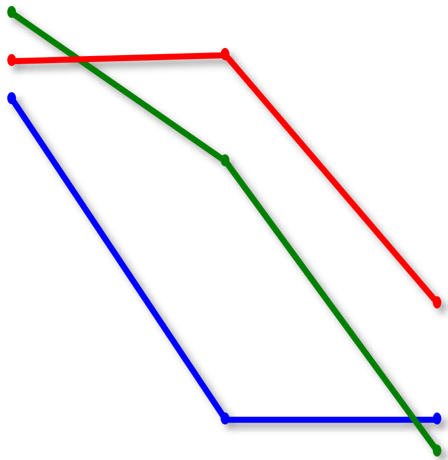
Planowanie doświadczeń



Eksperymenty dwuczynnikowe
ANOVA

Materiały
http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/

Eksperymenty dwuczynnikowe (*ang. experiments with two factors*)

- badają istotność wpływu dwóch zmiennych niezależnych na zmienną zależną,
- uwzględniana jest jedna zmienna zależna,
- uwzględniane są dwie zmienne niezależne,
- zmienne niezależne mogą przyjmować wartości na kilku poziomach.

Czynnik B / Czynnik *A*	1	…	b
1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11r}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1br}$
$\vdots$			
a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1r}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abr}$

Eksperymenty dwuczynnikowe

Eksperymenty dwuczynnikowe wykonywane są wg. *planu randomizowanego kompletnego*.

Plan taki zakłada, że:

- doświadczenia wykonywane są w losowej kolejności,
- wartości zmiennych niezależnych są z góry określone, liczba wartości jest uzależniona od rodzaju przeprowadzanego badania, wartości nazywane są *poziomami*, liczba poziomów może być dowolna.

poziomy czynnika B

poziomy czynnika A

Czynnik B / Czynnik *A*	1	$\cdots$	b
1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11r}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1br}$
$\vdots$			
a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1r}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abr}$

Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki eksperymentu, w którym zmienne niezależne A i B przyjmowały wartości na poziomach: niskim i wysokim: A^-, A^+, B^-, B^+.

$A \backslash B$	B^-	B^+
A^-	1	3
A^+	5	9

Efekt A (wpływ czynnika A)

- na poziomie B^-

  $$A = 5 - 1 = 4$$

- na poziomie B^+

  $$A = 9 - 3 = 6$$

- średnio:

  $$A = (4 + 6)/2 = 5$$

efekt A *jest zależny* od poziomu B

Efekt B (wpływ czynnika B)

- na poziomie A^-

  $$B = 3 - 1 = 2$$

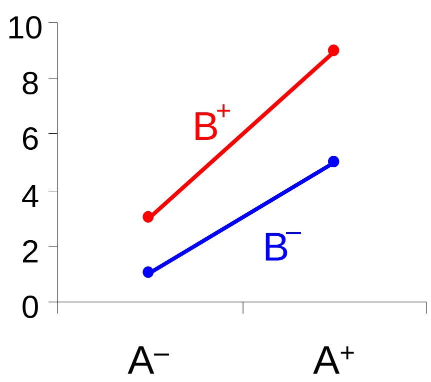
- na poziomie A^+

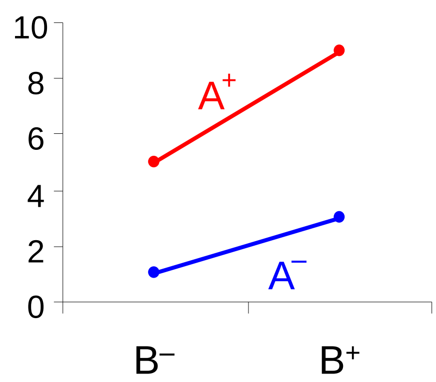
  $$B = 9 - 5 = 4$$

- średnio

  $$B = (2 + 4)/2 = 3$$

efekt B *jest zależny* od poziomu A





Efekt interakcji wyznacza się licząc

- średnią różnicę efektu A na poziomie B^+ i B^-

  $$AB = (6 - 4)/2 = 1$$

- średnią różnicę efektu B na poziomie A^+ i A^-

  $$AB = (4 - 2)/2 = 1$$

[*]zmienne niezależne np.: A – metoda produkcji, B – rodzaj surowca, zmienna zależna: y – wytrzymałość produktu

Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	B^-	B^+
A^-	5	3
A^+	1	9

Efekt A (wpływ czynnika A)

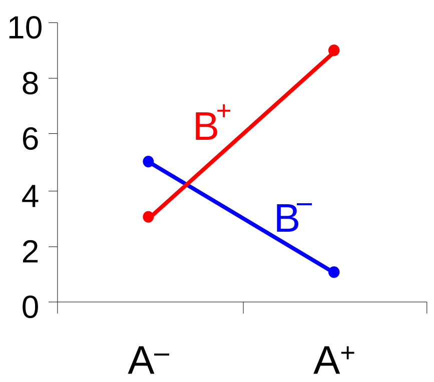
- na poziomie B^-
  $A = 1 - 5 = -4$
- na poziomie B^+
  $A = 9 - 3 = 6$
- średnio
  $A = (-4 + 6)/2 = 1$

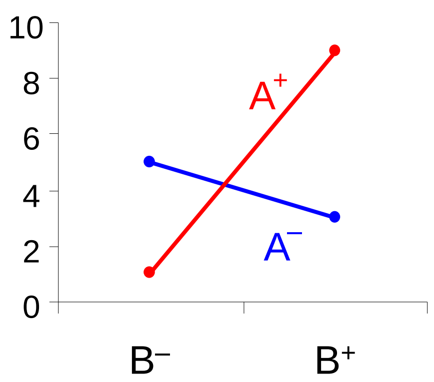
efekt A *jest zależny* od poziomu B

Efekt B (wpływ czynnika B)

- na poziomie A^-
  $B = 3 - 5 = -2$
- na poziomie A^+
  $B = 9 - 1 = 8$
- średnio
  $B = (-2 + 8)/2 = 3$

efekt B *jest zależny* od poziomu A





efekt interakcji

- $AB = (6 - -4)/2 = 5$
- $AB = (8 - -2)/2 = 5$

Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	B^-	B^+
A^-	2	4
A^+	2	6

Efekt A (wpływ czynnika A)

- na poziomie B^-

$$A = 2 - 2 = 0$$

- na poziomie B^+

$$A = 6 - 4 = 2$$

- średnio

$$A = (0 + 2)/2 = 1$$

efekt A *jest zależny* od poziomu B

Efekt B (wpływ czynnika B)

- na poziomie A^-

$$B = 4 - 2 = 2$$

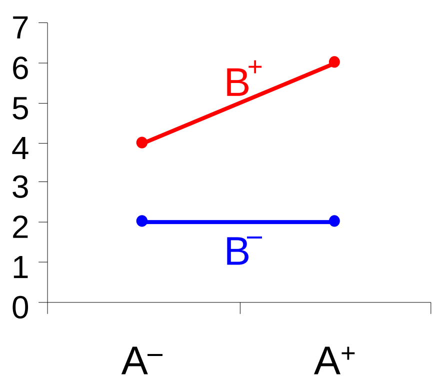
- na poziomie A^+

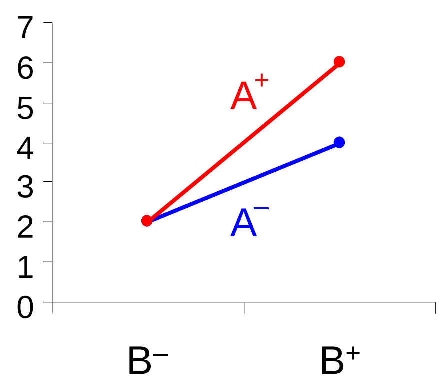
$$B = 6 - 2 = 4$$

- średnio

$$B = (2 + 4)/2 = 3$$

efekt B *jest zależny* od poziomu A





efekt interakcji

- $AB = (2 - 0)/2 = 1$
- $AB = (4 - 2)/2 = 1$

Efekty główne i interakcje

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	B^-	B^+
A^-	3	1
A^+	5	3

Efekt A (wpływ czynnika A)

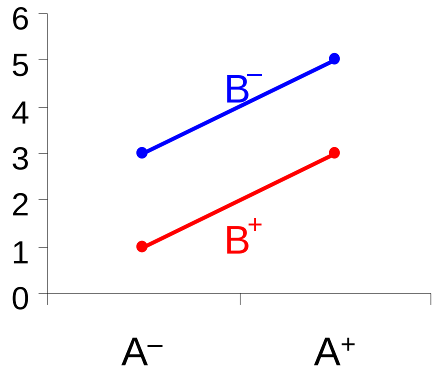
- na poziomie B^-
  $$A = 5 - 3 = 2$$
- na poziomie B^+
  $$A = 3 - 1 = 2$$
- średnio
  $$A = (2+2)/2 = 2$$

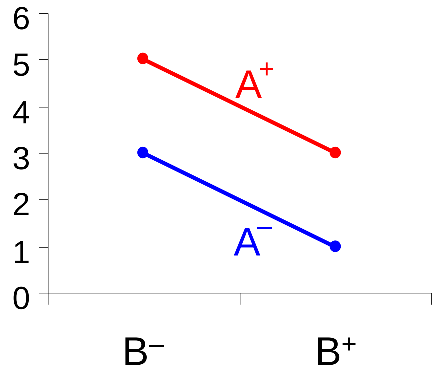
efekt A *nie jest zależny* od poziomu B

Efekt B (wpływ czynnika B)

- na poziomie A^-
  $$B = 1 - 3 = -2$$
- na poziomie A^+
  $$B = 3 - 5 = -2$$
- średnio
  $$B = (-2 + -2)/2 = -2$$

efekt B *nie jest zależny* od poziomu A





efekt interakcji

- $AB = (2-2)/2 = 0$
- $AB = (-2 - -2)/2 = 0$

W tabeli zebrano wyniki kolejnego eksperymentu dwuczynnikowego.

$A \backslash B$	B^-	B^+
A^-	2	5
A^+	2	5

Efekt A (wpływ czynnika A)

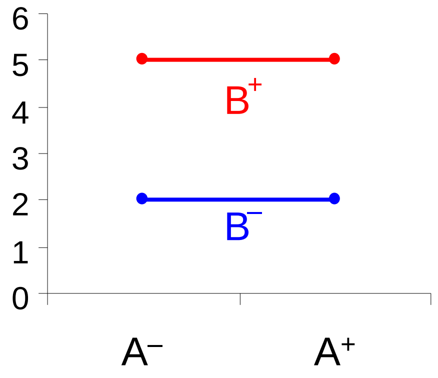
- na poziomie B^-
  $$A = 2 - 2 = 0$$
- na poziomie B^+
  $$A = 5 - 5 = 0$$
- średnio
  $$A = (0 + 0)/2 = 0$$

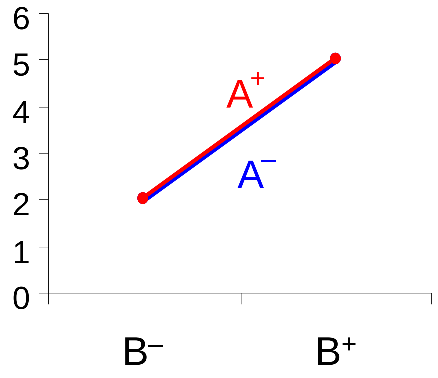
efekt A *nie jest zależny* od poziomu B

Efekt B (wpływ czynnika B)

- na poziomie A^-
  $$B = 5 - 2 = 3$$
- na poziomie A^+
  $$B = 5 - 2 = 3$$
- średnio
  $$B = (3 + 3)/2 = 3$$

efekt B *nie jest zależny* od poziomu A





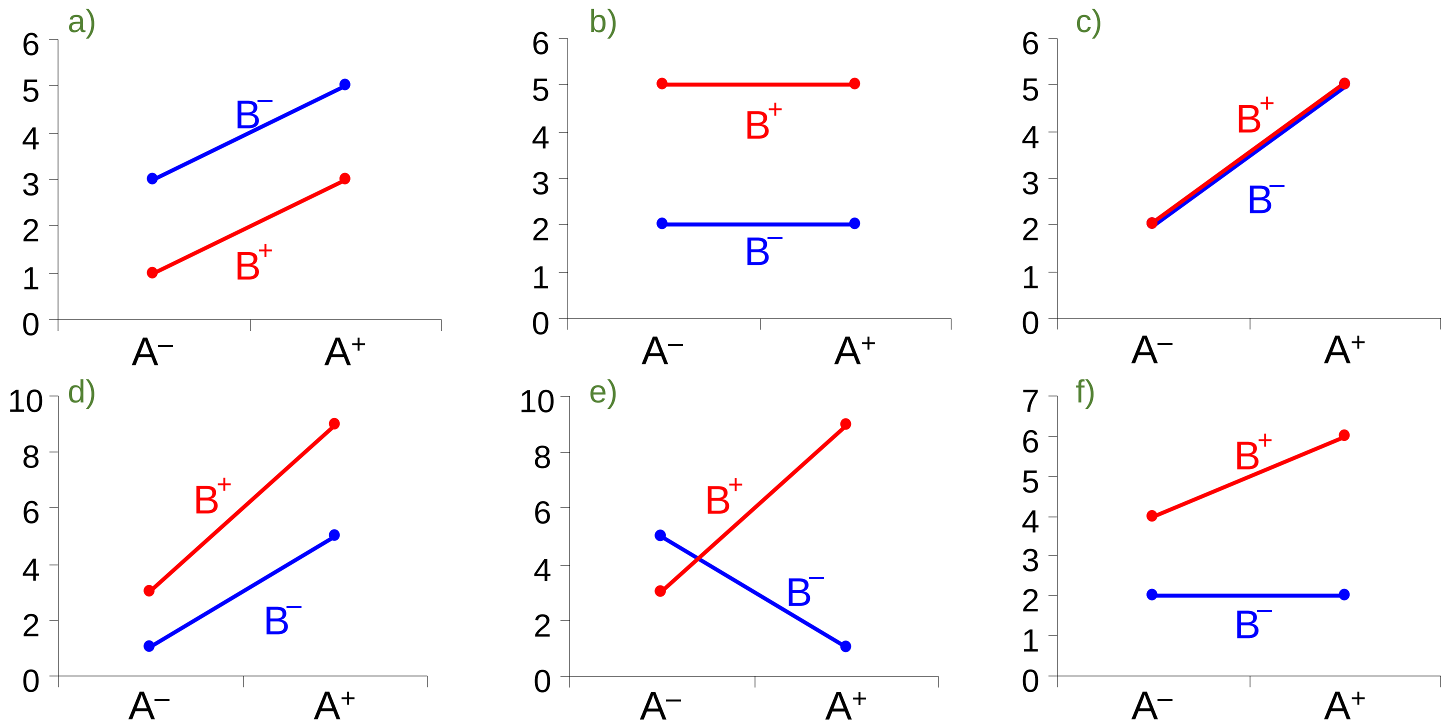
efekt interakcji

- $AB = (0 - 0)/2 = 0$
- $AB = (3 - 3)/2 = 0$

Efekty główne i interakcje

Efekt główny czyli wpływ czynnika na zmienną zależną definiuje się jako zmianę wartości zmiennej zależnej wywołaną zmianą poziomu czynnika.

Efekt interakcji to jednoczesny wpływ kilku czynników na zmienną zależną.



Równoległość linii na wykresach a)-c) wskazuje na brak interakcji czynników, poziome linie na wykresie b) oznaczają brak wpływu czynnika A na zmienną zależną, pozioma linia na wykresie f) oznacza brak wpływu czynnika A na poziomie B⁻ na zmienną zależną

Model

W ***eksperymentach dwuczynnikowych*** badana jest istotność wpływu *dwóch zmiennych niezależnych* na *jedną zmienną zależną* w przypadku, gdy zmienne niezależne przyjmują *wartości* na *kilku poziomach*.

Dla wyników otrzymanych w eksperymencie można stworzyć **model** uwzględniający efekty główne i efekty interakcji:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

gdzie:

$i = 1 \cdots a$, $j = 1 \cdots b$, $k = 1 \cdots r$,

y_{ijk} – wynik k–tej powtórki doświadczenia przeprowadzonego na i–tym poziomie czynnika A i j–tym poziomie czynnika B,

τ_i, β_j – efekt i–tego poziomu czynnika A oraz j–tego poziomu czynnika B,

$(\tau\beta)_{ij}$ – efekt interakcji i–tego poziomu czynnika A oraz j–tego poziomu czynnika B,

μ – ogólna średnia zmiennej wyjściowej,

e_{ijk} – błąd losowy zawierający wszystkie pozostałe składowe zmienności zmiennej wyjściowej, zakłada się, że $E\left(e_{ijk}\right) = 0$

Model

Zwykle przyjmuje się, że τ_i, β_j, $(\tau\beta)_{ij}$ opisują odchylenia od średniej μ, w związku z tym:

$$\sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij} = 0, \quad \sum_{J=1}^{b}(\tau\beta)_{ij} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$$

model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

można zapisać w równoważnej postaci:

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}.$$

Istotności wpływu:

- poziomu czynnika wejściowego A można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

  $$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

  wobec hipotezy alternatywnej

  $H_1: \tau_i \neq 0$ (co najmniej dla jednego i)

- poziomu czynnika wejściowego B można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

  $$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

  wobec hipotezy alternatywnej

  $H_1: \beta_j \neq 0$ (co najmniej dla jednego j)

- interakcji czynników A i B można przeprowadzić testując hipotezę zerową:

  $H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0$ (dla wszystkich i i j)

  wobec hipotezy alternatywnej

  $H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ (co najmniej dla jednej pary (i, j))

Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

Całkowita zmienność zmiennej zależnej jest mierzona jako suma kwadratów odchyleń tej zmiennej od średniej wartości z wszystkich obserwacji (*ang. total sum of squares*):

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{...}\right)^2 .$$

może być ona zdekomponowana na *zmienność wyjaśnioną przyjętym modelem*:

$$SS_A = br\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}\right)^2, \quad SS_B = ar\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}\right)^2, \quad SS_{AB} = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}\right)^2,$$

i *zmienność niewyjaśnioną modelem*:

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right)^2 .$$

gdzie: $y_{i..}$, $y_{.j.}$, $y_{ij.}$, $y_{...}$, $\overline{y}_{i..}$, $\overline{y}_{.j.}$, $\overline{y}_{ij.}$, $\overline{y}_{...}$ to sumy i średnie:

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{i..} = \frac{1}{br} y_{i..}, \qquad y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{.j.} = \frac{1}{ar} y_{.j.}$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{ij.} = \frac{1}{r} y_{ij.} \qquad y_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{...} = \frac{1}{abr} y_{...}$$

Dekompozycja zmienności zmiennej zależnej

$$SS_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\underbrace{\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)}_{\text{a}}+\underbrace{\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)}_{\text{b}}+\underbrace{\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)}_{\text{c}}+\underbrace{\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)}_{\text{d}}\right)^2=$$

$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2+\cdots$$

$$=br\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2+ar\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2+r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2+\cdots$$

$$=SS_A+SS_B+SS_{AB}+SS_e$$

$$\boxed{SS_T=SS_A+SS_B+SS_{AB}+SS_e}$$

pozostałe wyrazy się zerują

np.

$$2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)=2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}r\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)=2r\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)\underbrace{\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)}_{=0}=0$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)=\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j.}-b\bar{y}_{...}=\sum_{j=1}^{b}\frac{1}{ar}y_{.j.}-b\frac{1}{abr}y_{...}=\frac{1}{ar}y_{...}-\frac{1}{ar}y_{...}=0}$$

Szacowanie σ^2

Po wprowadzeniu średnich kwadratów odchyleń:

MS_A	MS_B	MS_{AB}	MS_e
$\frac{1}{a-1}SS_A$	$\frac{1}{b-1}SS_B$	$\frac{1}{(a-1)(b-1)}SS_{AB}$	$\frac{1}{ab(r-1)}SS_e$

i obliczeniu ich wartości oczekiwanych:

$E(MSA)$	$E(MSB)$	$E(MSAB)$	$E(MSe)$
$\sigma^2 + \frac{br}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2$	$\sigma^2 + \frac{ar}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2$	σ^2

okazuje się, że wariancję σ^2 można oszacować w oparciu o:

- średnią MS_A – jeżeli dla każdego i prawdziwa jest hipoteza $H_0\colon \tau_i = 0$
- średnią MS_B – jeżeli dla każdego j prawdziwa jest hipoteza $H_0\colon \beta_j = 0$
- średnią MS_{AB} – jeżeli dla każdego i i j prawdziwa jest hipoteza $H_0\colon (\tau\beta)_{ij} = 0$
- średnią MS_e – niezależnie od prawdziwości stawianych hipotez zerowych: $H_0\colon \tau_i = 0,\ H_0\colon \beta_j = 0,\ H_0\colon (\tau\beta)_{ij} = 0$

Dwuczynnikowa analiza wariancji

Istotność wpływu poziomów czynnika A, czynnika B oraz interakcji czynników A i B może być zbadana w wyniku porównania wariancji oszacowanej z pomocą: MS_A, MS_B i MS_{AB} z wariancją oszacowaną na podstawie MS_e. Zmienne wykorzystane do porównania wariancji zestawione zostały w tabeli.

Istotność		
poziomów czynnika A	**poziomów czynnika B**	**interakcji czynników A i B**
$F_A = \frac{MS_A}{MS_e}$ $F_A = \frac{SS_A}{a-1} \Big/ \frac{SS_e}{ab(r-1)}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_e}$ $F_B = \frac{SS_B}{b-1} \Big/ \frac{SS_e}{ab(r-1)}$	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_e}$ $F_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)} \Big/ \frac{SS_e}{ab(r-1)}$

Statystyki F_A, F_B i F_{AB} dla prawdziwych odpowiednich hipotez zerowych mają rozkład F Fishera-Snedecora

$F_A \sim F(a-1, ab(r-1))$	$F_B \sim F(b-1, ab(r-1))$	$F_{AB} \sim F((a-1)(b-1), ab(r-1))$

Jeśli hipotezy zerowe w testach istotności wpływu czynników i interakcji są:

- prawdziwe to odpowiednie zmienne $F = 1$,
- fałszywe to odpowiednie zmienne $F > 1$.

obszar krytyczny w teście jest prawostronny

Dwuczynnikowa analiza wariancji

Należy wybrać jeden z 3 rodzajów materiałów, który ma być zastosowany w baterii zasilającej urządzenie wystawione na działanie dużych różnic temperatur. Zaplanowano eksperyment, którego celem miało być ustalenie, który z materiałów jest bardziej odporny na wahania temperatury. Zdecydowano o wyborze 3 temperatur zgodnych z warunkami, w których będzie pracowało urządzenie 15, 70 i $125°F$ ($-9{,}44°C$, $21{,}11°C$, $51{,}67°C$) i zaplanowano po 4 doświadczenia dla każdej kombinacji: materiał i temperatura.

Po zaplanowaniu eksperymentu i przeprowadzeniu doświadczeń w losowej kolejności uzyskane wyniki czasu pracy baterii w $[godz.]$ zapisano w tablicy:

materiał \ temperatura	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	$130, 74, 155, 180$	$34, 80, 40, 75$	$20, 82, 70, 58$
II	$150, 159, 188, 126$	$136, 106, 122, 115$	$25, 58, 70, 45$
III	$138, 168, 110, 160$	$174, 150, 120, 139$	$96, 82, 104, 60$

*Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Wiley, 2012

Dwuczynnikowa analiza wariancji

materiał \ temperatura	$15°F$	$70°F$	$125°F$	$y_{i..}$	$\bar{y}_{i..}$
I	130, 74, 155, 180	34, 80, 40, 75	20, 82, 70, 58	998	83,17
II	150, 159, 188, 126	136, 106, 122, 115	25, 58, 70, 45	1300	108,33
III	138, 168, 110, 160	174, 150, 120, 139	96, 82, 104, 60	1501	125,08
$y_{.j.}$	1738	1291	770	$y_{...} = 3799$	
$\bar{y}_{.j.}$	144,83	107,58	64,17	$\bar{y}_{...} \approx 105,53$	

$$SS_A = br\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)^2 = 3 \cdot 4 \cdot \left((83{,}17 - 105{,}53)^2 + (108{,}33 - 105{,}53)^2 + (125{,}08 - 105{,}53)^2\right) \approx 10683{,}72$$

$$SS_B = ar\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)^2 = 3 \cdot 4 \cdot \left((144{,}83 - 105{,}53)^2 + (107{,}58 - 105{,}53)^2 + (64{,}17 - 105{,}53)^2\right) \approx 39118{,}72$$

$$SS_{AB} = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)^2 = 4 \cdot \left((134{,}75 - 83{,}17 - 144{,}83 + 105{,}53)^2 + \cdots\right) \approx 9613{,}78$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right)^2 = \left((130 - 134{,}75)^2 + \cdots + (60 - 85{,}50)^2\right) \approx 18230{,}75$$

Dwuczynnikowa analiza wariancji

MS_A	MS_B	MS_{AB}	MS_e
$\frac{1}{a-1}SS_A \approx 5\,341{,}86$	$\frac{1}{b-1}SS_B \approx 19559{,}36$	$\frac{1}{(a-1)(b-1)}SS_{AB} \approx 2403{,}44$	$\frac{1}{ab(r-1)}SS_e \approx 675{,}21$
Istotność czynnika A			
$F_n = \frac{MS_A}{MS_e} \approx 7{,}91$ $F_\alpha = F^{-1}_{F(2,27)}(1-0{,}05) \approx 3{,}35$		$p-value = 1 - F_{F(2,27)}(7{,}91) \approx 0{,}001979$	
Istotność czynnika B			
$F_n = \frac{MS_B}{MS_e} \approx 28{,}97$ $F_\alpha = F^{-1}_{F(2,27)}(1-0{,}05) \approx 3{,}35$		$p-value = 1 - F_{F(2,27)}(28{,}97) \approx 0{,}000000$	
Istotność interakcji czynników A i B			
$F_n = \frac{MS_{AB}}{MS_e} \approx 3{,}56$ $F_\alpha = F^{-1}_{F(4,27)}(1-0{,}05) \approx 2{,}73$		$p-value = 1 - F_{F(4,27)}(3{,}56) \approx 0{,}018611$	

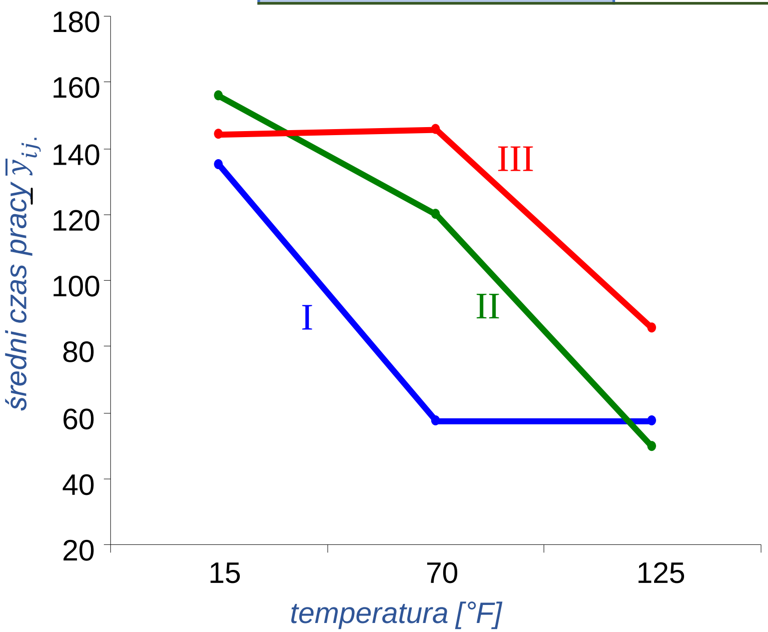
Zakładając $\alpha = 0{,}05$ wszystkie testowane hipotezy zakładające brak istotności wpływu obydwu czynników i ich interakcji na wartość zmiennej zależnej (tzn. czasu pracy baterii) można odrzucić:

Czas pracy baterii zależy od obydwu testowanych czynników oraz od ich interakcji.

Analiza graficzna

Badanie istotności można przeprowadzić w oparciu o analizę graficzną wykreślając średnie wartości zmiennej zależnej dla każdej kombinacji poziomu obydwu czynników.

materiał \ temperatura	$\bar{y}_{ij.}$			*rozstęp*
	$15°F$	$70°F$	$125°F$	
I	134,75	57,25	57,5	77,5
II	155,75	119,75	49,5	106,25
III	144	145,75	85,5	60,25

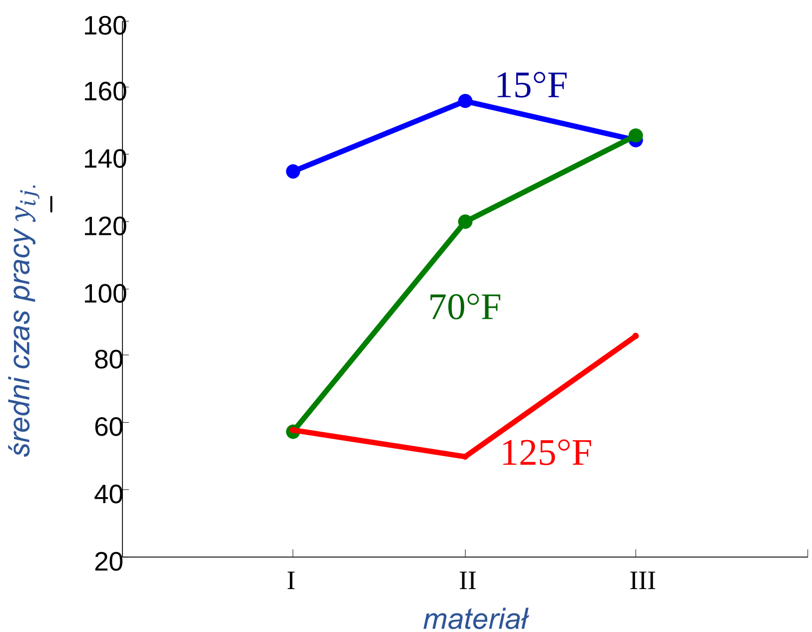


Z wykresu zmiennej zależnej w funkcji rodzaju materiału wynika, że

- efekt interakcji jest istotny (linie na wykresie nie są równoległe)
- uogólniając: wzrost temperatury prowadzi do krótszego czasu pracy baterii (wyjątki: materiał I: $70°F \rightarrow 125°F$ materiał III: $15°F \rightarrow 70°F$)
- materiał III daje najmniejszy spadek czasu pracy przy zmianie temperatury

Analiza graficzna

temperatura / materiał	$\bar{y}_{ij.}$ $15°F$	$70°F$	$125°F$	rozstęp
I	134,75	57,25	57,5	77,5
II	155,75	119,75	49,5	106,25
III	144	145,75	85,5	60,25



Z wykresu zmiennej zależnej w funkcji rodzaju materiału wynika, że

- efekt interakcji jest istotny (linie na wykresie nie są równoległe)
- uogólniając: wzrost temperatury prowadzi do krótszego czasu pracy baterii (wyjątki:
  materiał I: $70°F \rightarrow 125°F$
  materiał III: $15°F \rightarrow 70°F$)
- materiał III daje najmniejszy spadek czasu pracy przy zmianie temperatury

Parametry modelu

Model $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk}$ ma $1 + a + b + ab$ parametry (μ, τ_i, β_j, $(\tau\beta)_{ij}$), są one szacowane $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$, $\hat{\beta}_j$, $\left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij}$ z zależności:

$$abr\hat{\mu} + br\sum \hat{\tau}_i + ar\sum \hat{\beta}_j + r\sum\sum \left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = y_{...}$$

$$br\hat{\mu} + br\,\hat{\tau}_i + r\sum \hat{\beta}_j + r\sum \left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = y_{i..}, \qquad i = 1 \dots a$$

$$ar\hat{\mu} + r\sum \hat{\tau}_i + ar\,\hat{\beta}_j + r\sum \left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = y_{.j.}, \qquad j = 1 \dots b$$

$$r\hat{\mu} + r\,\hat{\tau}_i + r\,\hat{\beta}_j + r\left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = y_{ij.}, \qquad i = 1 \dots a, \quad j = 1 \dots b$$

ostatecznie

$$\hat{\mu} = y_{...}$$

$$\hat{\tau}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}, \qquad i = 1 \dots a$$

$$\hat{\beta}_j = \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}, \qquad j = 1 \dots b$$

$$\left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}, \qquad i = 1 \dots a, \quad j = 1 \dots b$$

Efekty

temperatura / materiał	$15°F$	$70°F$	$125°F$	$\bar{y}_{i..}$
I	134,75	57,25	57,5	83,17
II	155,75	119,75	49,5	108,33
III	144	145,75	85,5	125,08
$\bar{y}_{.j.}$	144,83	107,58	64,17	$\bar{y}_{...} \approx 105,53$

$\hat{\tau}_1 = 83,17 - 105,53 = -22,36$

$\hat{\tau}_2 = 108,33 - 105,53 = 2,81$

$\hat{\tau}_3 = 125,08 - 105,53 = 19,56$

$\hat{\beta}_1 = 144,83 - 105,53 = 39,31$

$\hat{\beta}_2 = 107,58 - 105,53 = 2,06$

$\hat{\beta}_3 = 64,17 - 105,53 = -41,36$

$\widehat{(\tau\beta)}_{11} = 134,75 - 83,17 - 144,83 + 105,53 = 12,28$

$\widehat{(\tau\beta)}_{12} = -27,97$

$\widehat{(\tau\beta)}_{13} = 15,69$

$\widehat{(\tau\beta)}_{21} = 8,11$

$\widehat{(\tau\beta)}_{22} = 9,36$

$\widehat{(\tau\beta)}_{23} = -17,47$

$\widehat{(\tau\beta)}_{31} = -20,39$

$\widehat{(\tau\beta)}_{32} = 18,61$

$\widehat{(\tau\beta)}_{33} = 1,78$

Sprawdzanie założeń

W dwuczynnikowej analizie wariancji, podobnie jak w analizie jednoczynnikowej, w celu sprawdzenia założeń wykonywana jest **analiza resztowa**. W analizie badane są następujące własności **wartości resztowych**:

- normalność,
- homoscedastyczność tzn. stałość wariancji błędu dla poszczególnych wartości zmiennej niezależnej
- niezależność.

Reszty $e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$ reprezentują różnice pomiędzy wartościami obserwowanymi y_{ijk} a wartościami otrzymywanymi z wykorzystywanego modelu $\hat{y}_{ijk}$. Wartości $\hat{y}_{ijk}$ obliczane są jako:

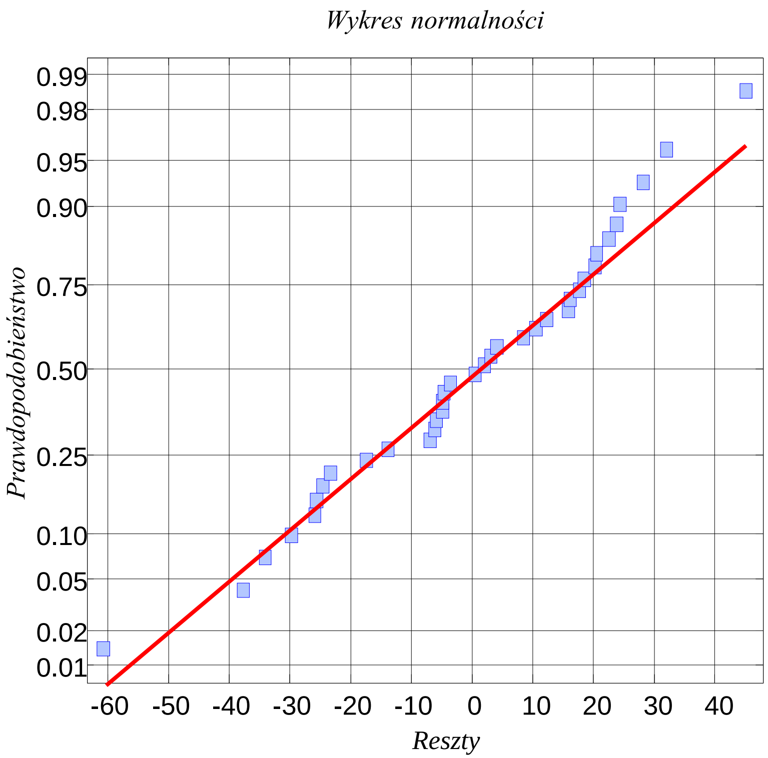
$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{ijk} &= \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + \widehat{(\tau\beta)}_{ij} \\
&= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \\
&= \bar{y}_{ij.}
\end{aligned}
$$

więc reszty wyznaczane są jako:

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$$

Sprawdzanie założeń

temperatura / materiał	e_{ijk}		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	-4,75 -60,75 20,25 45,25	-23,25 22,75 -17,25 17,75	-37,5 24,5 12,5 0,5
II	-5,75 3,25 32,25 -29,75	16,25 -13,75 2,25 -4,75	-24,5 8,5 20,5 -4,5
III	-6 24 -34 16	28,25 4,25 -25,75 -6,75	10,5 -3,5 18,5 -25,5

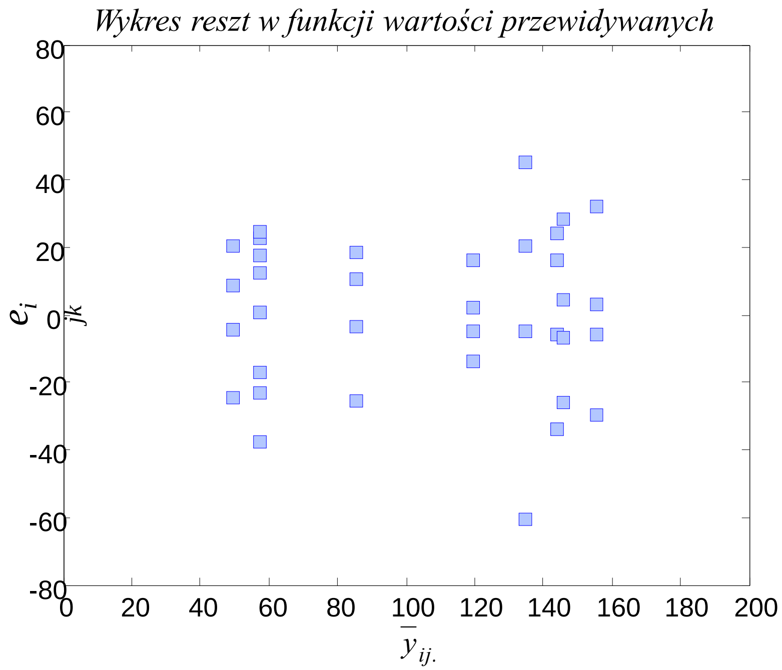


temperatura / materiał	$\bar{y}_{ij.}$		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

rozkład reszt jest w przybliżeniu rozkładem normalnym

Sprawdzanie założeń

materiał \ temperatura	e_{ijk}		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	-4,75 -60,75 20,25 45,25	-23,25 22,75 -17,25 17,75	-37,5 24,5 12,5 0,5
II	-5,75 3,25 32,25 -29,75	16,25 -13,75 2,25 -4,75	-24,5 8,5 20,5 -4,5
III	-6 24 -34 16	28,25 4,25 -25,75 -6,75	10,5 -3,5 18,5 -25,5

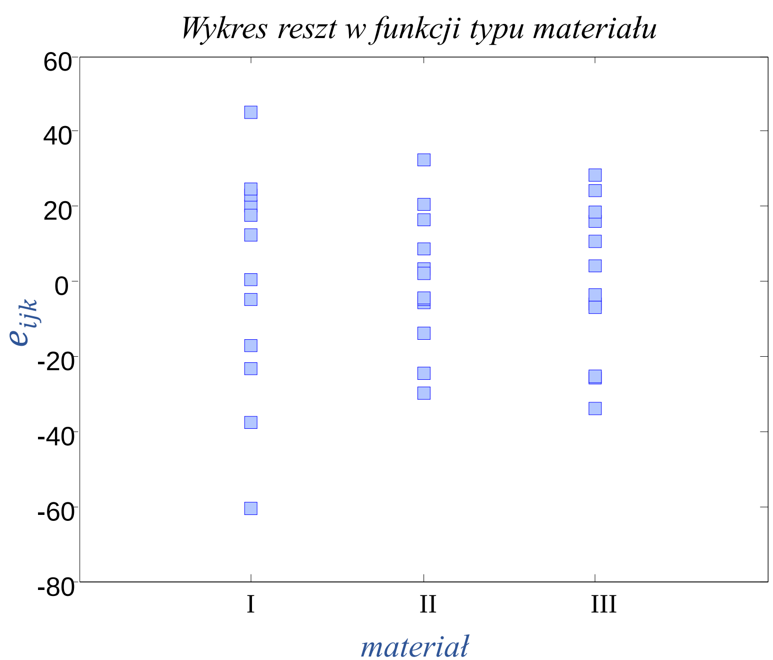


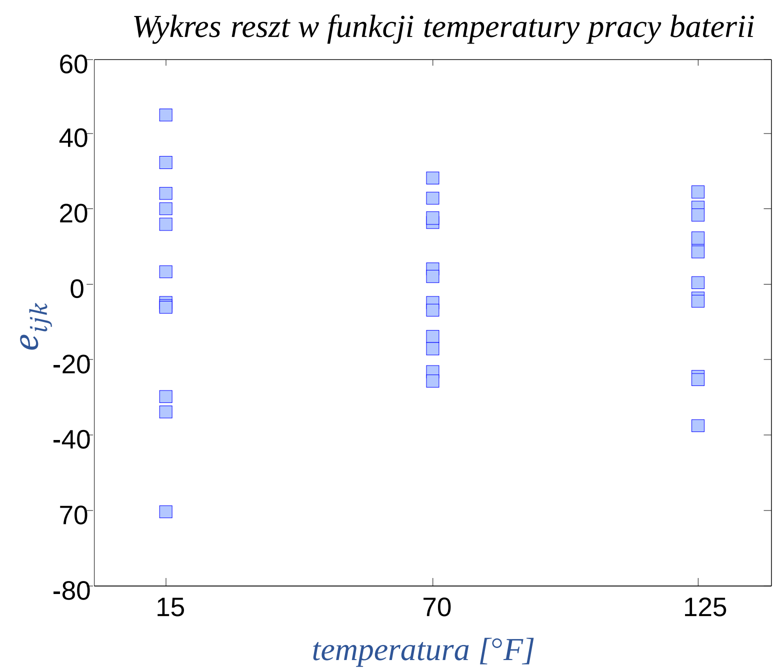
materiał \ temperatura	$\bar{y}_{ij.}$		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

wykres pokazuje niewielki wzrost wariancji reszt dla dłuższych czasów pracy baterii

Sprawdzanie założeń

temperatura / materiał	e_{ijk}		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	-4,75 -60,75 20,25 45,25	-23,25 22,75 -17,25 17,75	-37,5 24,5 12,5 0,5
II	-5,75 3,25 32,25 -29,75	16,25 -13,75 2,25 -4,75	-24,5 8,5 20,5 -4,5
III	-6 24 -34 16	28,25 4,25 -25,75 -6,75	10,5 -3,5 18,5 -25,5





wykresy pokazują niewielki wzrost wariancji reszt dla materiału I i temperatury $15°F$, różnica nie jest jednak na tyle duża żeby kwestionować wyniki przeprowadzonej analizy

Testy post–hoc *(po fakcie)* wykonywane są po stwierdzeniu istotności wpływu zmiennych niezależnych na zmienną zależną. Celem testów jest określenie, które poziomy zmiennej zależnej różnią się od siebie w sposób istotny. Badanie istotności można przeprowadzić przeprowadzając wybrany test ***post-hoc***.

Najprostszym testem z tej grupy jest ***test NIR Fishera***, w którym do weryfikacji hipotezy o równości średnich:

$$H_0\colon \mu_{ij} = \mu_{kl} \quad H_1\colon \mu_{ij} \neq \mu_{kl}$$

wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o $(ab(r-1))$ stopniach swobody:

$$t = \frac{\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{kl.}}{\sqrt{\frac{2}{r} MS_e}}$$

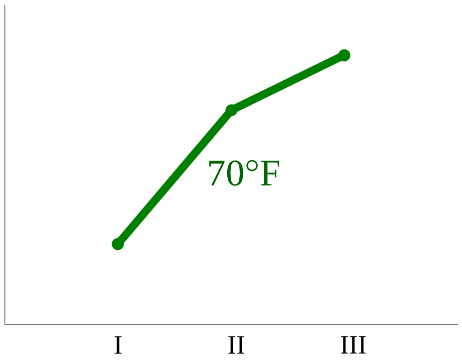
a obszar krytyczny budowany jest jako dwustronny.

W teście nie jest uwzględniana korekta poziomu α, korekta taka wykonywana jest np. w ***teście Bonferroniego***, który koryguje poziom α dla pojedynczego porównania odwrotnie proporcjonalnie do liczby wszystkich par testów c, które można byłoby przeprowadzić: $\frac{\alpha}{c}$.

Testy post–hoc

Porównanie istotności wpływu typu materiału na czas pracy baterii dla temperatury pracy $70°F$.

materiał \ temperatura	$\bar{y}_{ij.}$		
	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5



$$MS_e = \frac{SS_e}{ab(r-1)}$$

$$MS_e \approx \frac{18230{,}75}{27}$$

$$MS_e \approx 675{,}21$$

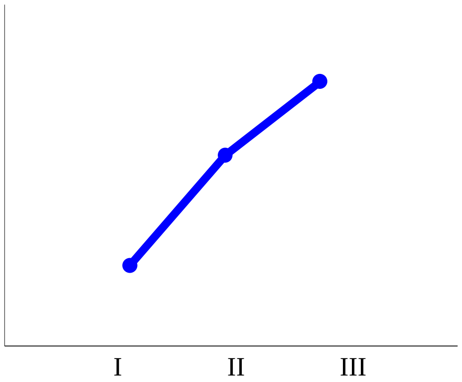
Test NIR	t_n dla $\alpha = 0{,}05$ $t_\alpha = F^{-1}_{t(27)}\left(\frac{1}{2}0{,}05\right) \approx -2{,}05$	p_value
I vs. II	$\dfrac{\bar{y}_{12.} - \bar{y}_{22}}{\sqrt{\frac{2}{r}MS_e}} = \dfrac{57{,}25 - 119{,}75}{\sqrt{\frac{2}{4}675{,}21}} \approx -3{,}4$	$2F_{t(27)}(-3{,}4) \approx 0{,}0021$
I vs. III	$\dfrac{\bar{y}_{12.} - \bar{y}_{32}}{\sqrt{\frac{2}{r}MS_e}} = \dfrac{57{,}25 - 145{,}75}{\sqrt{\frac{2}{4}675{,}21}} \approx -4{,}82$	$2F_{t(27)}(-4{,}82) \approx 0{,}00005$
II vs. III	$\dfrac{\bar{y}_{22.} - \bar{y}_{32}}{\sqrt{\frac{2}{r}MS_e}} = \dfrac{119{,}75 - 145{,}75}{\sqrt{\frac{2}{4}675{,}21}} \approx -1{,}42$	$2F_{t(27)}(-1{,}42) \approx 0{,}1685$

różnice średnich są istotne

różnica średnich nie jest istotna

Porównanie istotności wpływu typu materiału na czas pracy baterii.

temperatura / materiał	$\bar{y}_{ij.}$ $15°F$	$70°F$	$125°F$	$\bar{y}_{i..}$
I	134,75	57,25	57,5	83,17
II	155,75	119,75	49,5	108,33
III	144	145,75	85,5	125,08



Test NIR	t_n dla $\alpha = 0{,}05$ $t_\alpha = F^{-1}_{t(27)}\left(\frac{1}{2}0{,}05\right) \approx -2{,}05$	p_value
I vs. II	$\dfrac{\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2.}}{\sqrt{\frac{2}{br}MS_e}} = \dfrac{83{,}17 - 108{,}33}{\sqrt{\frac{2}{12}675{,}21}} \approx -2{,}37$	$2F_{t(27)}(-2{,}37) \approx 0{,}0251$
I vs. III	$\dfrac{\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{3.}}{\sqrt{\frac{2}{br}MS_e}} = \dfrac{83{,}17 - 125{,}08}{\sqrt{\frac{2}{12}675{,}21}} \approx -3{,}95$	$2F_{t(27)}(-3{,}95) \approx 0{,}0005$
II vs. III	$\dfrac{\bar{y}_{2..} - \bar{y}_{3.}}{\sqrt{\frac{2}{br}MS_e}} = \dfrac{108{,}33 - 125{,}08}{\sqrt{\frac{2}{12}675{,}21}} \approx -1{,}58$	$2F_{t(27)}(-1{,}58) \approx 0{,}1260$

$$MS_e = \frac{SS_e}{ab(r-1)}$$

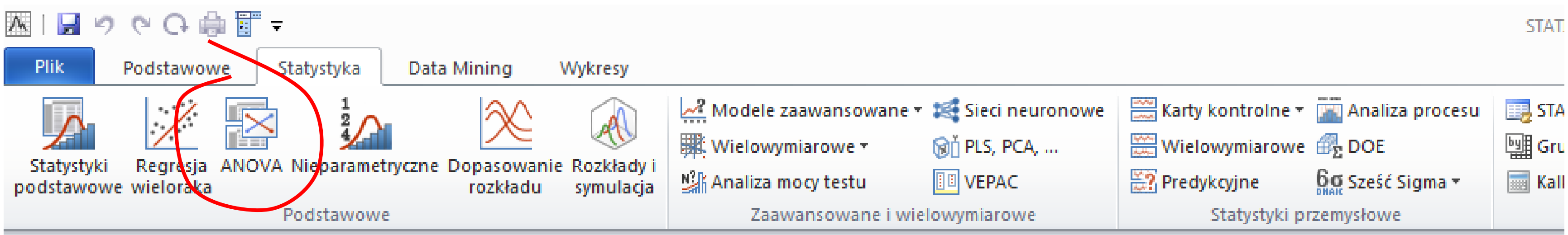
$$MS_e \approx \frac{18230{,}75}{27}$$

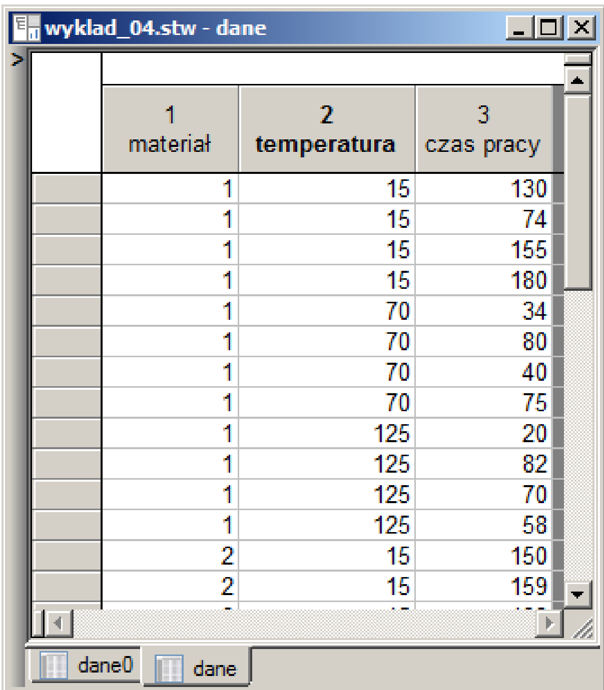
$$MS_e \approx 675{,}21$$

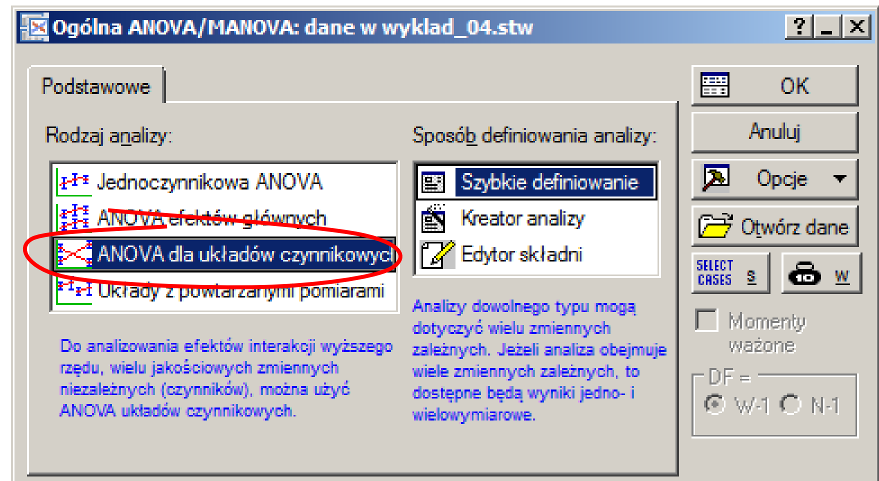
różnice średnich są istotne

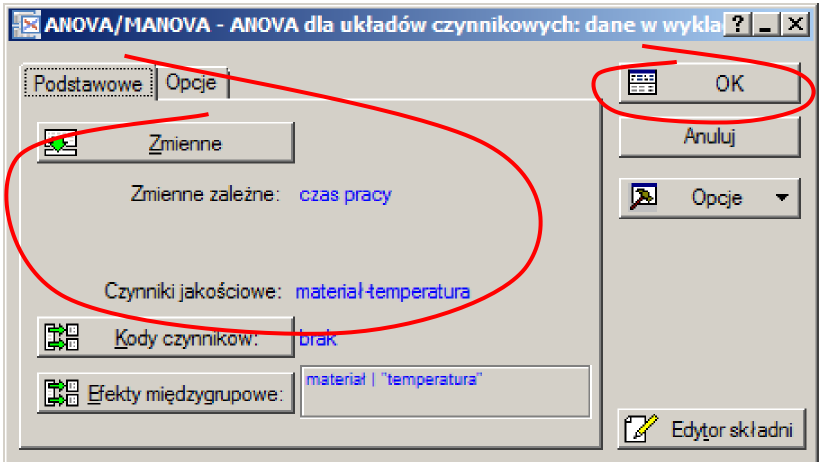
różnica średnich nie jest istotna

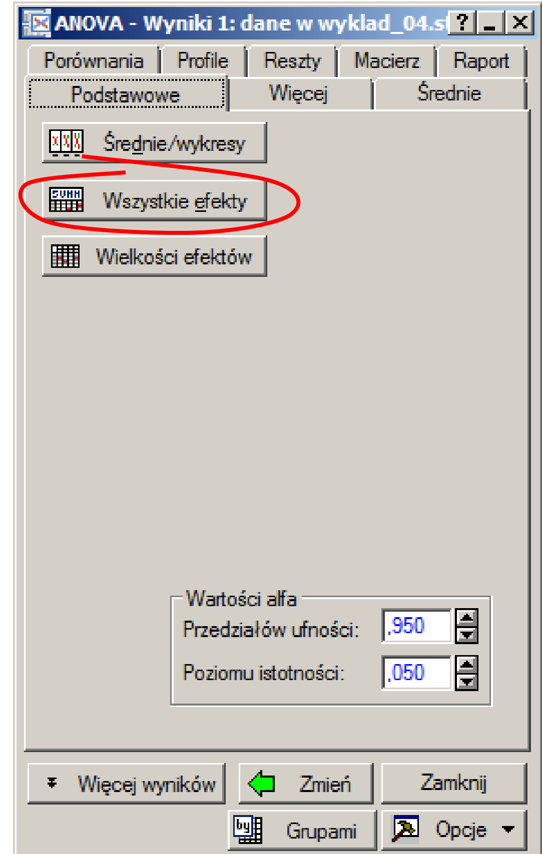
STATISTICA – ANOVA

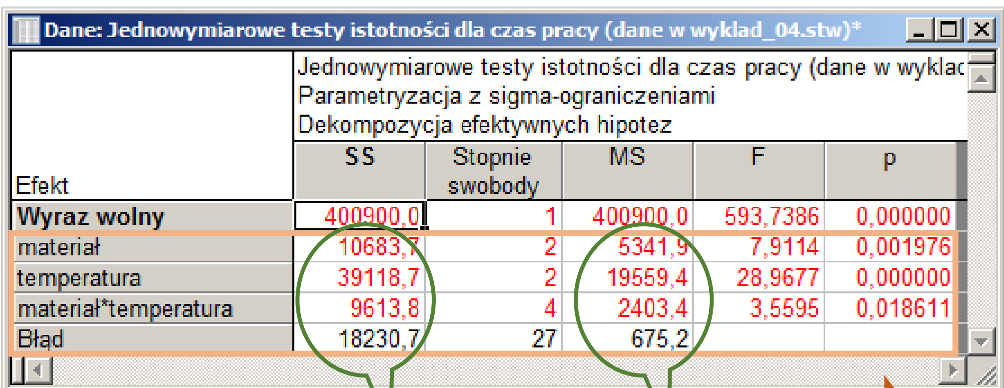












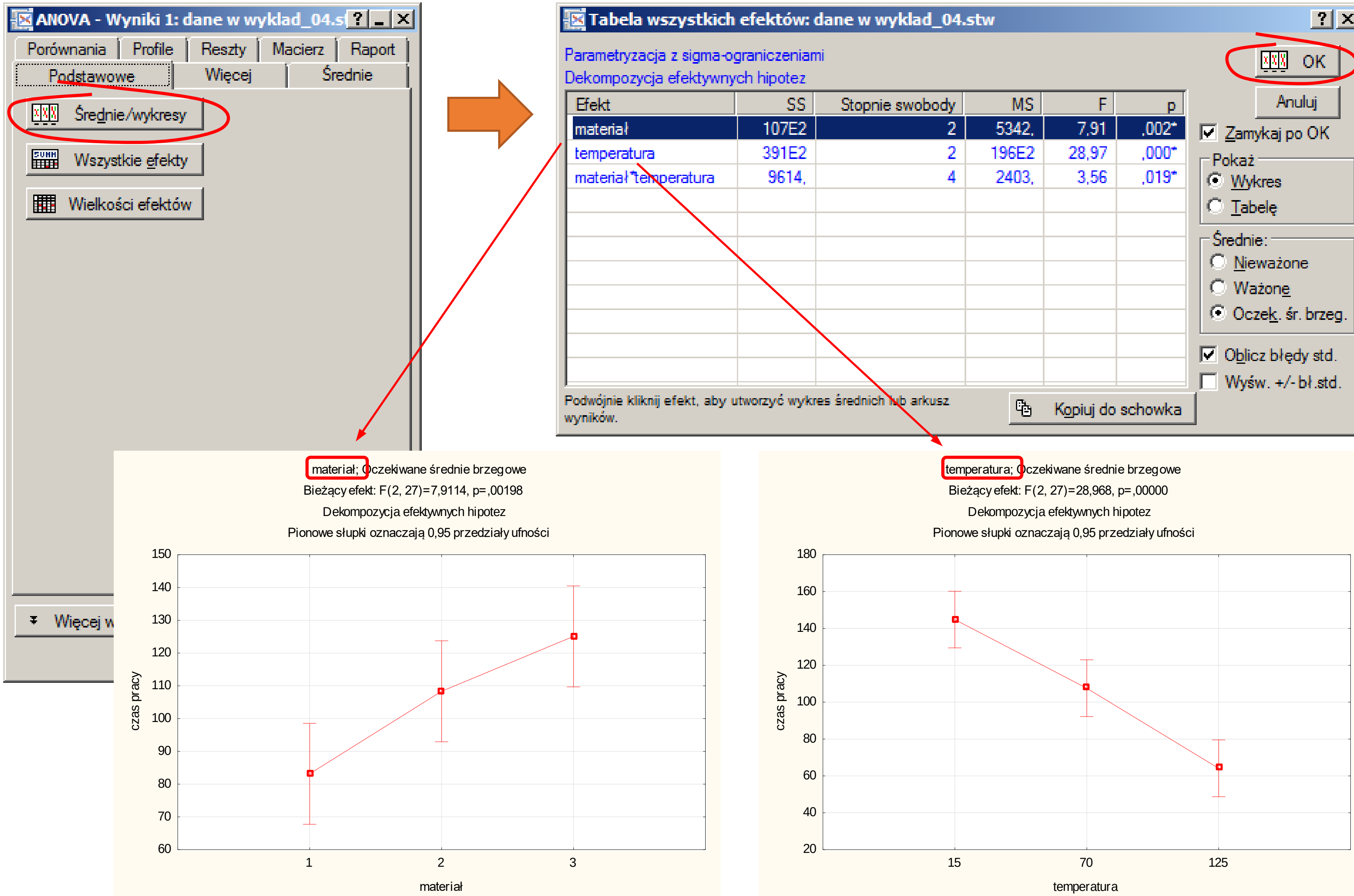
Jednowymiarowe testy istotności dla czas pracy (dane w wyklad
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami
Dekompozycja efektywnych hipotez

Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
Wyraz wolny	400900,0	1	400900,0	593,7386	0,000000
materiał	10683,7	2	5341,9	7,9114	0,001976
temperatura	39118,7	2	19559,4	28,9677	0,000000
materiał*temperatura	9613,8	4	2403,4	3,5595	0,018611
Błąd	18230,7	27	675,2		

SS_A MS_A
SS_B MS_B
SS_{AB} MS_{AB}
SS_e MS_e

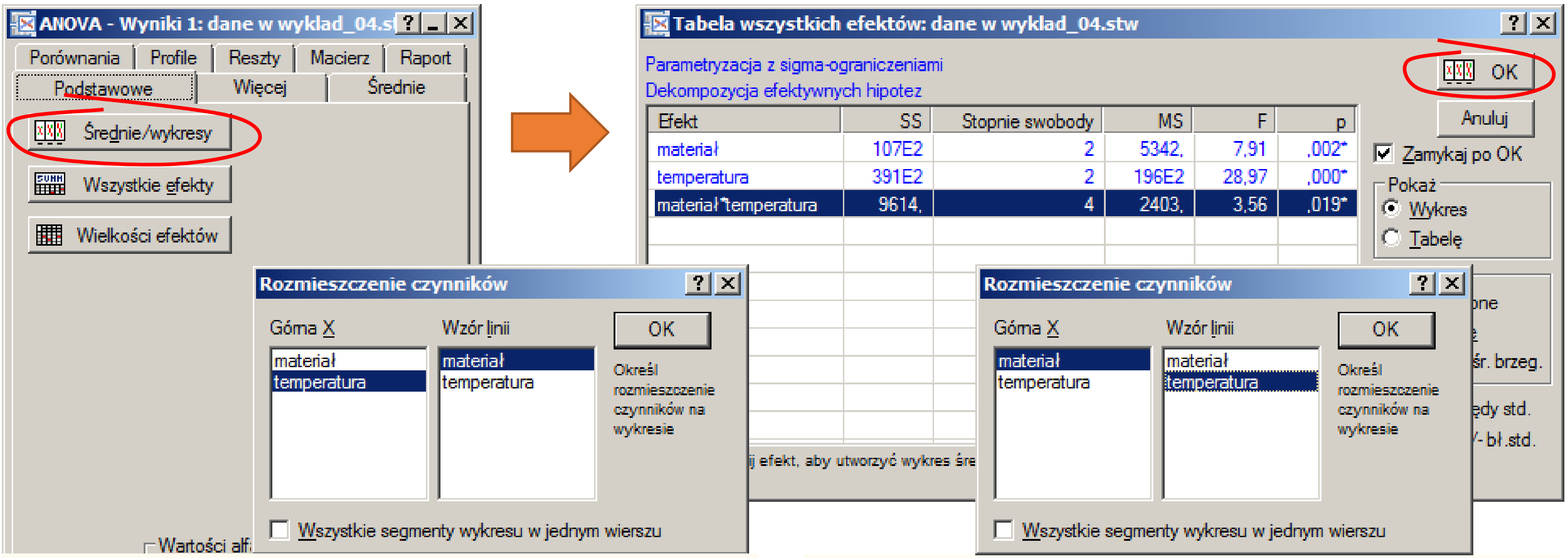
Czas pracy baterii **zależy** od obydwu testowanych czynników oraz od ich interakcji.

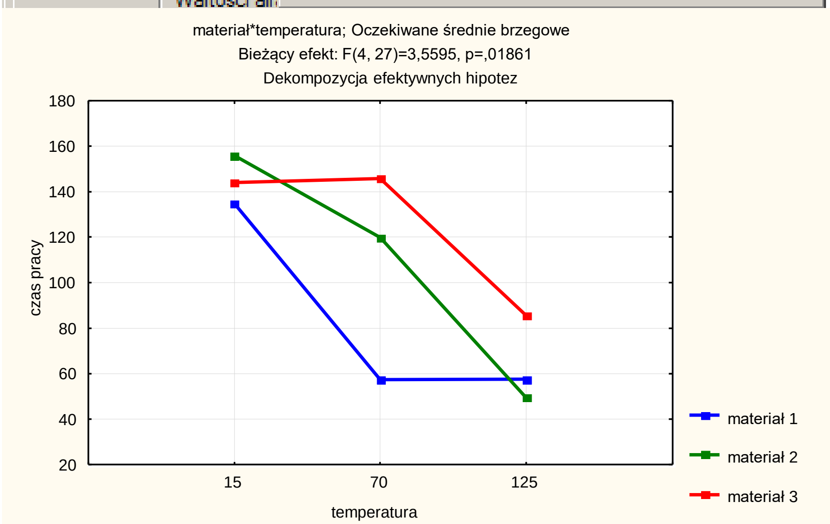
STATISTICA – ANOVA

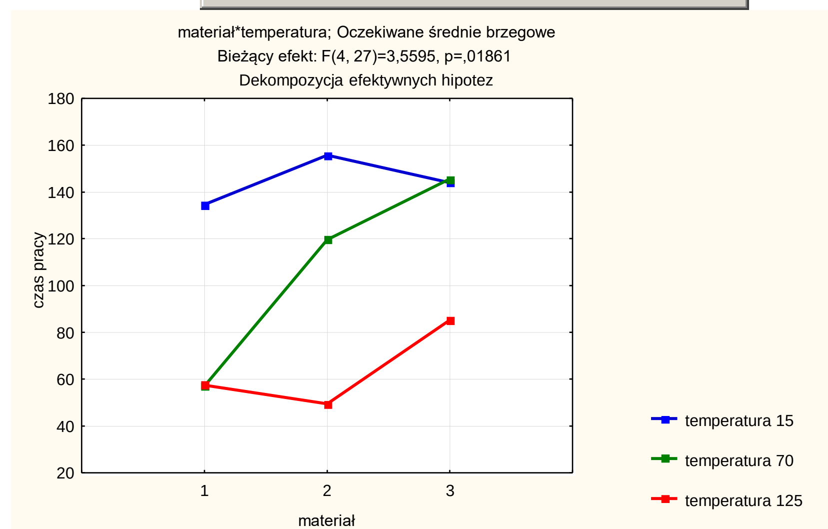


Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
materiał	107E2	2	5342,	7,91	,002*
temperatura	391E2	2	196E2	28,97	,000*
materiał*temperatura	9614,	4	2403,	3,56	,019*

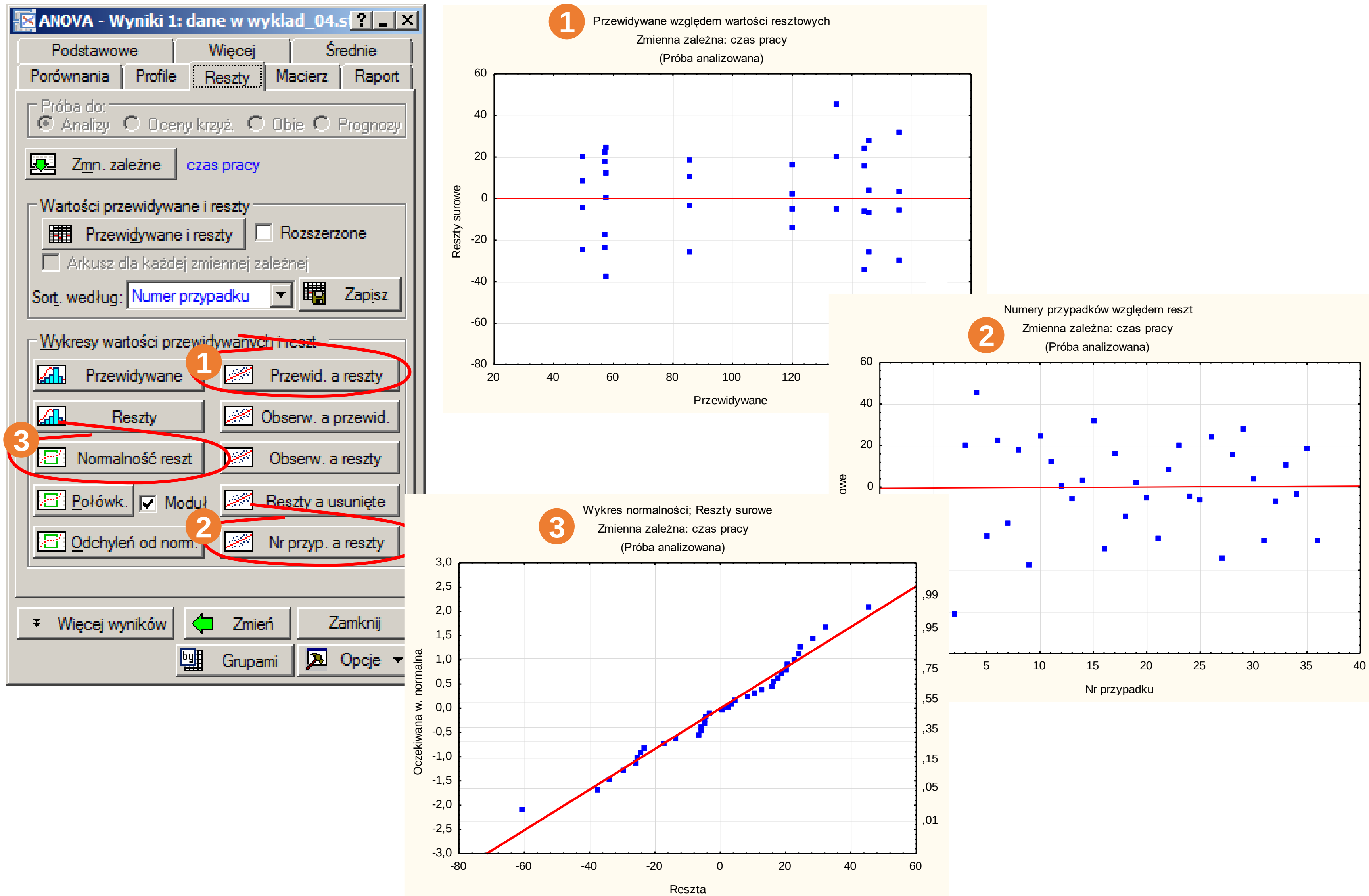
STATISTICA – ANOVA



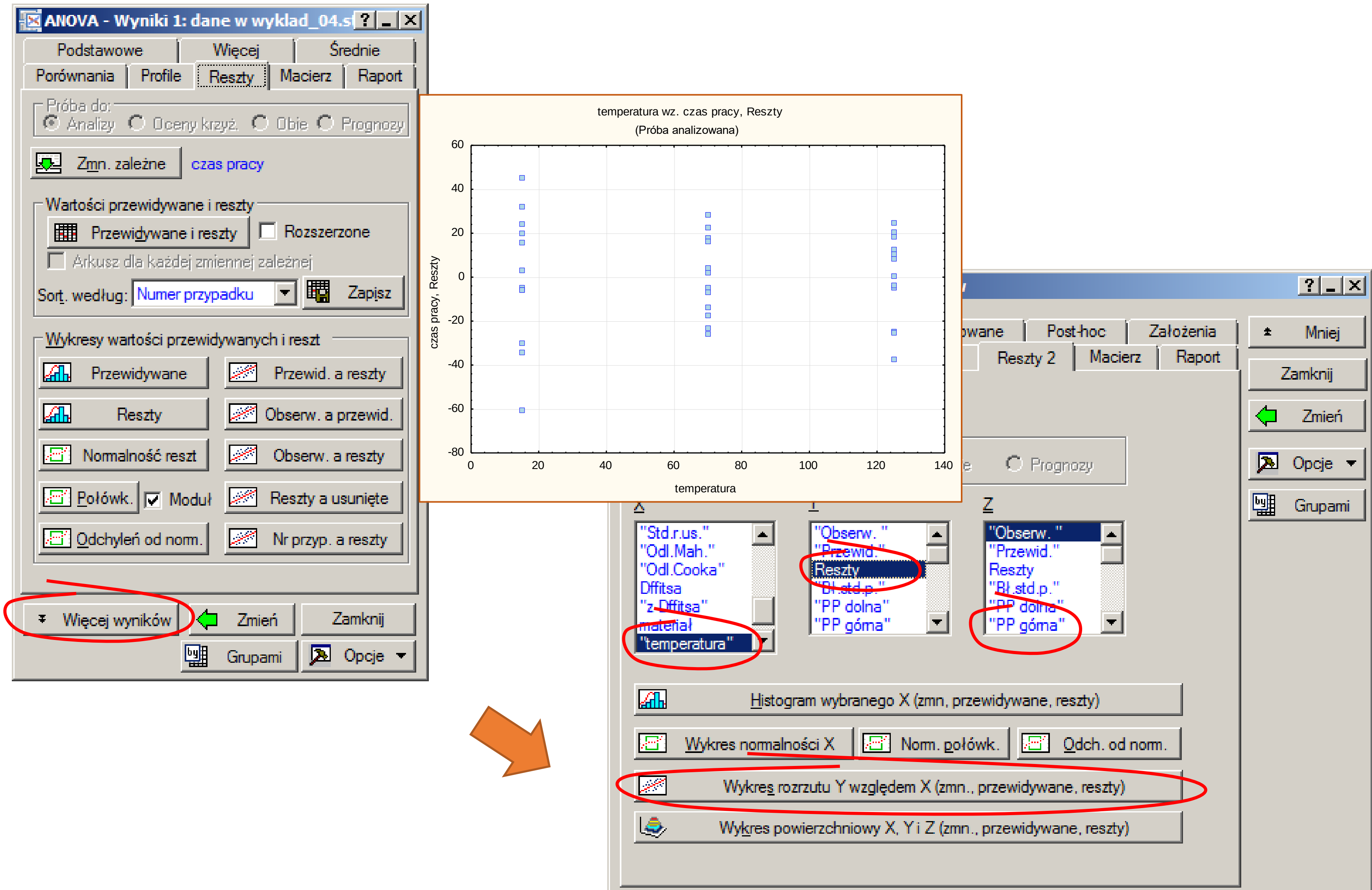


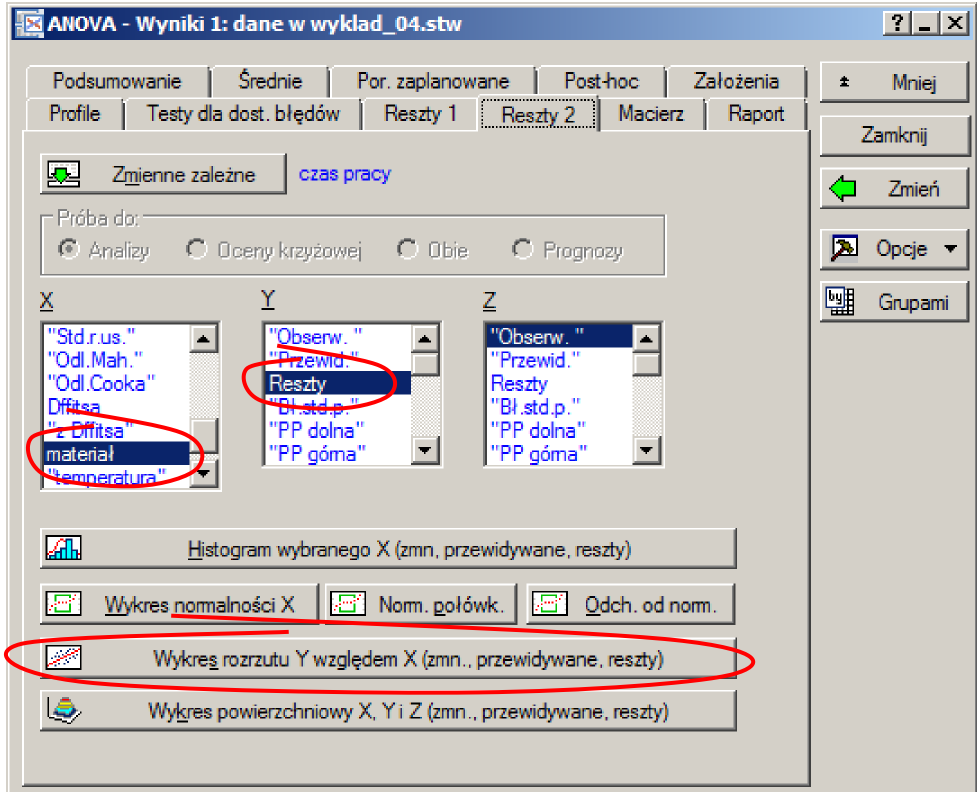


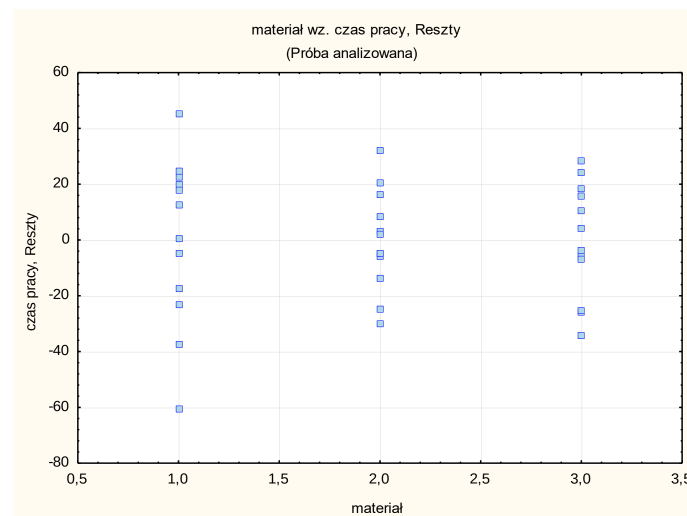
STATISTICA – ANOVA

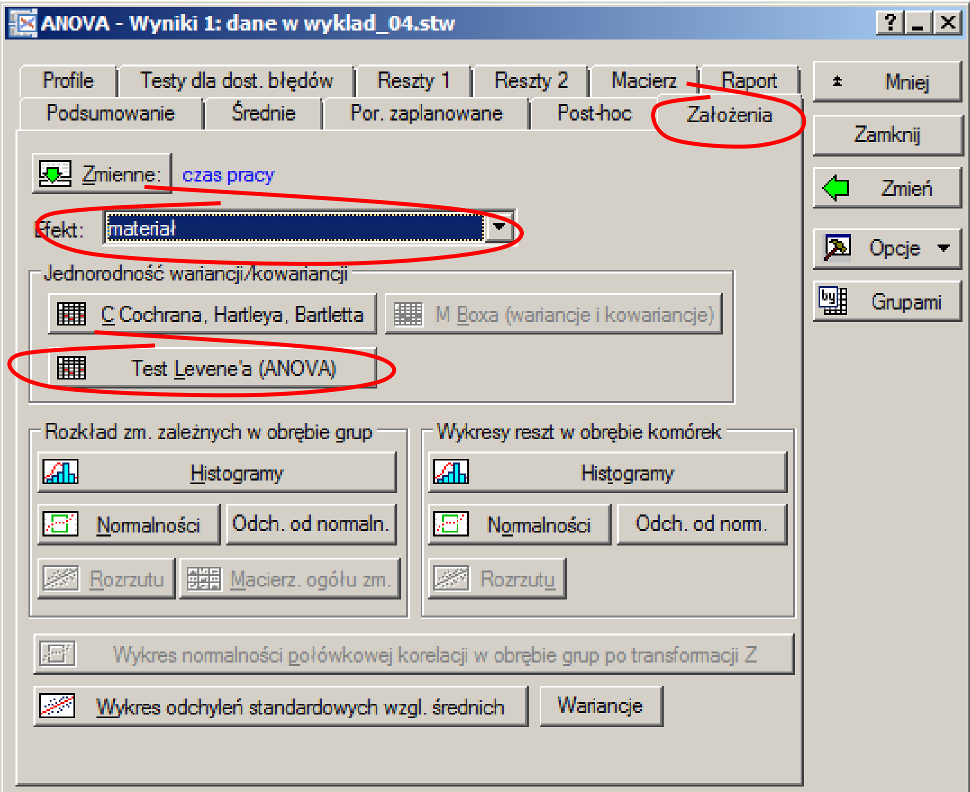


STATISTICA – ANOVA




ANOVA - Wyniki 1: dane w wyklad_04.stw
Podsumowanie
Średnie
Por. zaplanowane
Post-hoc
Założenia
Profile
Testy dla dost. błędów
Reszty 1
Reszty 2
Macierz
Raport
Mniej
Zamknij
Zmień
Opcje
Grupami
Zmienne zależne
czas pracy
Próba do:
Analizy
Oceny krzyżowej
Obie
Prognozy
X
"Std.r.us."
"Odl.Mah."
"Odl.Cooka"
Dffitsa
"z Dffitsa"
materiał
"temperatura"
Y
"Obserw."
"Przewid."
Reszty
"Bł.std.p."
"PP dolna"
"PP górna"
Z
"Obserw."
"Przewid."
Reszty
"Bł.std.p."
"PP dolna"
"PP górna"
Histogram wybranego X (zmn, przewidywane, reszty)
Wykres normalności X
Norm. połówk.
Odch. od norm.
Wykres rozrzutu Y względem X (zmn., przewidywane, reszty)
Wykres powierzchniowy X, Y i Z (zmn., przewidywane, reszty)


materiał wz. czas pracy, Reszty
(Próba analizowana)
czas pracy, Reszty
materiał
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5



Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl
Efekt: materiał
Stopnie swobody dla każdego F : 2, 33

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	297,8364	667,6950	0,446067	0,643944

Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl
Efekt: "temperatura"
Stopnie swobody dla każdego F : 2, 33

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	611,1443	392,7665	1,555999	0,226063

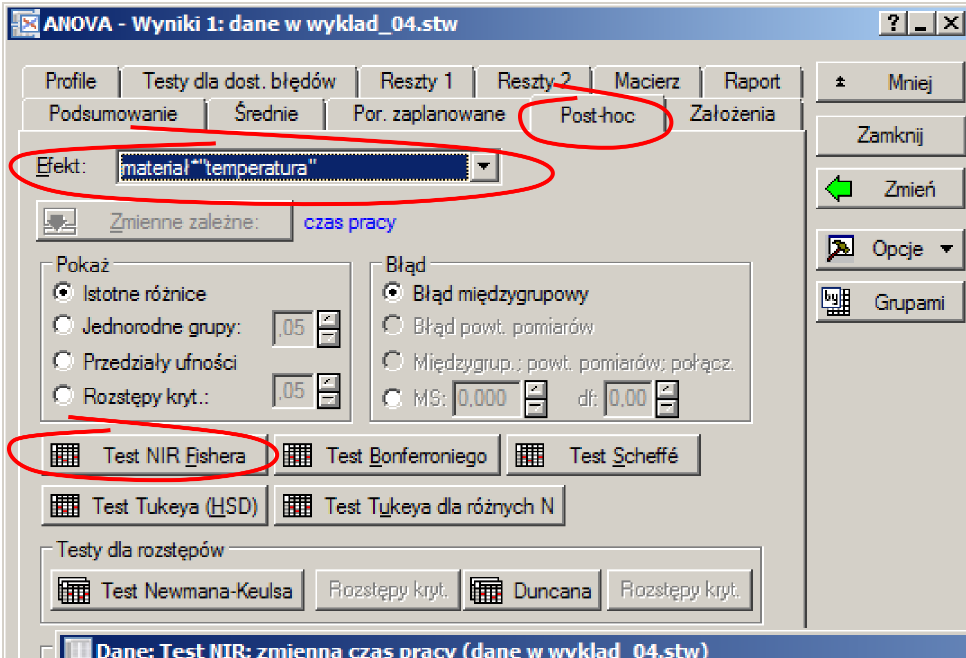
Dane: Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w w...

Test Levene'a jednorodności wariancji (dane w wyl
Efekt: materiał*"temperatura"
Stopnie swobody dla każdego F : 8, 27

	MS Efekt	MS Błąd	F	p
czas pracy	165,4653	183,4537	0,901946	0,528938

nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji

STATISTICA – ANOVA



wpływu typu materiału na czas pracy baterii dla temperatury pracy $70°F$

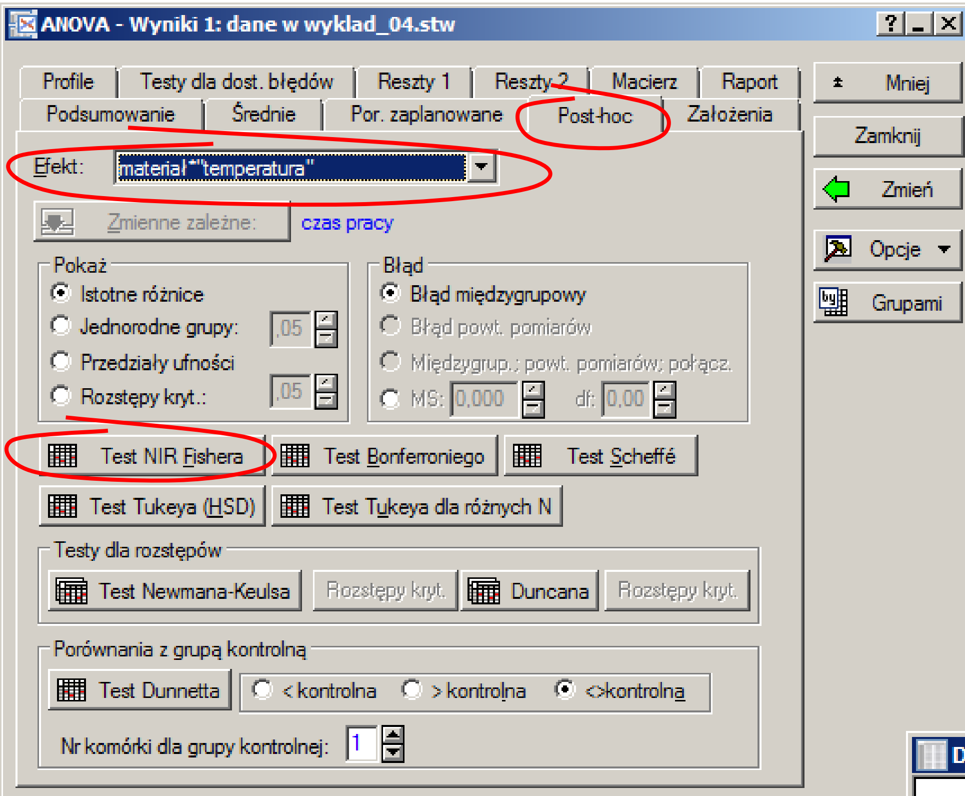
I vs. II
wpływ **istotny**

I vs. III
wpływ **istotny**

II vs. III
wpływ **nieistotny**

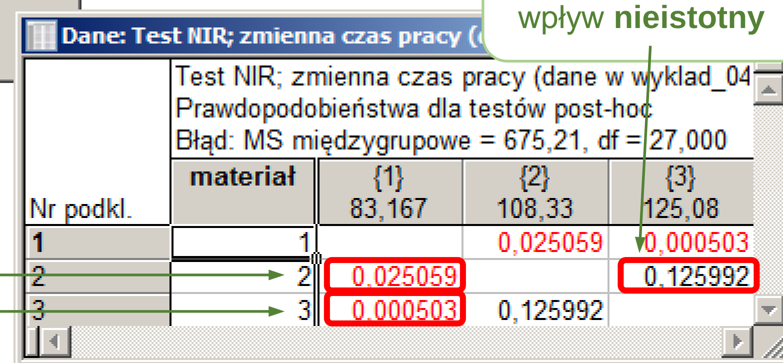
Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad_04.stw)
Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc
Błąd: MS międzygrupowe = 675,21, df = 27,000

Nr podkl.	materiał	temperatura	{1} 134,75	{2} 57,250	{3} 57,500	{4} 155,75	{5} 119,75	{6} 49,500	{7} 144,00	{8} 145,75	{9} 85,500
1	1	15		0,000248	0,000257	0,263107	0,421434	0,000080	0,618747	0,554383	0,012379
2	1	70	0,000248		0,989244	0,000012	0,002102	0,676518	0,000064	0,000050	0,135811
3	1	125	0,000257	0,989244		0,000012	0,002176	0,666736	0,000067	0,000052	0,139165
4	2	15	0,263107	0,000012	0,000012		0,060480	0,000004	0,527894	0,590739	0,000705
5	2	70	0,421434	0,002102	0,002176	0,060480		0,000705	0,197985	0,168488	0,073224
6	2	125	0,000080	0,676518	0,666736	0,000004	0,000705		0,000021	0,000016	0,060480
7	3	15	0,618747	0,000064	0,000067	0,527894	0,197985	0,000021		0,924825	0,003644
8	3	70	0,554383	0,000050	0,000052	0,590739	0,168488	0,000016	0,924825		0,002868
9	3	125	0,012379	0,135811	0,139165	0,000705	0,073224	0,060480	0,003644	0,002868	



wpływu typu materiału na czas pracy baterii

II vs. III wpływ **nieistotny**


Dane: Test NIR; zmienna czas pracy (d

Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad_04
Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc
Błąd: MS międzygrupowe = 675,21, df = 27,000

Nr podkl.	materiał	{1} 83,167	{2} 108,33	{3} 125,08
1	1		0,025059	0,000503
2	2	0,025059		0,125992
3	3	0,000503	0,125992	

I vs. II wpływ **istotny**

I vs. III wpływ **istotny**

Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

f Cohena (iloraz sygnału do szumu)

$$f = \frac{\sigma_s}{\sigma}$$

czynnik A	czynnik B	interakcja czynników
	σ_s	
$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}$	$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}$	$\sigma_{AB} = \sqrt{\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}$
	f	
$f_A = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}$	$f_B = \sqrt{\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{\beta_j}{\sigma}\right)^2}$	$f_{AB} = \sqrt{\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{(\tau\beta)_{ij}}{\sigma}\right)^2}$

Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

stopień niecentralności δ

$$\delta = Nf^2$$

eta[2]

$$\eta^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$$

Ψ średniokwadratowy efekt standaryzowany RMSSE

$$\Psi = \sqrt{\frac{\delta}{n \cdot df}}^{\,*}$$

(ang. Root Mean Square Standardized Effect)

czynnik A	czynnik B	interakcja czynników
Ψ		
$\Psi_A = \sqrt{\frac{\delta_A}{br\,(a-1)}}$	$\Psi_B = \sqrt{\frac{\delta_B}{ar\,(b-1)}}$	$\Psi_A = \sqrt{\frac{\delta_{AB}}{r\,(a-1)(b-1)}}$
$\Psi_A = \sqrt{\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\tau_i}{\sigma}\right)^2}$	$\Psi_B = \sqrt{\frac{1}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{\beta_j}{\sigma}\right)^2}$	$\Psi_{AB} = \sqrt{\frac{1}{(a-1)(b-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{(\tau\beta)_{ij}}{\sigma}\right)^2}$

[*] n – liczba komórek zbiorczej tabeli, z której wyznaczane są efekty, df – liczba stopni swobody

Dwuczynnikowa ANOVA – wybrane miary efektu

	σ_s	f	δ	Ψ
materiał	17,23	0,66	15,82	0,81
temperatura	32,96	1,27	57,94	1,55
materiał*temperatura	16,34	0,63	14,24	0,94

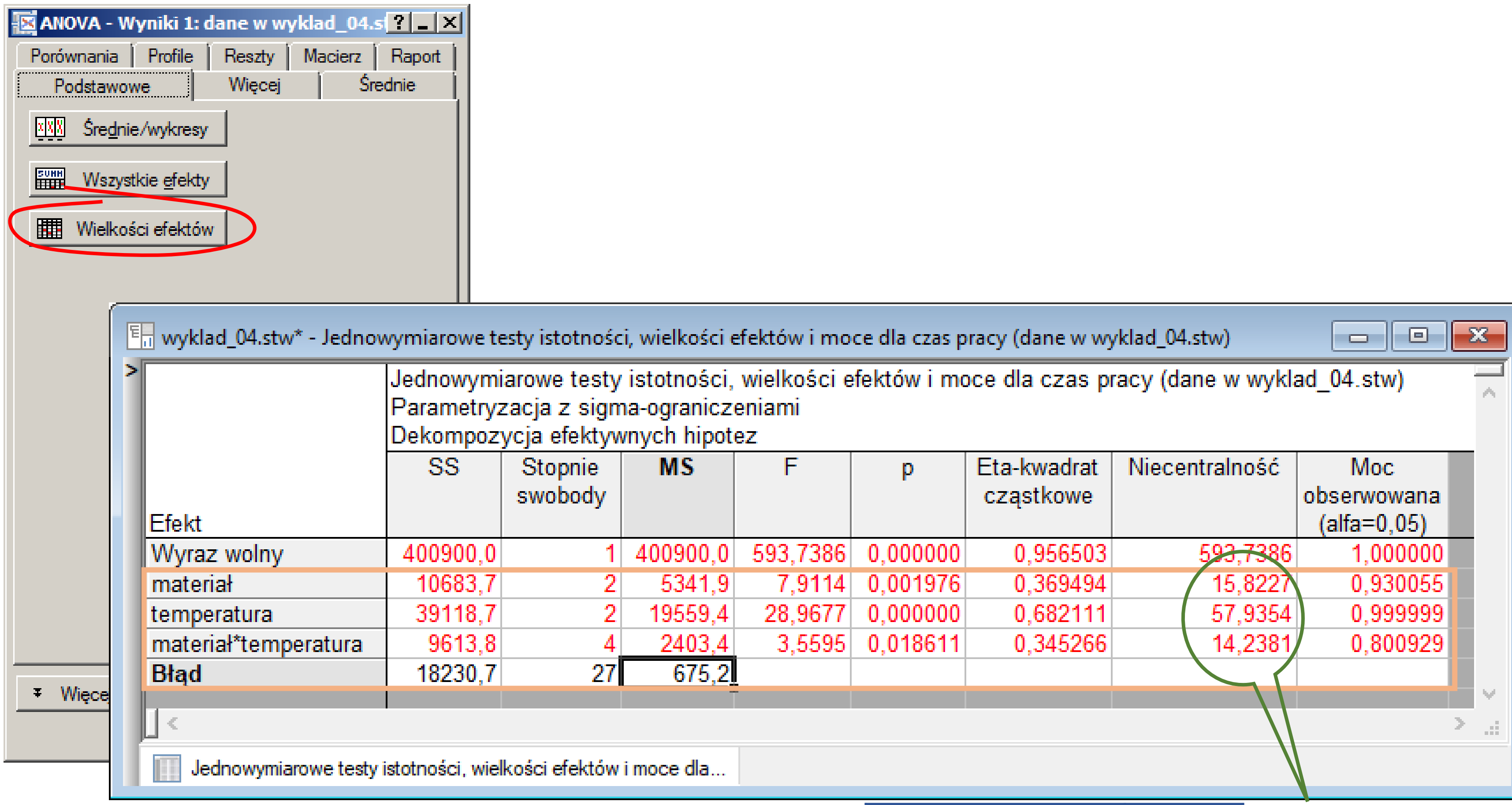
$$\sigma_{\text{materiał}} = \sqrt{\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(22{,}36^2 + 2{,}81^2 + 19{,}56^2\right)} = 17{,}23$$

$$\sigma = \sqrt{MS_e} \approx 25{,}98$$

$$f_{\text{materiał}} = \frac{\sigma_{\text{materiał}}}{\sigma} = \frac{17{,}23}{25{,}98} = 0{,}66$$

$$\delta_{\text{materiał}} = N f_{\text{materiał}}^2 = 36 \cdot 0{,}66^2 = 15{,}82$$

$$\Psi_{\text{materiał}} = \sqrt{\frac{\delta_{\text{materiał}}}{br\,(a-1)}} = \sqrt{\frac{15{,}82}{3 \cdot 4 \cdot (3-1)}} = 0{,}81$$



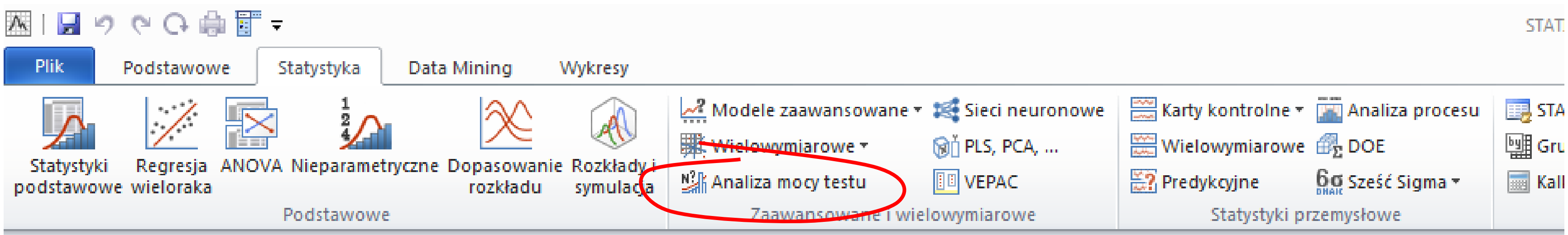
Jednowymiarowe testy istotności, wielkości efektów i moce dla czas pracy (dane w wyklad_04.stw)
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami
Dekompozycja efektywnych hipotez

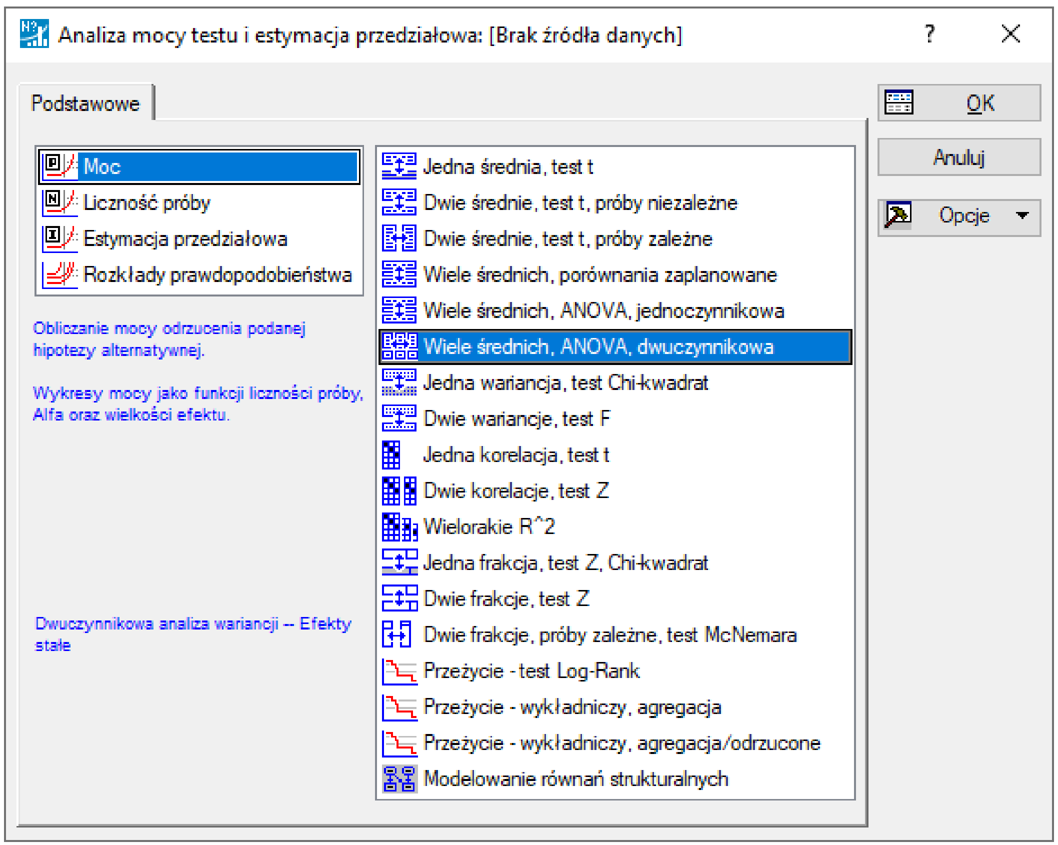
Efekt	SS	Stopnie swobody	MS	F	p	Eta-kwadrat cząstkowe	Niecentralność	Moc obserwowana (alfa=0,05)
Wyraz wolny	400900,0	1	400900,0	593,7386	0,000000	0,956503	593,7386	1,000000
materiał	10683,7	2	5341,9	7,9114	0,001976	0,369494	15,8227	0,930055
temperatura	39118,7	2	19559,4	28,9677	0,000000	0,682111	57,9354	0,999999
materiał*temperatura	9613,8	4	2403,4	3,5595	0,018611	0,345266	14,2381	0,800929
Błąd	18230,7	27	675,2					

	δ
materiał	15,82
temperatura	57,94
materiał*temperatura	14,24

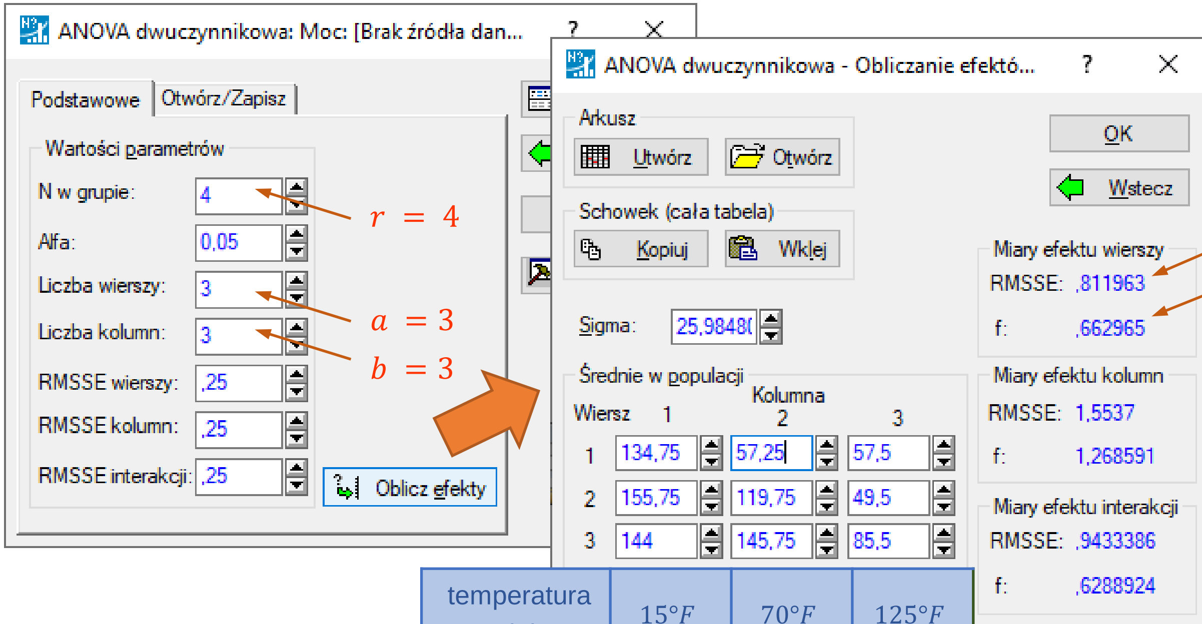
δ_A
δ_B
δ_{AB}

STATISTICA – analiza mocy testu





STATISTICA – analiza mocy testu



Ψ	f	
0,81	0,66	materiał
1,55	1,27	temperatura
0,94	0,63	materiał*temperatura

temperatura / materiał	$15°F$	$70°F$	$125°F$
I	134,75	57,25	57,5
II	155,75	119,75	49,5
III	144	145,75	85,5

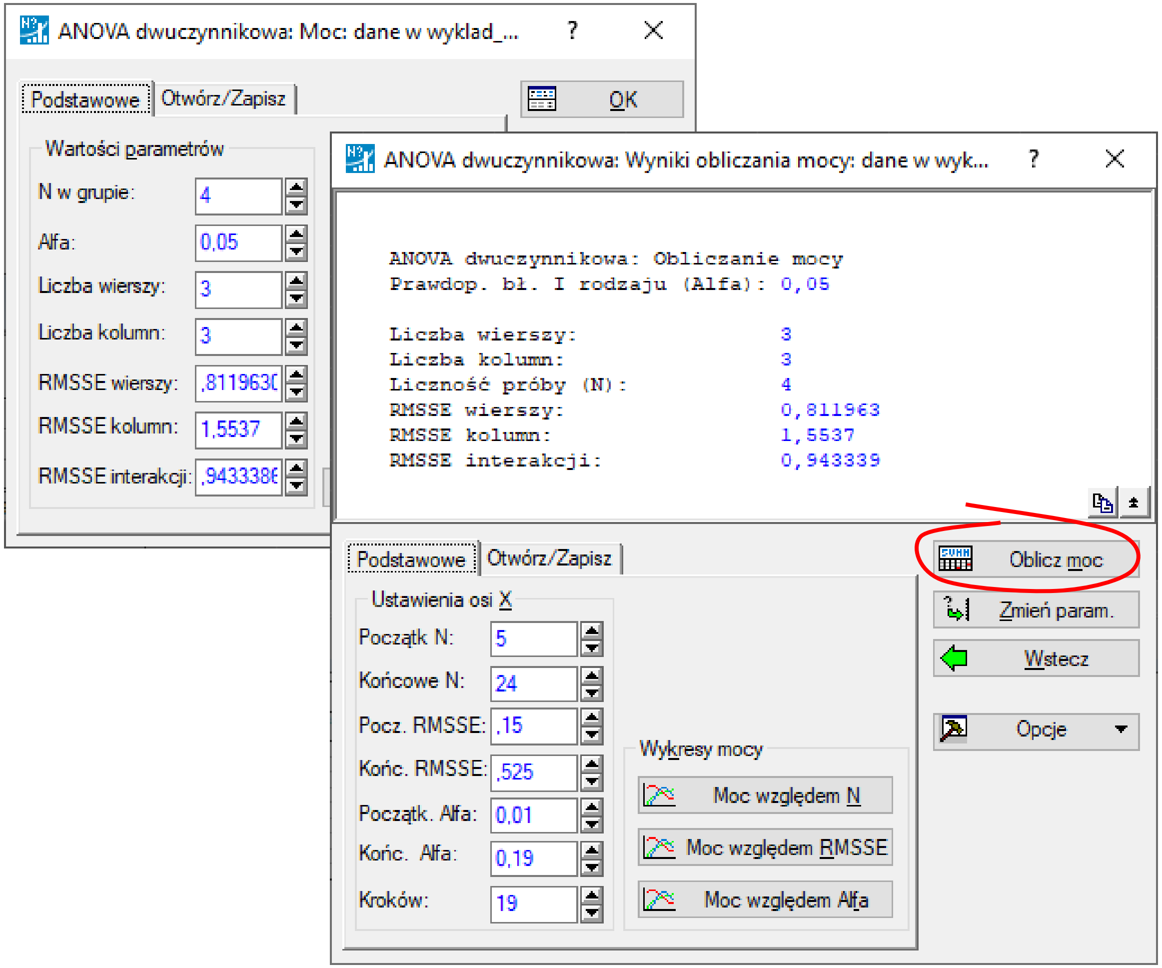
$MS_e = \sigma^2$

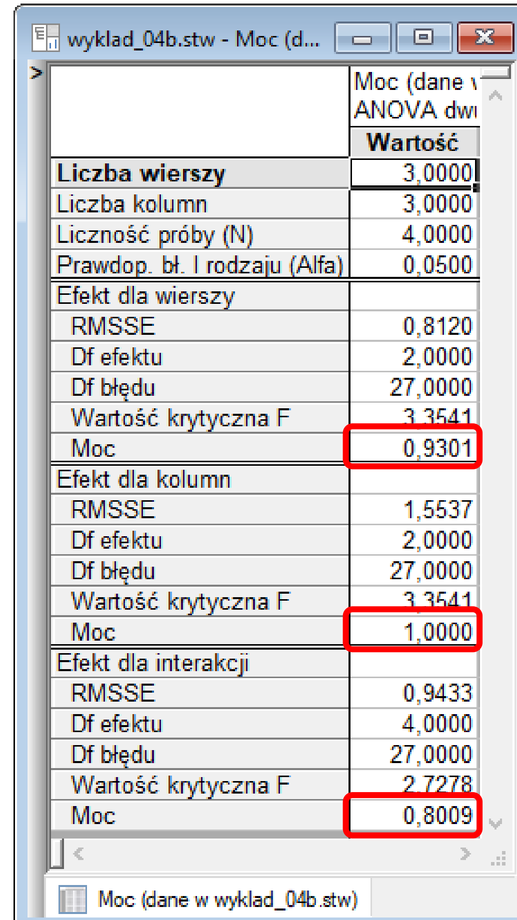
Dane: Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad_04.stw)

Test NIR; zmienna czas pracy (dane w wyklad_04.stw)
Prawdopodobieństwa dla testów post-hoc
Błąd: MS międzygrupowe = $\boxed{675,21}$, df = 27,000

Nr podkl.	materiał	temperatura	{1} 134,75	{2} 57,250	{3} 57,500	{4} 155,75	{5} 119,75	{6} 49,500	{7} 144,00	{8} 145,75	{9} 85,500
1	1	15		0,000248	0,000257	0,263107	0,421434	0,000080	0,618747	0,554383	0,012379
2	1	70	0,000248		0,989244	0,000012	0,002102	0,676518	0,000064	0,000050	0,135811
3	1	125	0,000257	0,989244		0,000012	0,002176	0,666736	0,000067	0,000052	0,139165
4	2	15	0,263107	0,000012	0,000012		0,060480	0,000004	0,527894	0,590739	0,000705

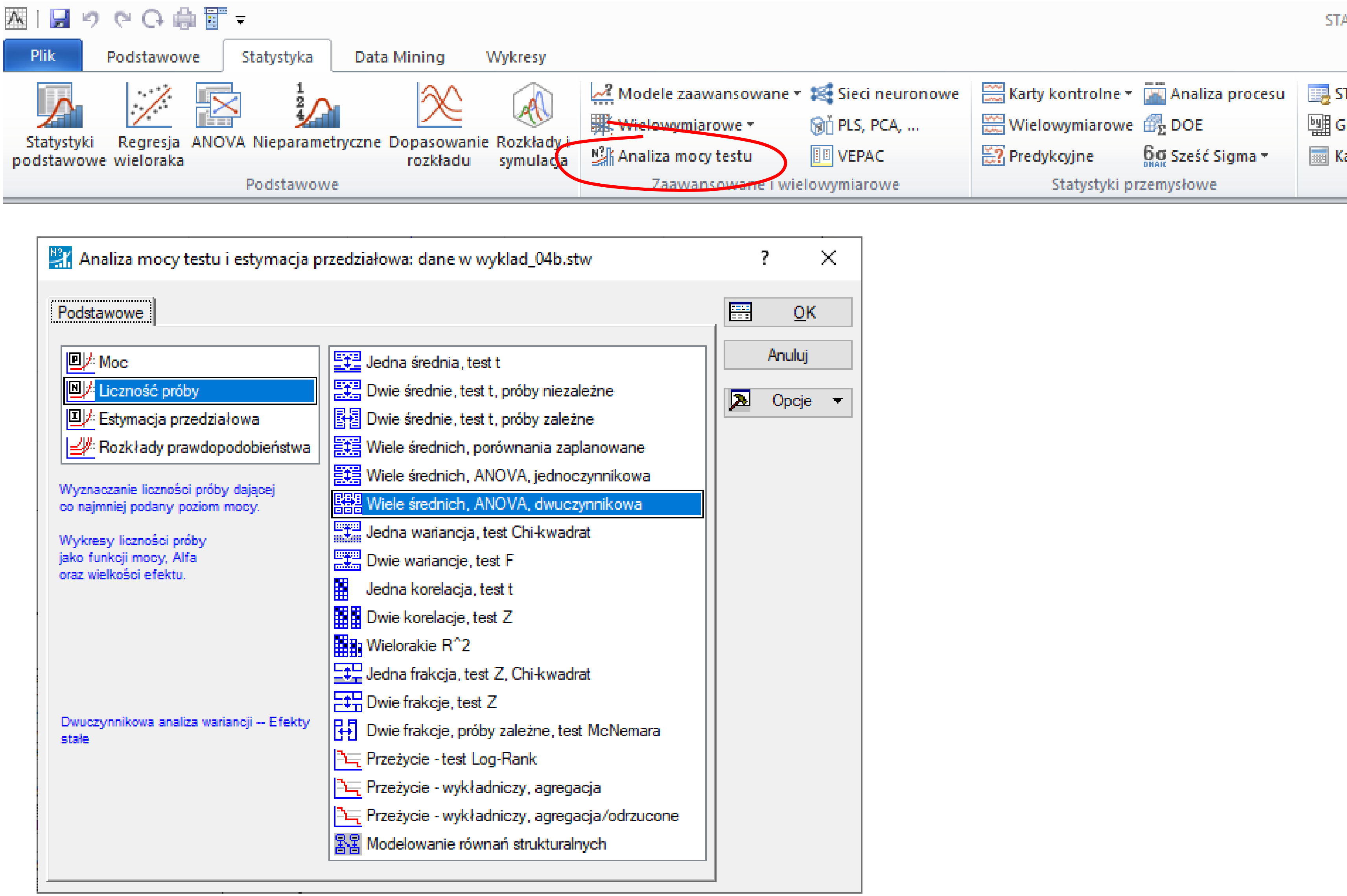
STATISTICA – analiza mocy testu



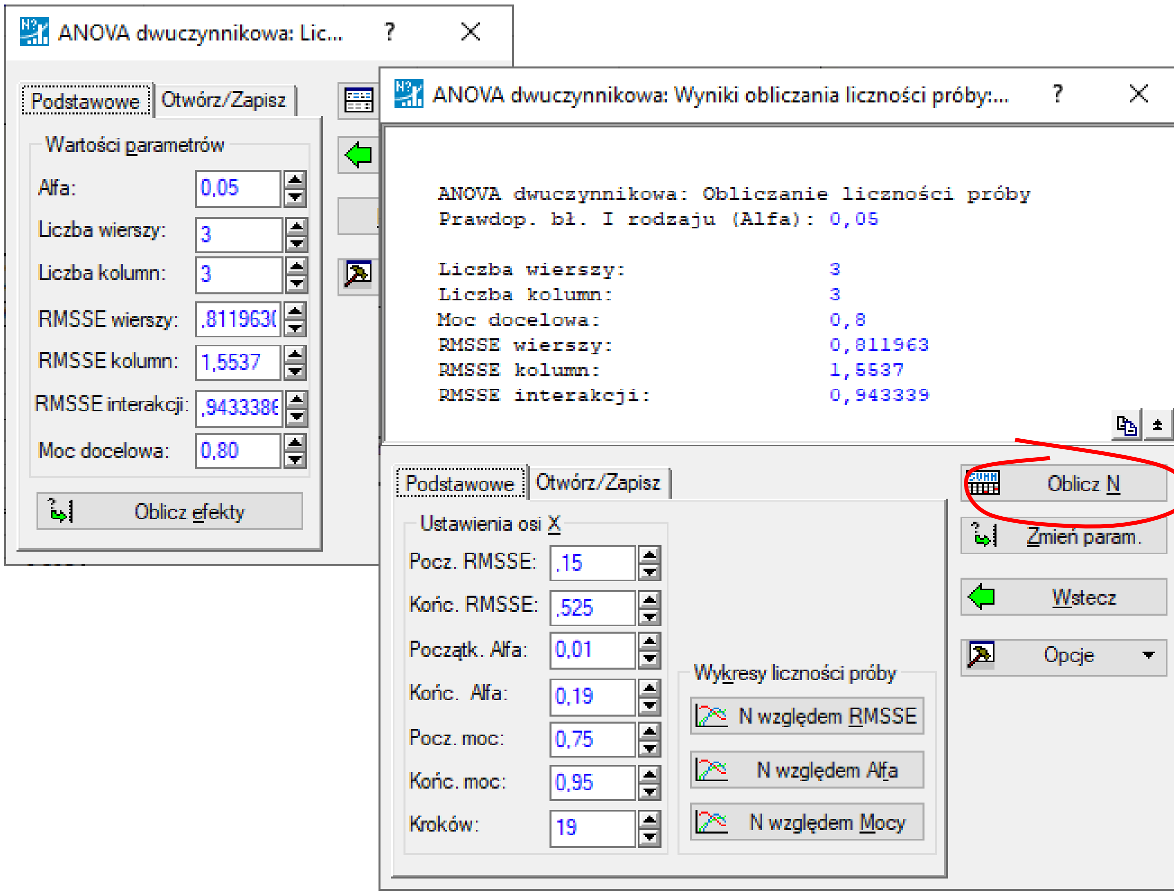


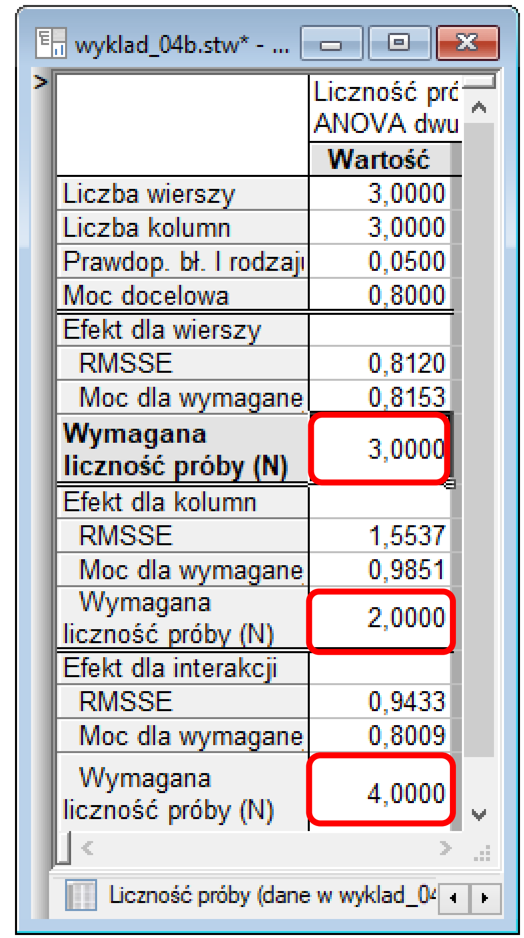
wykonany test jest mocny (obserwowane moce dla czynników i interakcji wnoszą: 0,93, 1,0, 0,8)

STATISTICA – analiza mocy testu



STATISTICA – analiza mocy testu





moc 0,8 dla rozważanych efektów zapewniają:

- dla materiału 3 powtórki doświadczenia,
- dla temperatury 2 powtórki a
- dla interakcji 4 powtórki