa: Wyniki obliczania licznosci próby...**

ANOVA dwuczynnikowa: Obliczanie licznosci próby  
Prawdop. bł. I rodzaju (Alfa): 0,05

Liczba wierszy: 3  
Liczba kolumn: 3  
Moc docelowa: 0,8  
RMSSE wierszy: 0,811963  
RMSSE kolumn: 1,5537  
RMSSE interakcji: 0,943339

Oblicz N

Zmien param.

Wstecz

Opcje

Ustawienia osi X

Pocz. RMSSE: 0,15  
Końc. RMSSE: 0,525  
Początk. Alfa: 0,01  
Końc. Alfa: 0,19  
Pocz. moc: 0,75  
Końc. moc: 0,95  
Kroków: 19

Wykresy licznosci próby

- N względem RMSSE
- N względem Alfa
- N względem Moc

**wyklad\_04b.stw\* - ...**

	Liczność prób ANOVA dwu
	Wartość
Liczba wierszy	3,0000
Liczba kolumn	3,0000
Prawdop. bł. I rodzaju	0,0500
Moc docelowa	0,8000
Efekt dla wierszy	
RMSSE	0,8120
Moc dla wymagane	0,8153
<b>Wymagana licznosc próby (N)</b>	<b>3,0000</b>
Efekt dla kolumn	
RMSSE	1,5537
Moc dla wymagane	0,9851
<b>Wymagana licznosc próby (N)</b>	<b>2,0000</b>
Efekt dla interakcji	
RMSSE	0,9433
Moc dla wymagane	0,8009
<b>Wymagana licznosc próby (N)</b>	<b>4,0000</b>

moc 0,8 dla rozważanych efektów zapewniają:

- dla materiału 3 powtórki doświadczenia,
- dla temperatury 2 powtórki a
- dla interakcji 4 powtórki