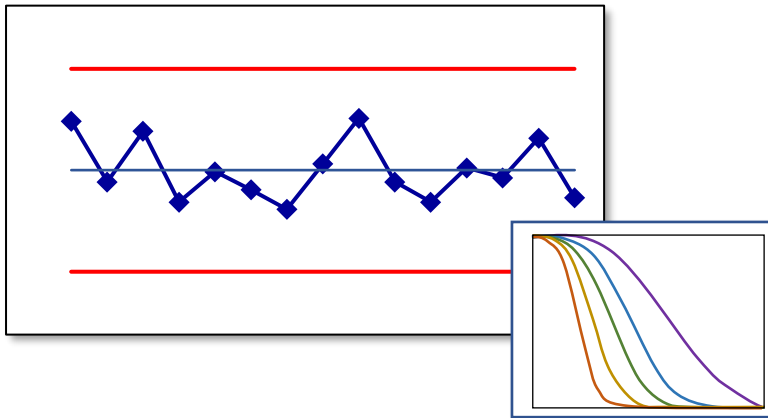


Sterowanie jakością

Karty kontrolne
Krzywe OC
 ARL_0 , ARL_1



Materiały

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

Statystyka matematyczna – błąd I i II rodzaju

W procesie weryfikacji hipotezy statystycznej można popełnić:

- *błąd I rodzaju* polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa (*poziom istotności α* to prawdopodobieństwo popełnienia *błędu I rodzaju*),
- *błąd II rodzaju* polegający na nieodrzućeniu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* oznaczane jest jako β).

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	Decyzja	
	nie odrzućać H_0	odrzućić H_1
prawdziwa	<i>decyzja poprawna</i>	<i>błąd I rodzaju α</i>
fałszywa	<i>błąd II rodzaju β</i>	<i>decyzja poprawna</i>

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu statystycznego to prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie **poprawnej decyzji** w przypadku gdy **hipoteza zerowa jest fałszywa** (tzn. odrzucenie hipotezy na rzecz hipotezy alternatywnej), moc testu opisuje więc zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych.

Istnieje ścisła zależność pomiędzy mocą testu a liczebnością próby:

im większa liczebności próby → tym większa moc testu.

Przyjmuje się, że **moc testu powinna wynosić co najmniej 0,8**, tzn. prawdopodobieństwo popełnienia **błędu II rodzaju nie może być wyższe niż 0,2**, wartości te pozwalają na wykrywanie znaczących odchyłeń od wartości postulowanych w hipotezie zerowej.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Przedmiotem kontroli jest proces napełniania butelek wodą. Zakładając, że rozkład ilości wody jest rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym $\sigma = 0,1$, na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ należy sprawdzić czy istnieją dowody na to, że ilość wody w napełnianych butelkach jest mniejsza niż $\mu_0 = 1$.

W zadaniu należy więc zweryfikować *hipotezę zerową*

$$H_0: \mu_0 = 1,$$

wobec *hipotezy alternatywnej*

$$H_1: \mu_0 < 1,$$

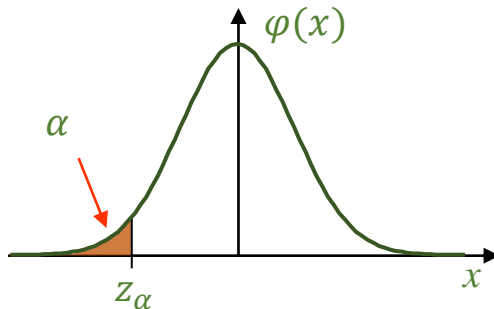
Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ i do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest standaryzowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}},$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}.$$

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Obszar krytyczny wyznacza się jako:

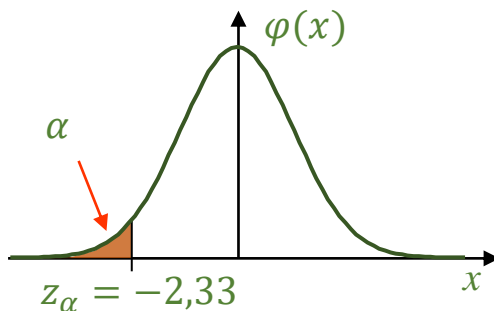


$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0,01) \approx -2,33.$$

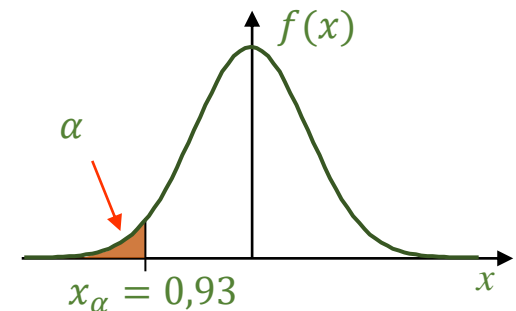
Otrzymana wartość graniczna jest wartością standaryzowaną (została obliczona z rozkładu normalnego standaryzowanego $\mathcal{N}(0,1)$). Rzeczywistą wartość graniczną otrzymuje się z zależności:

$$z_\alpha = \frac{\bar{x}_\alpha - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \rightarrow \bar{x}_\alpha = z_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0.$$

Zakładając, że do kontroli pobranych zostanie 10 butelek, średnia ilość wody w butelkach, która umożliwi odrzucenie hipotezy zerowej wynosi:



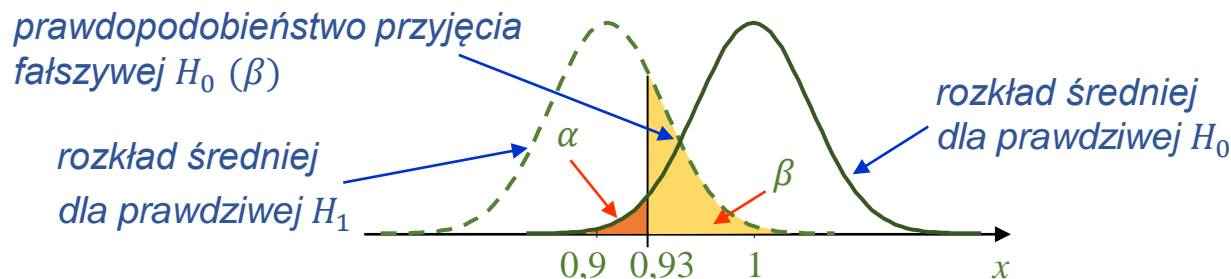
$$\bar{x}_\alpha = -2,33 \frac{0,1}{\sqrt{10}} + 1 \approx 0,93$$



Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu opisuje zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych. Załóżmy, że :

$$H_0: \mu_0 = 1 \text{ (fałszywa)} \quad H_1: \mu_1 = 0,9 \text{ (prawdziwa)}$$



Jeśli hipoteza H_0 jest fałszywa to test statystyczny dla wartości średnich:

- mniejszych od 0,93 odrzuci hipotezę H_0 (decyzja poprawna)
- większych od 0,93 nie odrzuci fałszywej hipotezy H_0 (decyzja błędna),
prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* β) wyniesie w tym przypadku:

$$\beta = P(\bar{x} > \bar{x}_\alpha) = 1 - P(\bar{x} \leq \bar{x}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0,93 - 0,9}{0,1/\sqrt{10}}\right) \approx 0,2.$$

Moc testu (prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie poprawnej decyzji w przypadku gdy H_0 jest fałszywa) jest w tym przypadku akceptowalna i wynosi: $(1 - \beta) = 0,8$.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Dla rozważanego w przykładzie testu lewostronnego wzór na **moc**

$$1 - \beta = P(\bar{x} \leq \bar{x}_\alpha) = F_{N(\mu_1, \sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{z_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right),$$

można po przekształceniach zapisać jako:

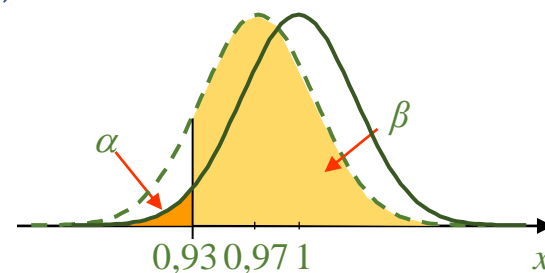
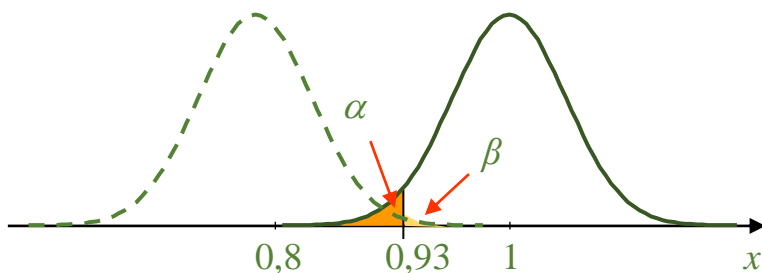
$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + z_\alpha\right), \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha).$$

Oznacza to, że przy założeniu, że rzeczywista średnia $\mu_1 = 0,8$, moc testu ma wartość:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{1 - 0,8}{0,1/\sqrt{10}} - 2,33\right) \approx 1,$$

dla rzeczywistej średniej $\mu_1 = 0,97$, moc testu spadłaby poza dopuszczalne granice:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{1 - 0,97}{0,1/\sqrt{10}} - 2,33\right) \approx 0,08.$$



Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Zależność na moc testu:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + z_{\alpha}\right),$$

pozwała na szacowanie minimalnej liczebności próby dla określonej mocy testu. Wiedząc, że $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, liczebność próby n otrzymuje się po przekształceniach:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha}\right) \rightarrow \Phi^{-1}(1 - \beta) = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha} \rightarrow z_{1-\beta} - z_{\alpha} = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\frac{(z_{1-\beta} - z_{\alpha})\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_0 - \mu_1 \rightarrow n = \left(\frac{(z_{1-\beta} - z_{\alpha})\sigma}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2,$$

$$z_{\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha), \quad z_{1-\alpha} = -z_{\alpha}, \quad z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1 - \beta).$$

Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Założmy, że należy wyznaczyć minimalną liczebność próby, która umożliwi wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0,97$ z mocą $(1 - \beta) = 0,8$.

Korzystając z zależności:

$$n = \left(\frac{(z_{1-\beta} - z_\alpha)}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2 \sigma^2,$$

wyznacza się kolejno:

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(0,01) \approx -2,32, \quad z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0,8) \approx 0,84,$$

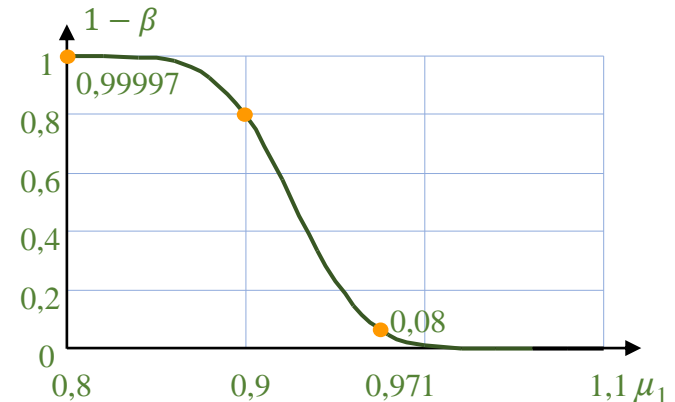
$$n = \left(\frac{0,84 + 2,32}{0,97 - 1} \right)^2 0,1^2 \approx 111,51.$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że wykrycie spadku ilości wody w napełnianych butelkach z nominalnej $\mu_0 = 1$ do $\mu_1 = 0,97$ będzie możliwe z mocą o $(1 - \beta) = 0,8$ o ile do testu zostanie wykorzystanych co najmniej 112 butelek wody.

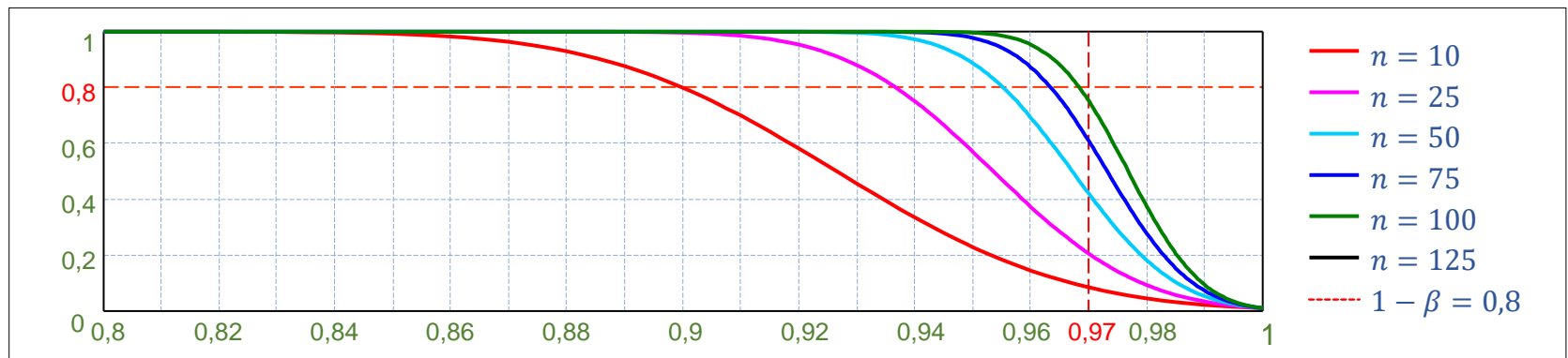
Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Zmiany mocy testu w zależności od rzeczywistej wartości średniej przedstawiane są na wykresach mocy:

Im większa odległość rzeczywistej średniej od weryfikowanej wartości tym większa moc testu.



Wykreślenie krzywych dla różnych rozmiarów próby pozwala na oszacowanie minimalnej liczebności próby z wykresu, np. wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0,97$ z mocą $(1 - \beta) = 0,8$ umożliwi test wykonany dla próby o liczebności $n \approx 112$.



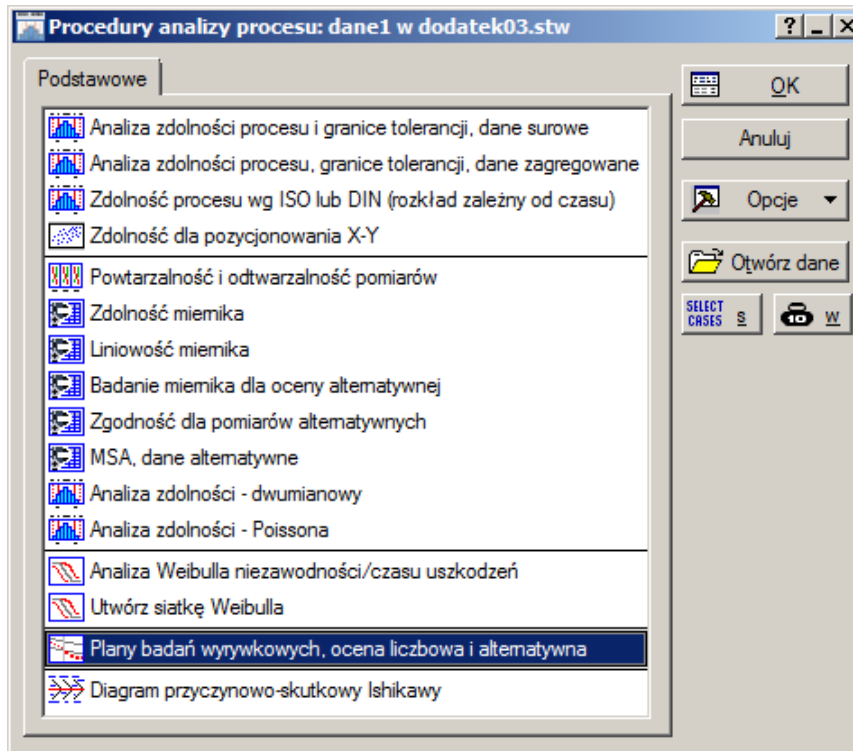
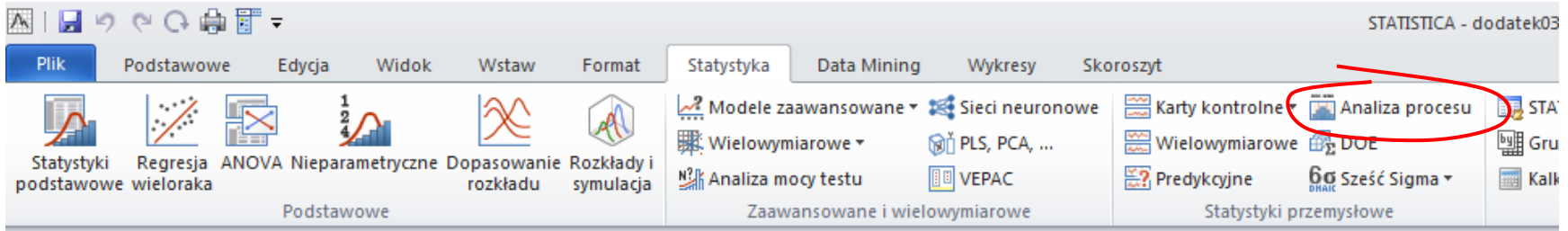
Hipoteza o średniej (znane σ) – moc i rozmiar próby

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

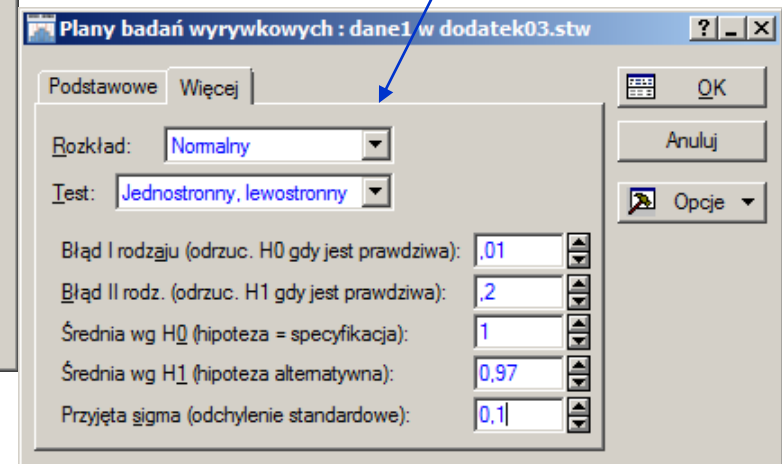
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Test	Moc testu i minimalna liczebność próby	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha), z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2), z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1 - \beta), \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}.$		

STATISTICA – moc testu statystycznego



parametry z przykładu kontrola procesu napełniania butelek wodą



STATISTICA – moc testu statystycznego

Wyniki planów badania: dane1 w dodatek03.stw

Rozkład: Normalny
 błąd I rodz. (odrzućenie H0 gdy jest prawdziwa): ,01000
 błąd II r. (odrzućenie H1 gdy jest prawdziwa): ,20000
 Średnia hipotet.: dla H0: 1,00000 (hipoteza lub specyfikacja)
 dla H1: ,970000 (hipoteza alternatywna)
 Przyjęta sigma (odchylenie stand.): ,100000
 Kryterium testu: jednostronne (lews.) kryterium

Plan badań wyrwykowych | Sekwencyjny plan badania

Podsumowanie: Wyniki jedno- i wielostopniowych planów badania

Liczność próbek: 1 2 (111,51; obliczono z błędu II rodzaju)

Funkcja mocy

Określ wielkość próbek: dane...

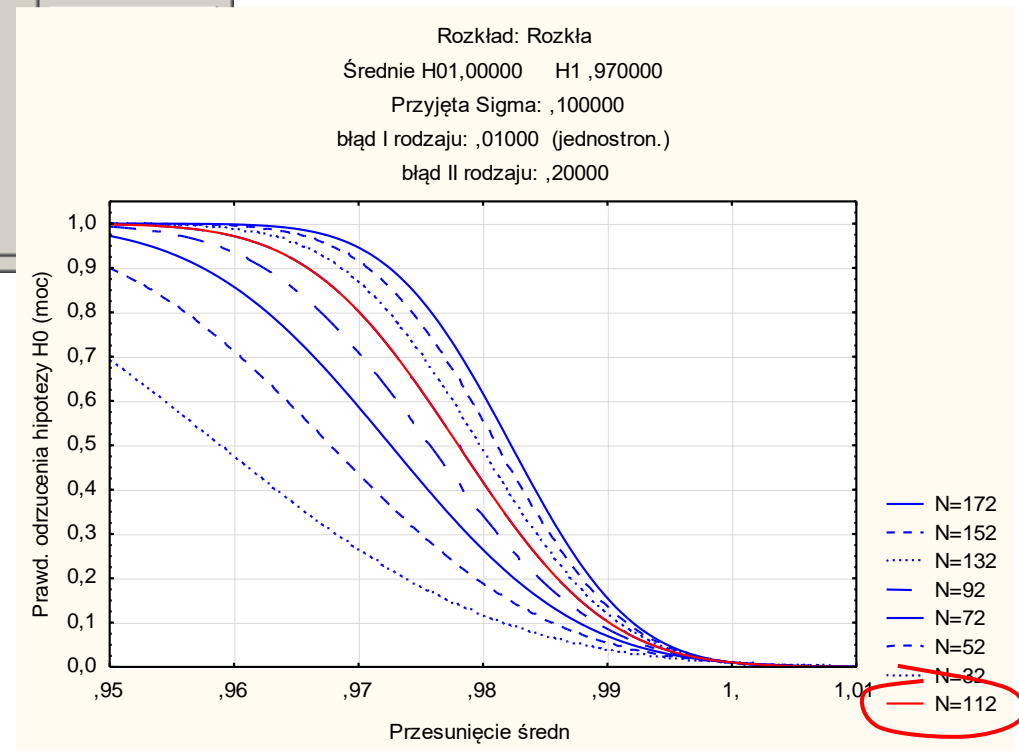
Liczności próbek: 10

OK Anuluj

dodatek03.stw* - Plan badań wyr...

Estymow.	Plan badań wyr	Wartość
Rozkład	Normalny	
Sigma		,100000
N (obliczone z beta)		112 (111,51)
Średnia H0		1,00000
Średnia H1		,970000
błąd I r. (jednostron.)		,01000
błąd II r.		,20000
Dolna granica ufn.H0		,977970
Górna granica ufn.H0		1,02203

Plan badań wyrwyk. (dane 1 w dodatek03.stw)



STATISTICA – moc testu statystycznego

Wyniki planów badania: dane1 w dodatek03.stw

Rozkład: Normalny
 błąd I rodz. (odrzućenie H0 gdy jest prawdziwa): ,01000
 błąd II r. (odrzućenie H1 gdy jest prawdziwa): ,20000
 Średnia hipotet.: dla H0: 1,00000 (hipoteza lub specyfikacja)
 dla H1: ,970000 (hipoteza alternatywna)
 Przyjęta sigma (odchylenie stand.): ,100000
 Kryterium testu: jednostronne (lewos.) kryterium

Plan badań wyrwykowych | Sekwencyjny plan badania

Podsumowanie: Wyniki jedno- i wielostopniowych planów badania

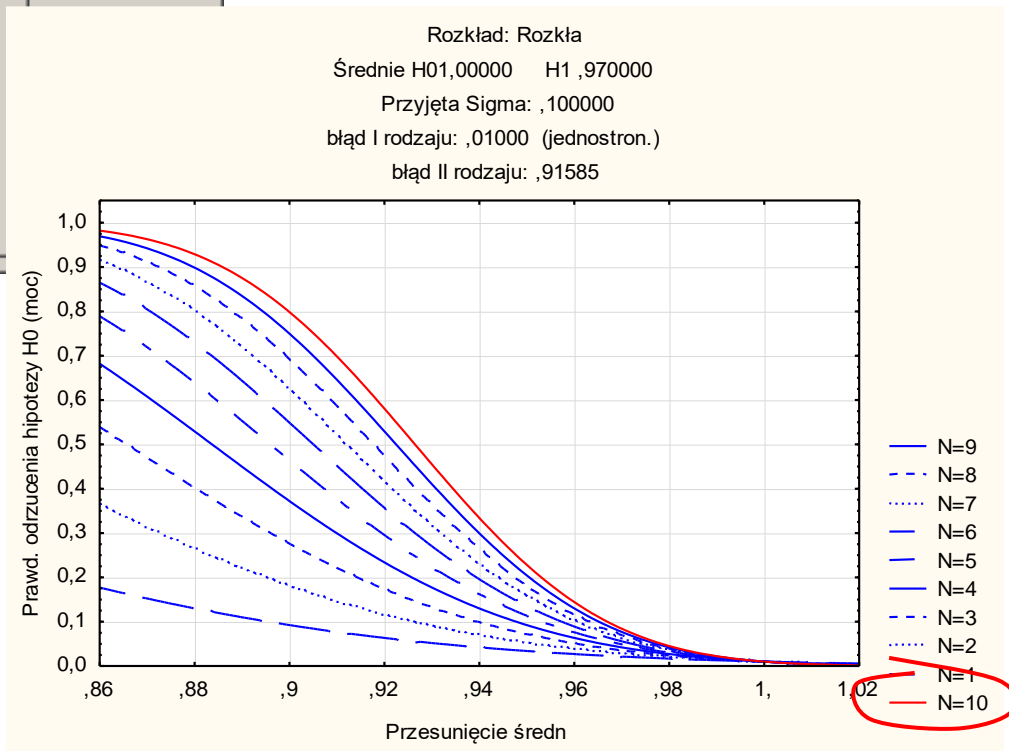
Licznosc próbeki | Użytkownika: 10,000 | Wynikowe β (Beta): 91585

Funkcja mocy

dodatek03.stw* - Plan badań wyr...

Estymow.	Plan badań wyr	Wartość
Rozkład	Normalny	
Sigma		,100000
N (użytkownika)		10 (10,000)
Średnia H0		1,00000
Średnia H1		,970000
błąd I r. (jednostron.)		,01000
błąd II r.		,91585
Dolna granica ufn.H		
Górna granica ufn.H		

$\beta = 0,91585$
 \downarrow
 $1 - \beta = 0,0841$

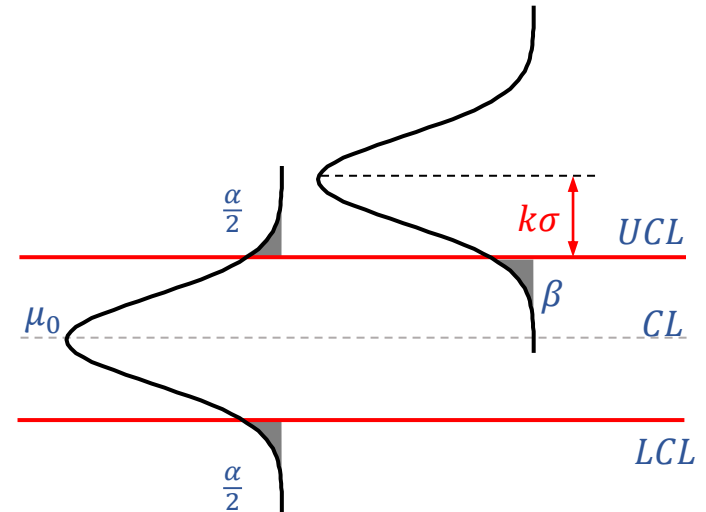


Karta \bar{X} a test istotności dla średniej

Założenia

Wyznaczone zostały parametry karty \bar{X} , tzn.:

- średnia procesu μ_0
- odchylenie standardowe σ
- położenie linii kontrolnych UCL i LCL



Idea karty kontrolnej jest podobna do idei testu statystycznego:

- analiza próbki na karcie sprowadza się do przeprowadzenia testu istotności dla wartości średniej w k -tej próbce:
 - H_0 : średnia nie uległa zmianie ($\mu = \mu_0$), H_1 : średnia uległa zmianie ($\mu \neq \mu_0$)
- do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

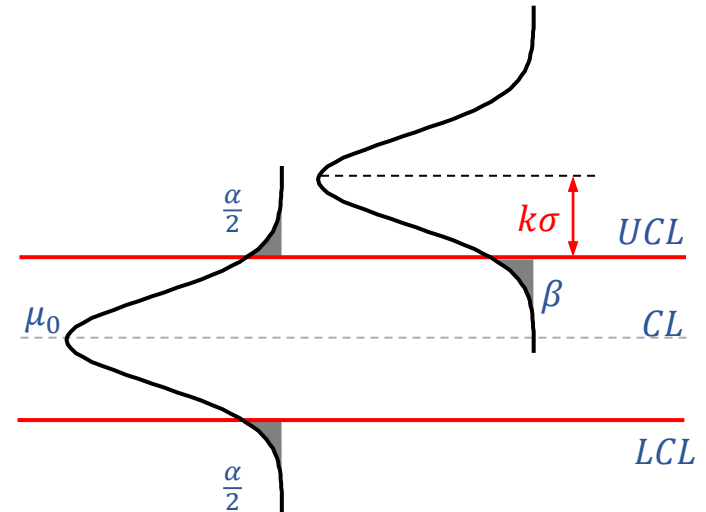
$$z_n = \frac{\bar{x}_k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- hipoteza H_0 jest odrzucana gdy średnia z próbki znajdzie się w obszarze krytycznym, tzn. w przypadku karty kontrolnej poza liniami UCL i LCL

Karta \bar{X} a błąd I rodzaju

Założenia

- $UCL = \mu_0 + L\sigma_{\bar{x}}$
- $LCL = \mu_0 - L\sigma_{\bar{x}}$



Prawdopodobieństwo przekroczenia LCL wynosi

$$\alpha/2 = F_{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_{\bar{x}})}(\mu_0 - L\sigma_{\bar{x}}) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - L\sigma_{\bar{x}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi(-L).$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu (przekroczenie LCL lub UCL)

$$\alpha = 2\Phi(-L).$$

Dla domyślnych linii kontrolnych dla $L = 3$, prawdopodobieństwo błędu I rodzaju wynosi

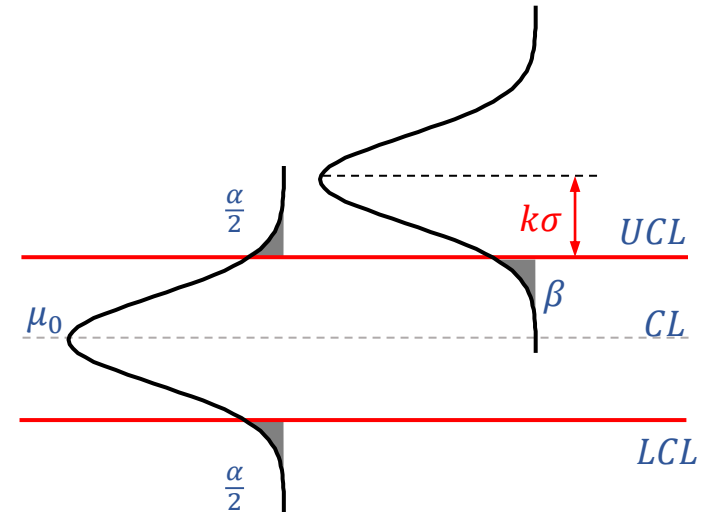
$$\alpha = 2\Phi(-L) = 2\Phi(-3) = 0,0027.$$

Karta \bar{X} a błąd II rodzaju

Założenia

- proces uległ przesunięciu, jego średnia wynosi:

$$\mu_1 = \mu_0 + k \sigma$$



Moc testu przeprowadzanego przy pomocy karty wyznacza się z zależności:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = L.$$

Moc testu wynosi więc

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_0 - k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} - L\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0 + k\sigma - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - L\right) = \Phi(-L - k\sqrt{n}) + \Phi(-L + k\sqrt{n}).$$

Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju

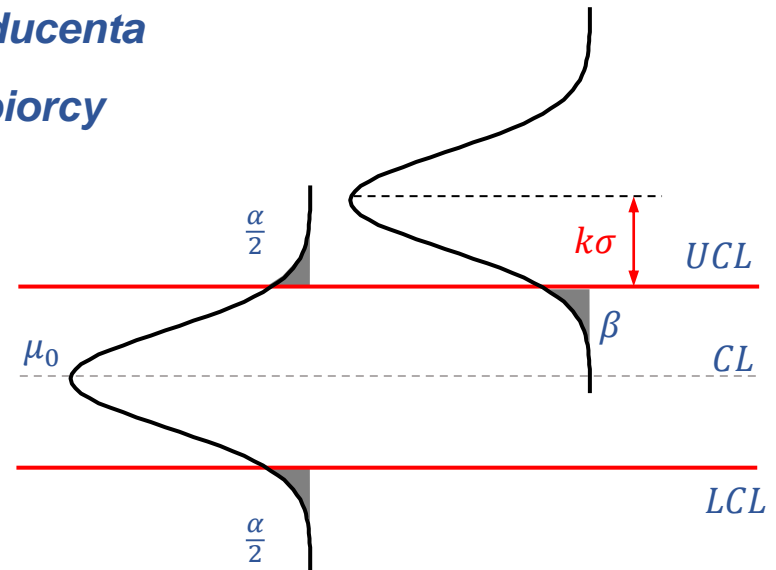
$$\beta = 1 - \Phi(-L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L + k\sqrt{n}) = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}).$$

Karty kontrolne a błędy I i II rodzaju

W statystycznej kontroli jakości:

błąd I rodzaju jest nazywany *ryzykiem producenta*

błąd II rodzaju jest nazywany *ryzykiem odbiorcy*



Ryzyko producenta związane jest z kosztem poszukiwania przyczyny nieistniejącego problemu. Wprowadzona ewentualnie korekta nie zmieni dalszej analizy procesu, błąd ten nie jest więc niebezpieczny.

Błąd II rodzaju jest poważniejszy w skutkach – polega na przeoczeniu niestabilności procesu. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego błędu (β) oznacza, że karta kontrolna nie jest w stanie wykryć znaczącej zmiany procesu bezpośrednio po jej wystąpieniu. *Moc testu* ($1 - \beta$) określa szanse na wykrycie tej zmiany bezpośrednio po jej wystąpieniu.

Karta \bar{X} a błąd II rodzaju i krzywe OC

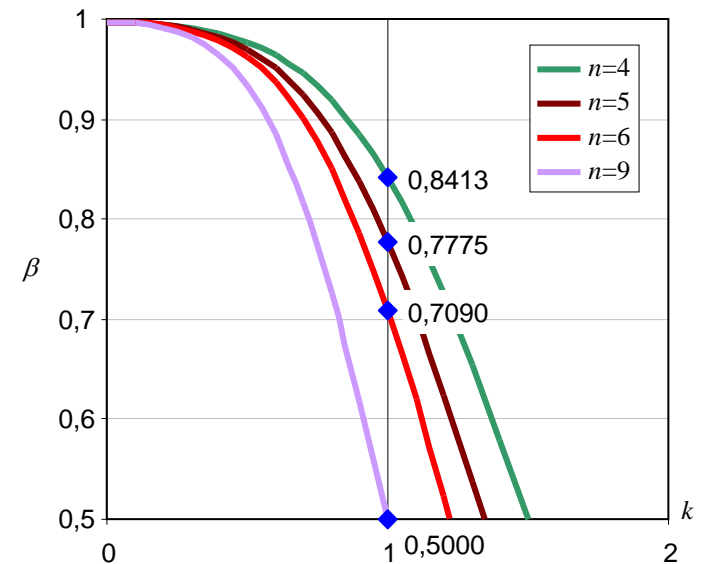
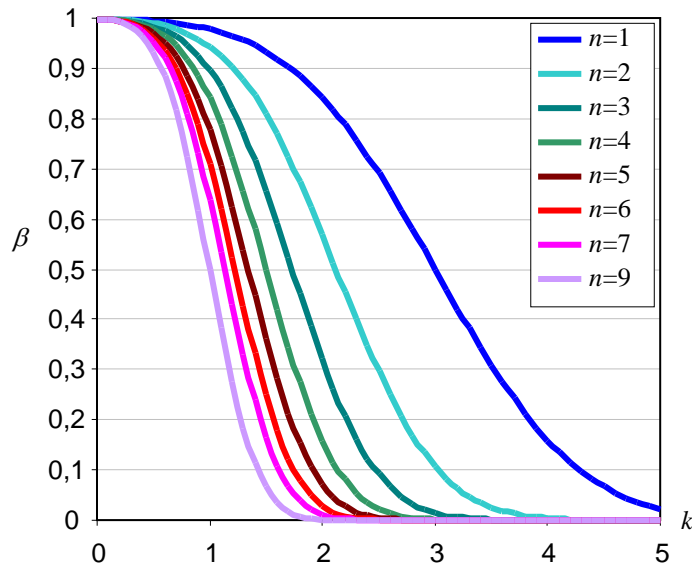
Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju dla karty \bar{X} wynosi:

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}).$$

Dla procesu przesuniętego o $k = 1$ otrzymuje się następujące prawdopodobieństwa β :

$$\begin{aligned} \beta_{(n=4)} &= \Phi(3 - \sqrt{4}) - \Phi(-3 - \sqrt{4}) \approx 0,8413 & \beta_{(n=5)} &= \Phi(3 - \sqrt{5}) - \Phi(-3 - \sqrt{5}) \approx 0,7775, \\ \beta_{(n=6)} &= \Phi(3 - \sqrt{6}) - \Phi(-3 - \sqrt{6}) \approx 0,709, & \beta_{(n=9)} &= \Phi(3 - \sqrt{9}) - \Phi(-3 - \sqrt{9}) = 0,5. \end{aligned}$$

W przypadku karty \bar{X} zależność błędu II rodzaju od wielkości przesunięcia procesu jest przedstawiana za pomocą **krzywych operacyjno charakterystycznych OC** (ang. *operating characteristic curve*) wykreślanych dla różnych rozmiarów próbek.



STATISTICA – moc testu statystycznego

Plany badań wyrwykowych : dane1 w dodatek03.stw

Podstawowe Więcej

Rozkład: **Normalny**

Test: **Dwustronny**

Błąd I rodzaju (odrzuć. H0 gdy jest prawdziwa): **.0027**

Błąd II rodz. (odrzuć. H1 gdy jest prawdziwa): **.50**

Średnia wg H0 (hipoteza = specyfikacja): **0**

Średnia wg H1 (hipoteza alternatywna): **1**

Przyjęta sigma (odchylenie standardowe): **1**

OK Anuluj Opcje

Wyniki planów badania: dane1 w dodatek03.stw

Rozkład: **Normalny**

błąd I rodz. (odrzućenie H0 gdy jest prawdziwa): **.00270**

błąd II r. (odrzućenie H1 gdy jest prawdziwa): **.50000**

Średnia hipotet.: dla H0: **0,00000** (hipoteza lub specyfikacja)
dla H1: **1,00000** (hipoteza alternatywna)

Przyjęta sigma (odchylenie stand.): **1,00000**

Kryterium testu: **dwustronny**

Plan badań wyrwykowych Sekwencyjny plan badania

Podsumowanie: Wyniki jedno- i wielostopniowych planów badania

Liczność próbek: **9 (8,9999; obliczono z błędu II rodzaju)**

Funkcja mocy

Anuluj Opcje SELECT CASES W

Określ wielkość próbek: dane...

Liczności próbek: **4**

OK Anuluj

Określ wielkość próbek: dane...

Liczności próbek: **5**

OK Anuluj

Określ wielkość próbek: dane...

Liczności próbek: **6**

OK Anuluj

dodatek03.stw* - Plan badań w...

Estymow.	Plan badań	Wartość
Rozkład	Normalny	
Sigma		1,00000
N (użytkownika)		4 (4,0000)
Średnia H0		0,00000
Średnia H1		1,00000
błąd I r. (dwustron.)		.00270
błąd II r.		.84134

Plan badań wyrwyk. (dane1 w dodatek03.stw)

dodatek03.stw* - Plan badań w...

Estymow.	Plan badań	Wartość
Rozkład	Normalny	
Sigma		1,00000
N (użytkownika)		5 (5,0000)
Średnia H0		0,00000
Średnia H1		1,00000
błąd I r. (dwustron.)		.00270
błąd II r.		.77754

Plan badań wyrwyk. (dane1 w dodatek03.stw)

dodatek03.stw* - Plan badań w...

Estymow.	Plan badań	Wartość
Rozkład	Normalny	
Sigma		1,00000
N (użytkownika)		6 (6,0000)
Średnia H0		0,00000
Średnia H1		1,00000
błąd I r. (dwustron.)		.00270
błąd II r.		.70901

Plan badań wyrwyk. (dane1 w dodatek03.stw)

Karty kontrolne a błąd II rodzaju

Szybkość i koszt wykrywania zmian procesu na karcie kontrolnej:

- zwiększanie rozmiaru próbki prowadzi do zmniejszania błędu II rodzaju (wskazują na to obliczone wielkości błędów β i wykresy OC),
- im większe próbki i większa częstotliwość ich pobierania tym szybciej można wykryć nieprawidłowości,
- zwiększanie liczby kontroli pociąga za sobą dodatkowe koszty.

Wniosek

ustalenie rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek wymaga kompromisu pomiędzy kosztami kontroli a ryzykiem, że część wyprodukowanych wyrobów nie będzie spełniać wymogów specyfikacji.

*koszt y
kontroli*



*ryzyko
wystąpienia
niezgodnych*

Karty kontrolne i wskaźniki *ARL*

Wskaźniki *ARL* definiują **średnią długości serii** (*ang. average run length*) albo inaczej średnią liczbę próbek, po których wystąpi sygnał o przekroczeniu linii kontrolnej. Wskaźniki *ARL* ułatwiają dobór rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek.

Wskaźnik ARL_0 to średnia liczba próbek, po której **proces statystycznie uregulowany** wygeneruje próbkę odstającą.

Wskaźnik ARL_1 to średnia liczba próbek, po której **proces statystycznie rozregulowany** wygeneruje próbkę odstającą.

Wskaźniki *ARL* wyznaczają **średnie liczby próbek**, po których na karcie powinien pojawić się sygnał o rozregulowaniu. Dodatkowo, może być również ważne wyznaczenie **średniej liczby pomiarów**, po których na karcie pojawia się próbka odstająca:

$$I = nARL.$$

Karta \bar{X} – wskaźnik ARL_0

ARL_0 – średnia liczba próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie uregulowanego.

Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki. W tabeli zestawione zostały prawdopodobieństwa dla różnych wartości l :

l	Opis	Prawdop.
$l = 1$	pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną	α
$l = 2$	pierwsza próbka w granicach a druga poza granicami	$(1 - \alpha)\alpha$
$l = 3$	pierwsze dwie próbki w granicach a trzecia poza granicami	$(1 - \alpha)^2\alpha$
$l = k$	pierwsze $(k - 1)$ próbek w granicach a k -ta próbka poza granicami	$(1 - \alpha)^{k-1}\alpha$
\vdots	\vdots	\vdots

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu zmiennej l :

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(l = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \alpha)^{k-1}\alpha = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - \alpha)^{k-1} = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \right) = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -\alpha \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) = 1/\alpha$$

Ostatecznie, wskaźnik ARL_0 wynosi więc: $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$.

Karta \bar{X} – wskaźnik ARL_1

ARL_1 – średnia liczba próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie rozregulowanego.

Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki. W tabeli zestawione zostały prawdopodobieństwa dla różnych wartości l :

l	Opis	Prawdop.
$l = 1$	pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną	$1 - \beta$
$l = 2$	pierwsza próbka w granicach a druga poza granicami	$\beta(1 - \beta)$
$l = 3$	pierwsze dwie próbki w granicach a trzecia poza granicami	$\beta^2 (1 - \beta)$
$l = k$	pierwsze $(k - 1)$ próbek w granicach a k -ta próbka poza granicami	$\beta^k (1 - \beta)$
\vdots	\vdots	\vdots

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie rozregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu zmiennej l :

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta^k(1 - \beta) = (1 - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} k\beta^{k-1} = (1 - \beta) \frac{d}{d\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \right) = (1 - \beta) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{1 - \beta} \right) = (1 - \beta) \frac{1}{(1 - \beta)^2} = 1/(1 - \beta)$$

Ostatecznie, wskaźnik ARL_1 wynosi więc: $ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$.

Karta \bar{X} – wskaźniki: ARL_0 , ARL_1 oraz I

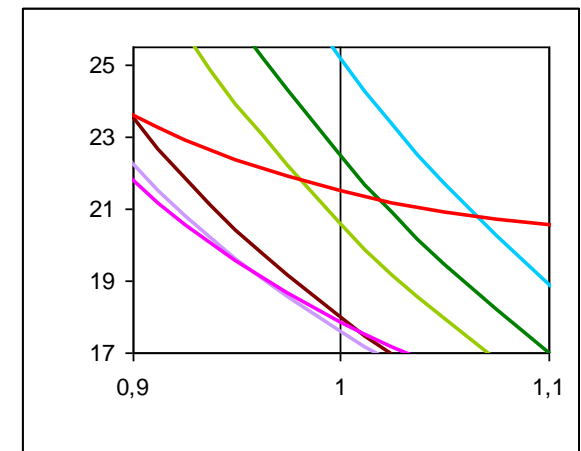
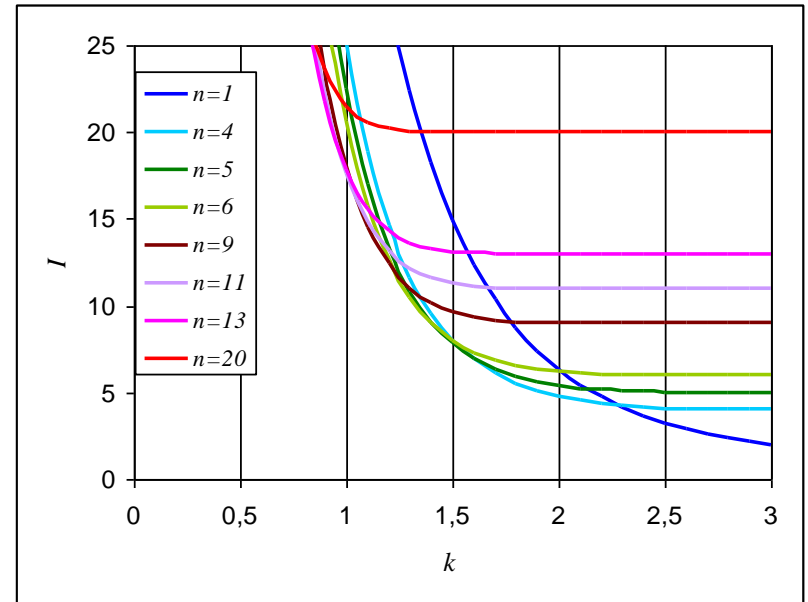
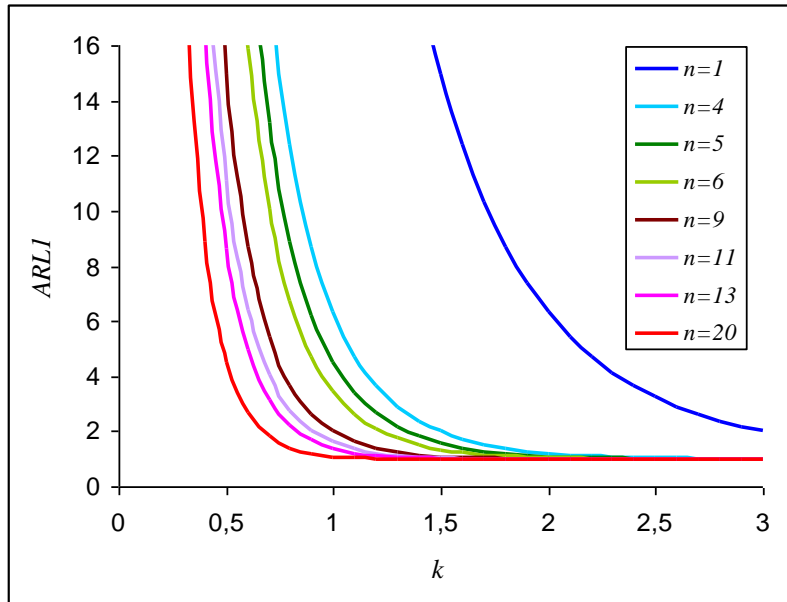
Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu dla karty \bar{X} o domyślnych liniach kontrolnych wynosi $\alpha = 0,0027$, średnia liczba próbek, po której pojawi się próbka odstająca wyniesie więc:

$$ARL_0 = 1/\alpha \approx 370.$$

Zakładając, że proces uległ przesunięciu o $k = 1$, średnia liczba próbek i średnia liczba pomiarów, po której pojawi się próbka odstająca wyniosą w zależności od liczebności próbki:

n	β	ARL_1	$I = n ARL_1$
4	0,8413	$1/(1 - 0,8413) \approx 6,3012$	25,2
5	0,7775	$1/(1 - 0,7775) \approx 4,4944$	22,5
6	0,7090	$1/(1 - 0,7090) \approx 3,4364$	20,6
9	0,5	$1/(1 - 0,5) = 2$	18
11	0,3758	$1/(1 - 0,3758) \approx 1,602$	17,6
13	0,2724	$1/(1 - 0,2724) \approx 1,3744$	17,9
20	0,0705	$1/(1 - 0,0705) \approx 1,0758$	21,5

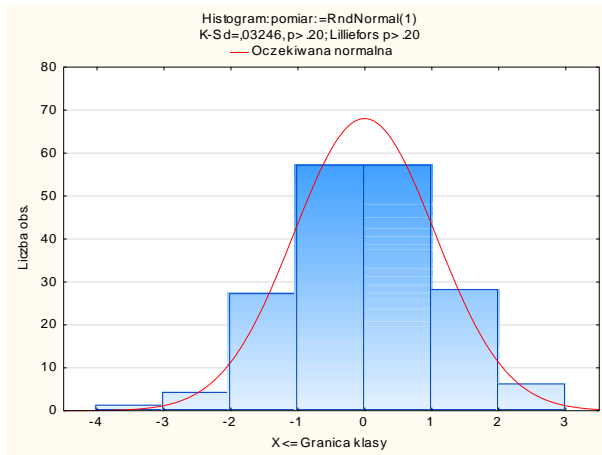
Karta \bar{X} – wskaźniki: ARL_1 oraz I



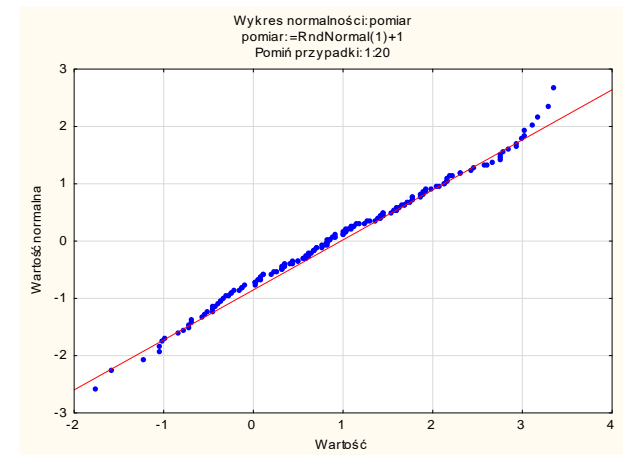
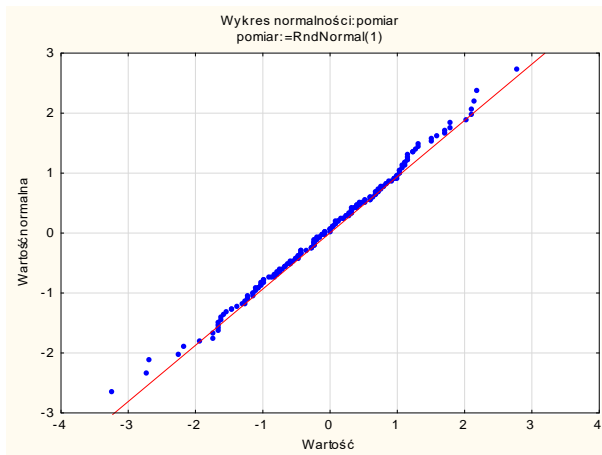
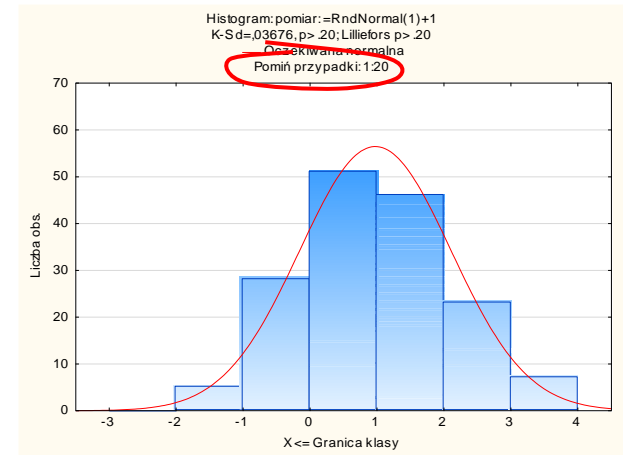
Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

Dane1 wylosowano z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$, dane2 z wyjątkiem pierwszych 20 (wylosowanych z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$) pochodzą z rozkładu przesuniętego o $+1\sigma$, tzn.: $\mathcal{N}(1, 1)$.

dane1



dane2



Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

konfiguracja karty (dane1), $n = 4$

Definiowanie zmiennych dla kart X-średnie i R: dane1 w statistica03_2. ? _ - X

Podstawowe | Zbiory | Etykiety, przyczyny, działania

Dane są surowe (średnie itp. będą z nich obliczane) Dane są zagregowane (zawierają średnie itp.)

Zmienne

Pomiary (obserwacje): pomiar

Identyfikatory próbek (kody): brak

Identyfikatory części (kody): brak

Stała liczność próbek: 4

Stała liczba próbek na część: 2

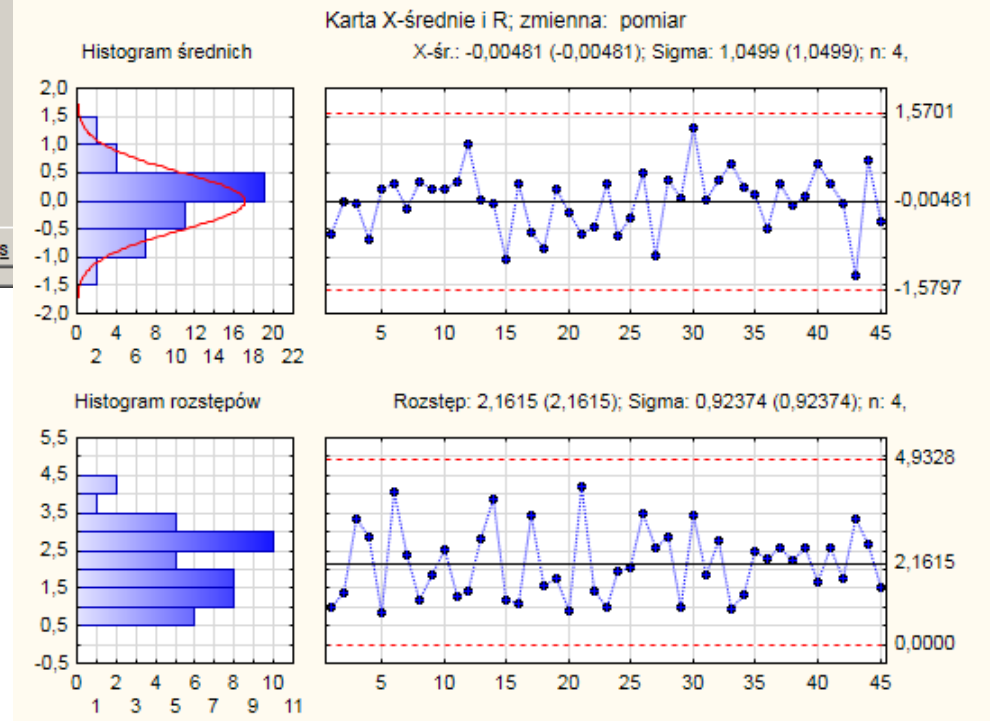
Minimalna liczba pomiarów na próbkę: 2

OK

Anuluj

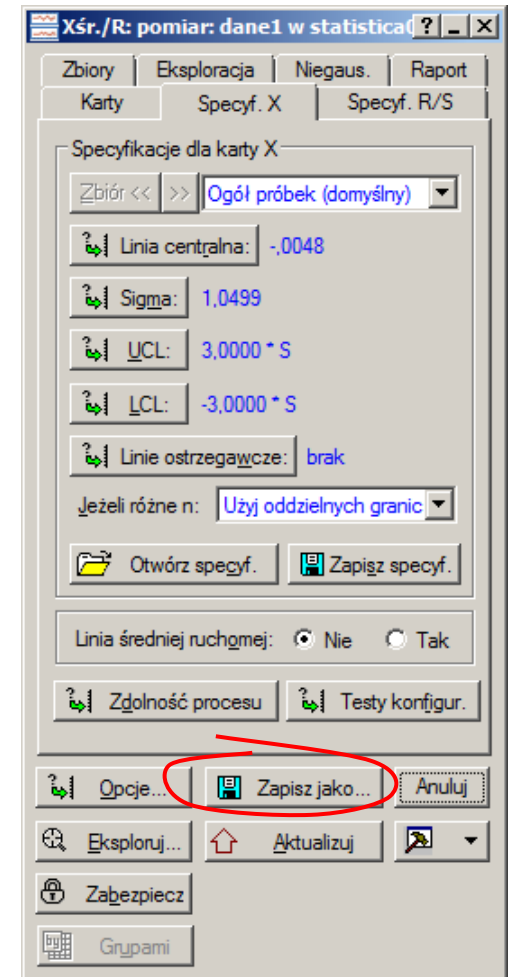
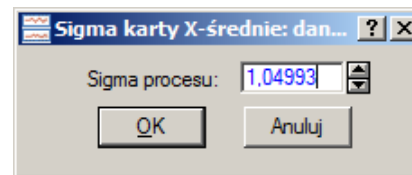
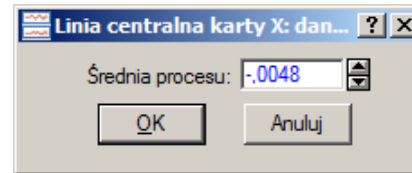
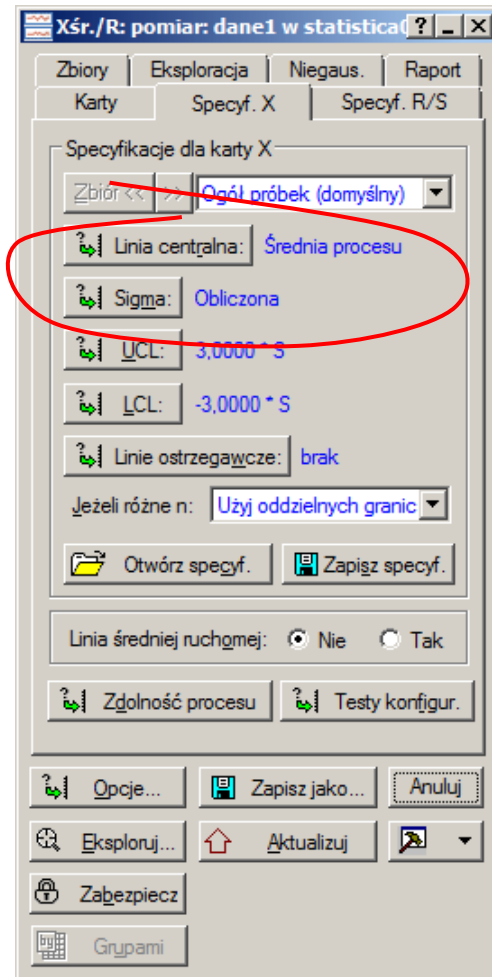
Opcje

Czytanie danych surowych. Program oczekuje serii wyników pomiarów.

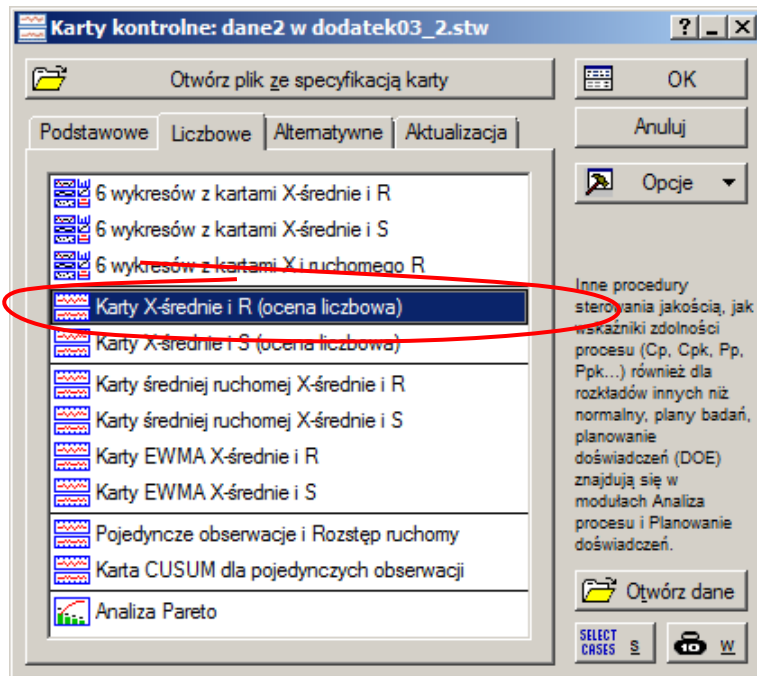


Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

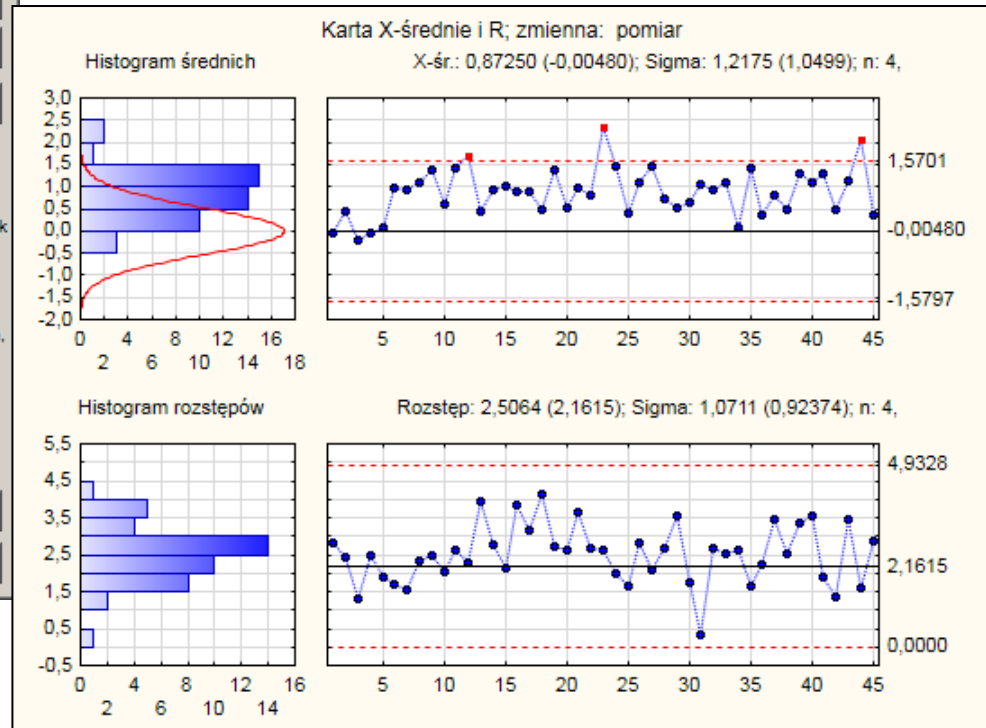
konfiguracja karty (dane1), $n = 4$



Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu



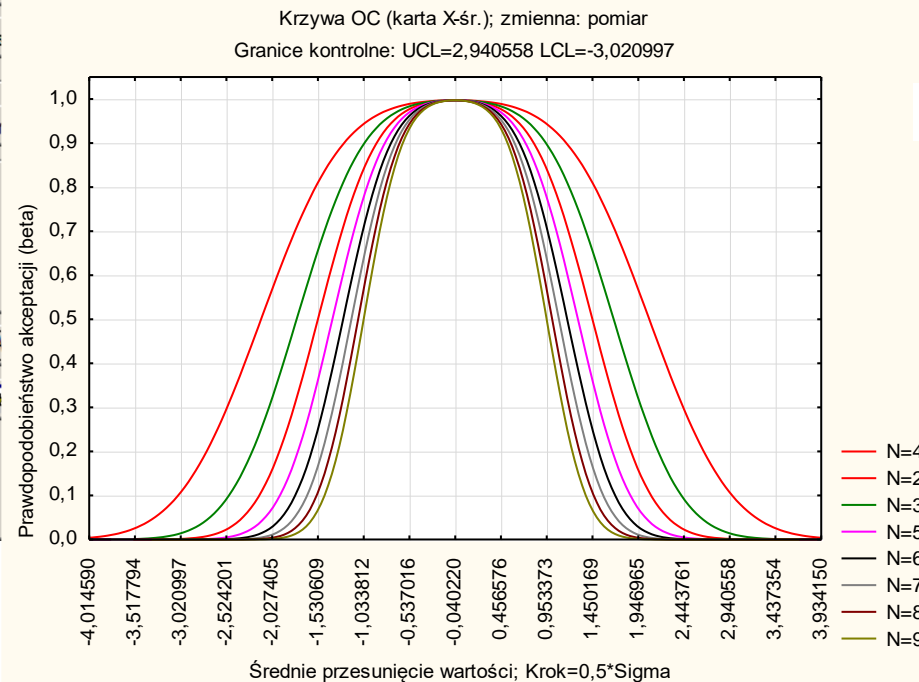
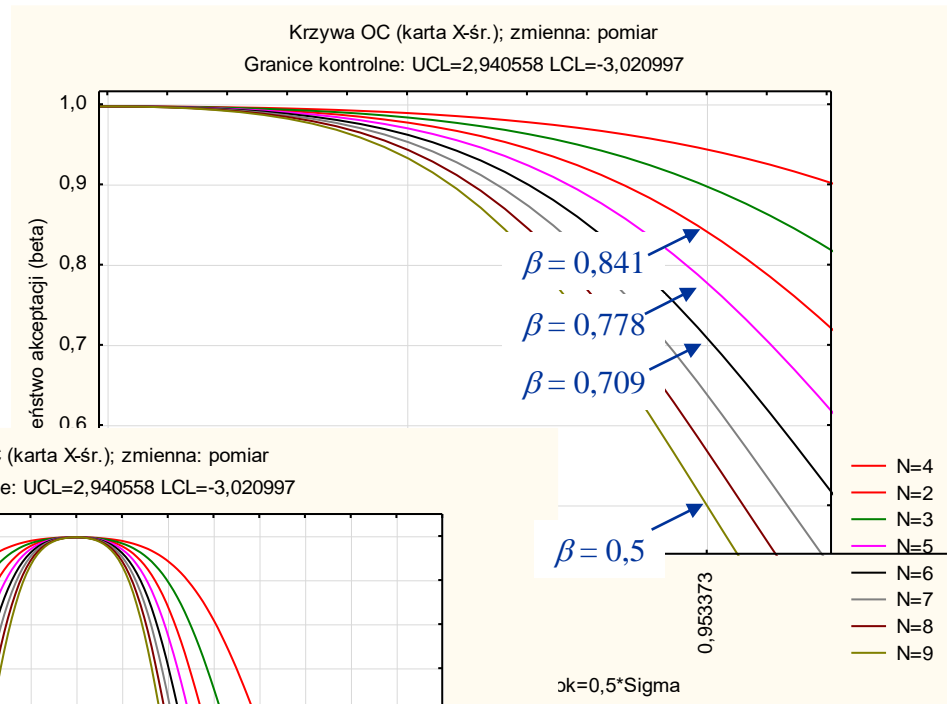
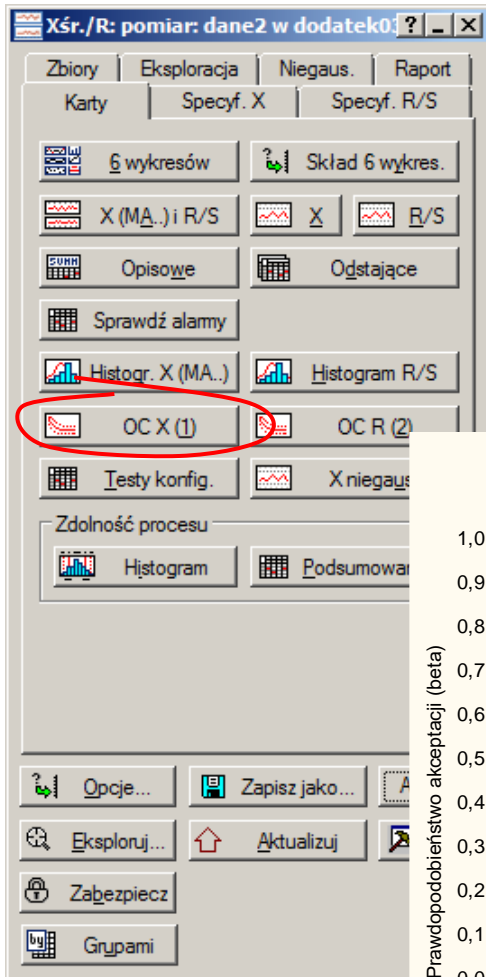
monitorowanie procesu (dane2), $n = 4$



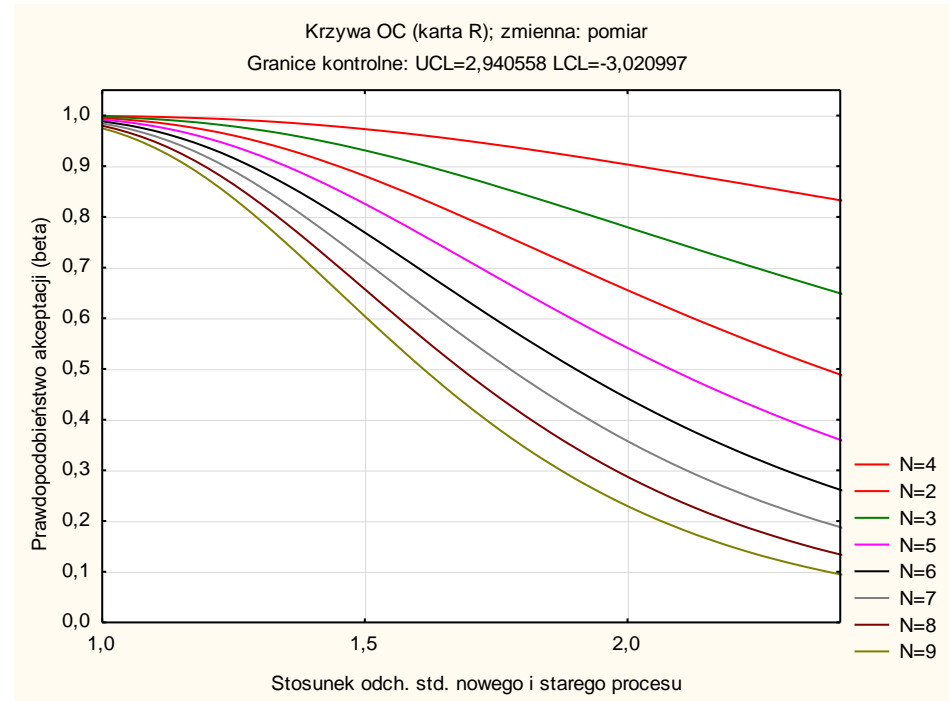
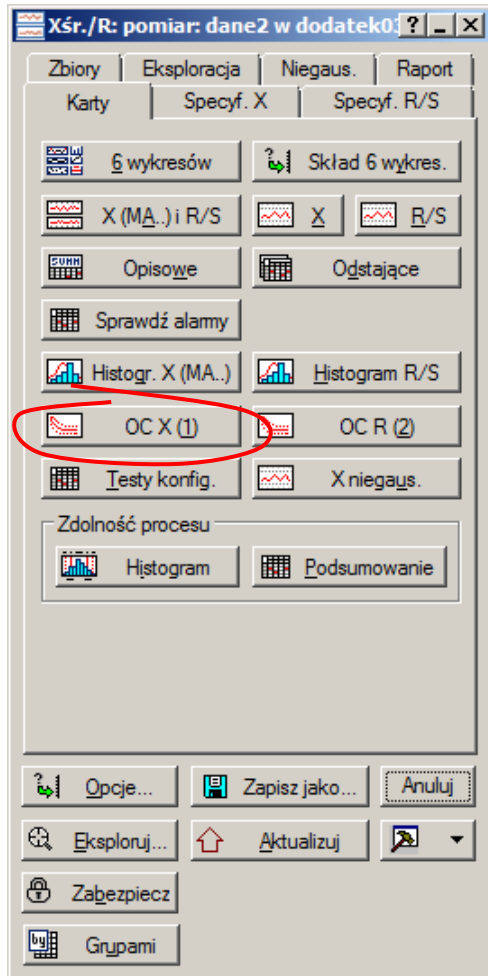
Analiza wyników:

- sygnał o rozregulowaniu (pierwsza próbka poza UCL) pojawia się w próbce 12,
- zmiana procesu nastąpiła w próbce 6 (20 pierwszych wyników w arkuszu dane2 pochodzi z $\mathcal{N}(0, 1)$),
- od czasu zmiany do jej wykrycia przybyło na karcie 7 próbek,
- wskaźnik ARL_1 dla karty \bar{X} i przesunięcia $k = 1$ wynosi $ARL_1 = 6,3012$,
- rezultat jest zgodny z oczekiwaniami.

STATISTICA – krzywe OC dla karty \bar{X}



STATISTICA – karty kontrolne (krzywe OC)



Krzywe OC karty *R* pokazują wartość błędu β w funkcji zmiany odchylenia standardowego (stosunek odchylenia standardowego nowego do starego).

Z wykresu można odczytać np., że dla $n = 4$:

- jeśli σ zwiększy się 1,5 raza to β wyniesie 0,88 ($ARL_1 \approx 8,33$),
- jeśli σ zwiększy się 2 razy to β wyniesie 0,65, ($ARL_1 \approx 2,86$).