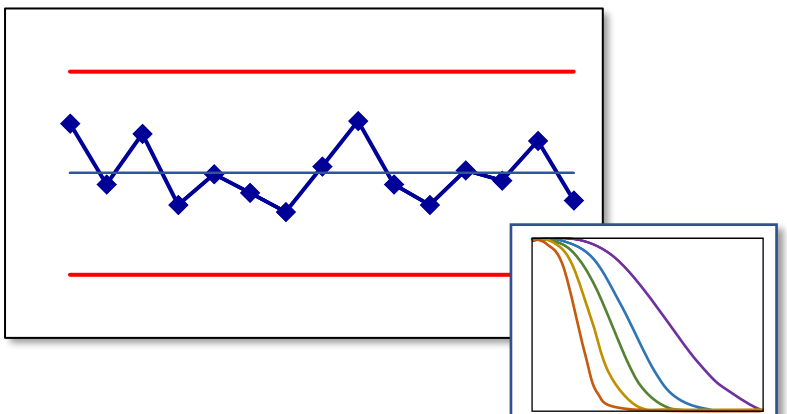
Sterowanie jakością

Karty kontrolne
Krzywe OC
ARL_0, ARL_1



Materiały
http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/

Statystyka matematyczna – błąd I i II rodzaju

W procesie weryfikacji hipotezy statystycznej można popełnić:

- *błąd I rodzaju* polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej w sytuacji gdy jest ona prawdziwa (*poziom istotności* α to prawdopodobieństwo popełnienia *błędu I rodzaju*),
- *błąd II rodzaju* polegający na nieodrzuceniu hipotezy zerowej, która jest w rzeczywistości fałszywa (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* oznaczane jest jako β).

Hipoteza zerowa (w rzeczywistości)	**Decyzja**	
	nie odrzucać H_0	odrzucić H_1
prawdziwa	*decyzja poprawna*	błąd I rodzaju α
fałszywa	błąd II rodzaju β	*decyzja poprawna*

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu statystycznego to prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie **poprawnej decyzji** w przypadku gdy **hipoteza zerowa jest fałszywa** (tzn. odrzucenie hipotezy na rzecz hipotezy alternatywnej), moc testu opisuje więc zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych.

Istnieje ścisła zależność pomiędzy mocą testu a liczebnością próby:

im większa liczebności próby → tym większa moc testu.

Przyjmuje się, że moc testu powinna wynosić co najmniej 0,8, tzn. prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju* nie może być wyższe niż 0,2, wartości te pozwalają na wykrywanie znaczących odchyleń od wartości postulowanych w hipotezie zerowej.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Przedmiotem kontroli jest proces napełniania butelek wodą. Zakładając, że rozkład ilości wody jest rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym $\sigma = 0{,}1$, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ należy sprawdzić czy istnieją dowody na to, że ilość wody w napełnianych butelkach jest mniejsza niż $\mu_0 = 1$.

W zadaniu należy więc zweryfikować *hipotezę zerową*

$$H_0: \mu_0 = 1,$$

wobec *hipotezy alternatywnej*

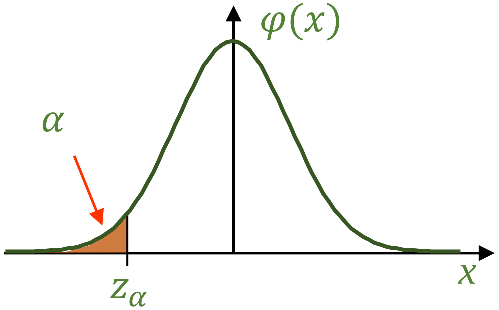
$$H_1: \mu_0 < 1,$$

Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ i do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest standaryzowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}},$$

$\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Obszar krytyczny wyznacza się jako:

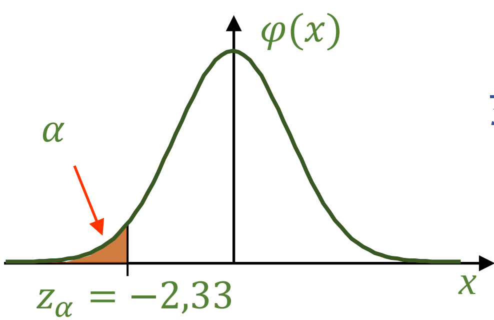


$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(0{,}01) \approx -2{,}33.$$

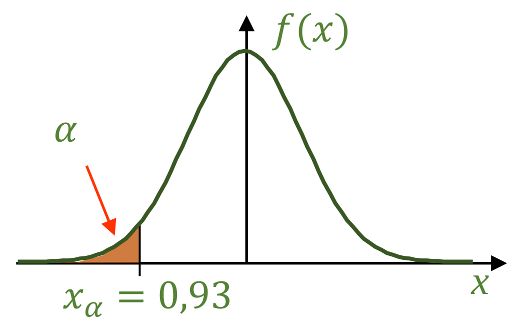
Otrzymana wartość graniczna jest wartością standaryzowaną (została obliczona z rozkładu normalnego standaryzowanego $\mathcal{N}(0,1)$). Rzeczywistą wartość graniczną otrzymuje się z zależności:

$$z_\alpha = \frac{\overline{x}_\alpha - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \quad \rightarrow \quad \overline{x}_\alpha = z_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0.$$

Zakładając, że do kontroli pobranych zostanie 10 butelek, średnia ilość wody w butelkach, która umożliwi odrzucenie hipotezy zerowej wynosi:



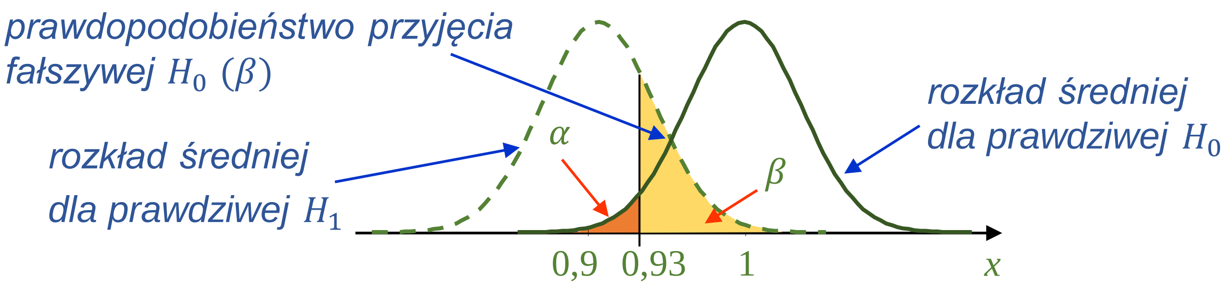
$$\overline{x}_\alpha = -2{,}33\frac{0{,}1}{\sqrt{10}} + 1 \approx 0{,}93$$



Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Moc testu opisuje zdolność testu do odrzucania hipotez fałszywych. Załóżmy, że :

$H_0\colon \mu_0 = 1$ (*fałszywa*) $\qquad H_1\colon \mu_1 = 0{,}9$ (*prawdziwa*)



Jeśli hipoteza H_0 jest fałszywa to test statystyczny dla wartości średnich:

- mniejszych od $0{,}93$ odrzuci hipotezę H_0 (decyzja poprawna)
- większych od $0{,}93$ nie odrzuci fałszywej hipotezy H_0 (decyzja błędna),

prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji (prawdopodobieństwo popełnienia *błędu II rodzaju β)* wyniesie w tym przypadku:

$$\beta = P(\bar{x} > \bar{x}_\alpha) = 1 - P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}93 - 0{,}9}{0{,}1/\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}2.$$

Moc testu (prawdopodobieństwo określające szanse na podjęcie poprawnej decyzji w przypadku gdy H_0 jest fałszywa) jest w tym przypadku akceptowalna i wynosi: $(1-\beta) = 0{,}8$.

Statystyka matematyczna – moc testu statystycznego

Dla rozważanego w przykładzie testu lewostronnego wzór na ***moc*** można po przekształceniach:

$$1-\beta = P(\bar{x} \le \bar{x}_\alpha) = F_{\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_{\bar{x}})}(\bar{x}_\alpha) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_\alpha - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{z_\alpha \sigma_{\bar{x}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}\right),$$

zapisać w postaci ogólnej jako:

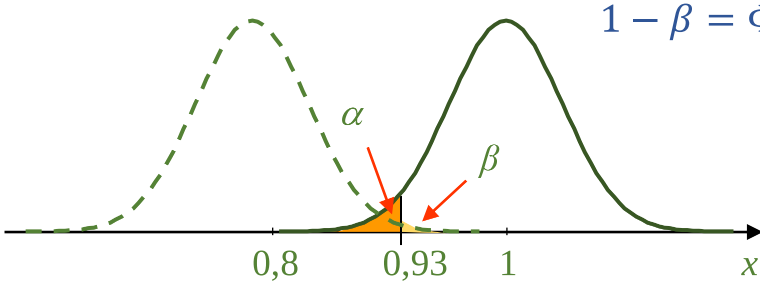
$$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} + z_\alpha\right), \qquad z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha).$$

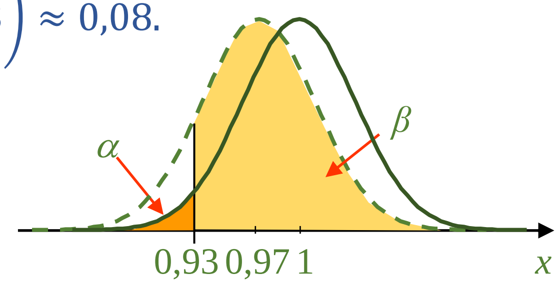
Oznacza to, że przy założeniu, że rzeczywista średnia $\mu_1 = 0{,}8$, moc testu ma wartość:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{1-0{,}8}{0{,}1/\sqrt{10}} - 2{,}33\right) \approx 1,$$

dla rzeczywistej średniej $\mu_1 = 0{,}97$, moc testu spadłaby poza dopuszczalne granice:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{1-0{,}97}{0{,}1/\sqrt{10}} - 2{,}33\right) \approx 0{,}08.$$





Zależność na moc testu:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}}+z_\alpha\right),$$

pozwala na szacowanie minimalnej liczebności próby dla określonej mocy testu. Wiedząc, że $\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}$, liczebność próby n otrzymuje się po przekształceniach:

$$1-\beta=\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_\alpha\right) \longrightarrow \Phi^{-1}(1-\beta)=\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}+z_\alpha \longrightarrow z_{1-\beta}-z_\alpha=\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\frac{(z_{1-\beta}-z_\alpha)\sigma}{\sqrt{n}}=\mu_0-\mu_1 \longrightarrow n=\left(\frac{(z_{1-\beta}-z_\alpha)\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2,$$

$$z_\alpha=\Phi^{-1}(\alpha),\ z_{1-\alpha}=-z_\alpha,\ z_{1-\beta}=\Phi^{-1}(1-\beta).$$

Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Załóżmy, że należy wyznaczyć minimalną liczebność próby, która umożliwi wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0{,}97$ z mocą $(1-\beta) = 0{,}8$.

Korzystając z zależności:

$$n = \left(\frac{(z_{1-\beta} - z_\alpha)}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2 \sigma^2,$$

wyznacza się kolejno:

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}01) \approx -2{,}32, \quad z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(0{,}8) \approx 0{,}84,$$

$$n = \left(\frac{0{,}84 + 2{,}32}{0{,}97 - 1}\right)^2 0{,}1^2 \approx 111{,}51.$$

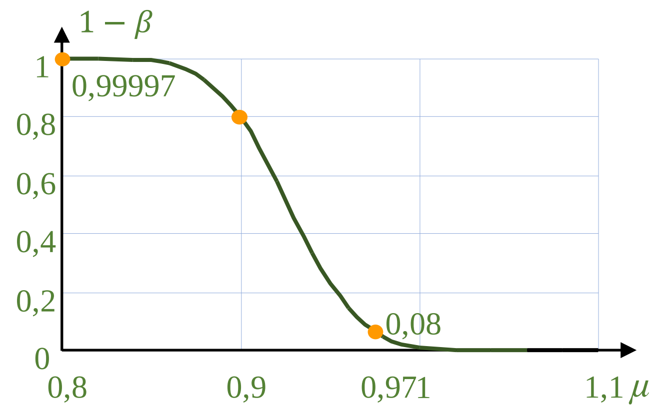
Z przeprowadzonej analizy wynika, że wykrycie spadku ilości wody w napełnianych butelkach z nominalnej $\mu_0 = 1$ do $\mu_1 = 0{,}97$ będzie możliwe z mocą o $(1-\beta) = 0{,}8$

o ile do testu zostanie wykorzystanych co najmniej 112 butelek wody.

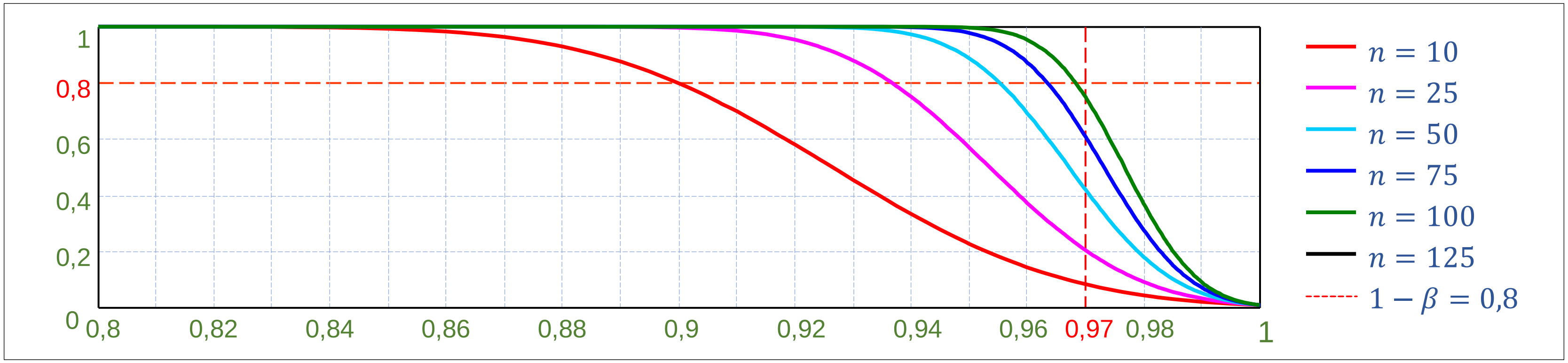
Statystyka matematyczna – minimalna liczebność próby

Zmiany mocy testu w zależności od rzeczywistej wartości średniej przedstawiane są na wykresach mocy:

Im większa odległość rzeczywistej średniej od weryfikowanej wartości tym większa moc testu.



Wykreślenie krzywych dla różnych rozmiarów próby pozwala na oszacowanie minimalnej liczebności próby z wykresu, np. wykrycie przesunięcia średniej do wartości $\mu_1 = 0{,}97$ z mocą $(1-\beta) = 0{,}8$ umożliwi test wykonany dla próby o liczebności $n \approx 112$.



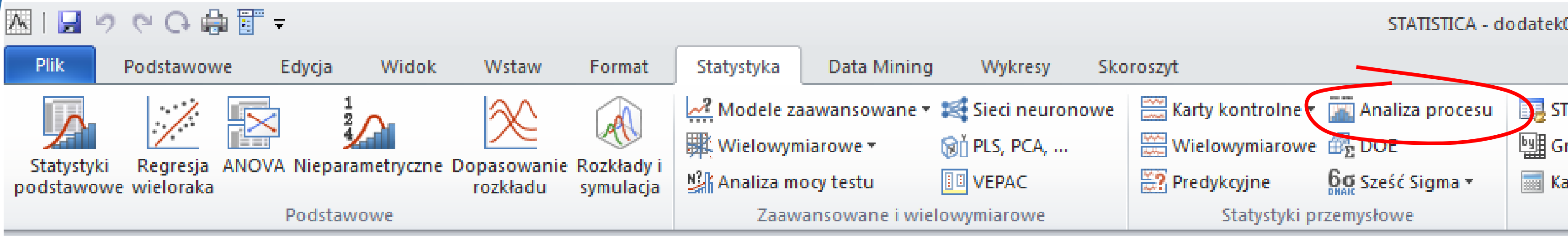
Hipoteza o średniej (znane σ) – moc i rozmiar próby

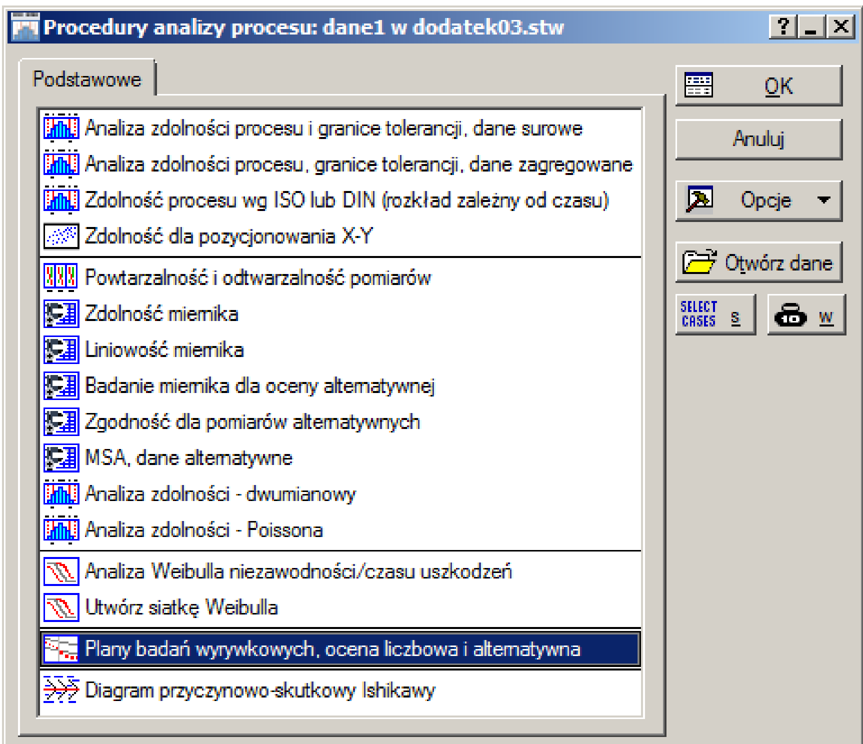
Jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym znane jest odchylenie standardowe σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}.$$

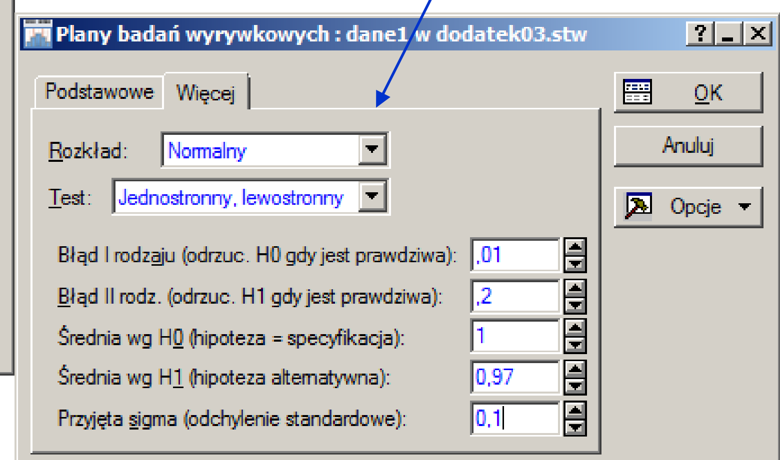
Test	Moc testu i minimalna liczebność próby	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\lvert\mu_1 - \mu_0\rvert}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$1 - \beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\alpha/2}\right)$	$n = \left(\frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$
$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha),\ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2),\ z_{1-\beta} = \Phi^{-1}(1-\beta),\ \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}.$		

STATISTICA – moc testu statystycznego

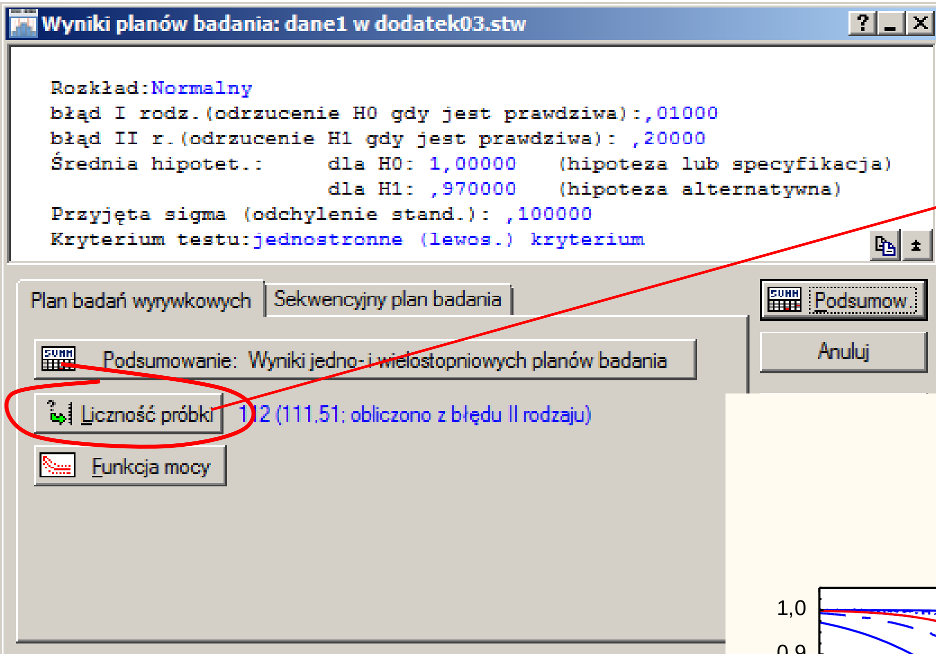


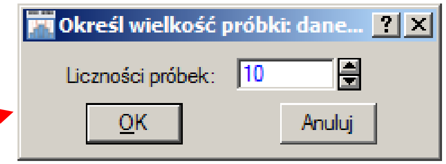


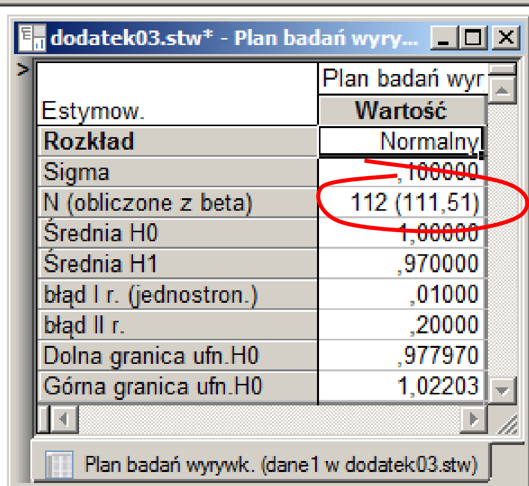
parametry z przykładu kontrola procesu napełniania butelek wodą



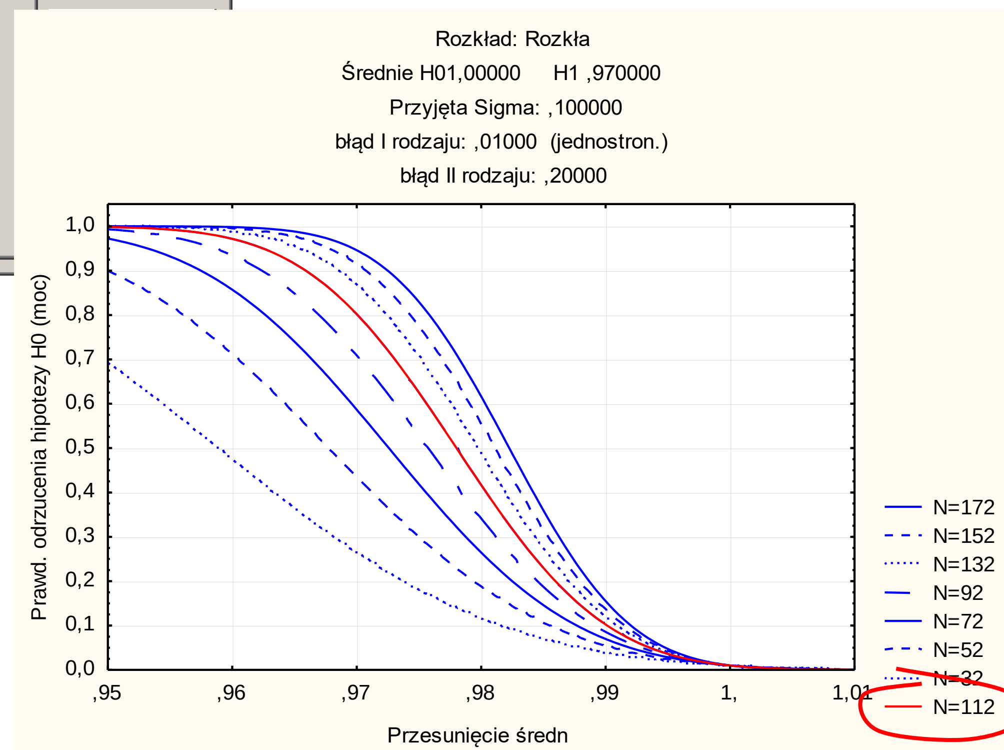
STATISTICA – moc testu statystycznego



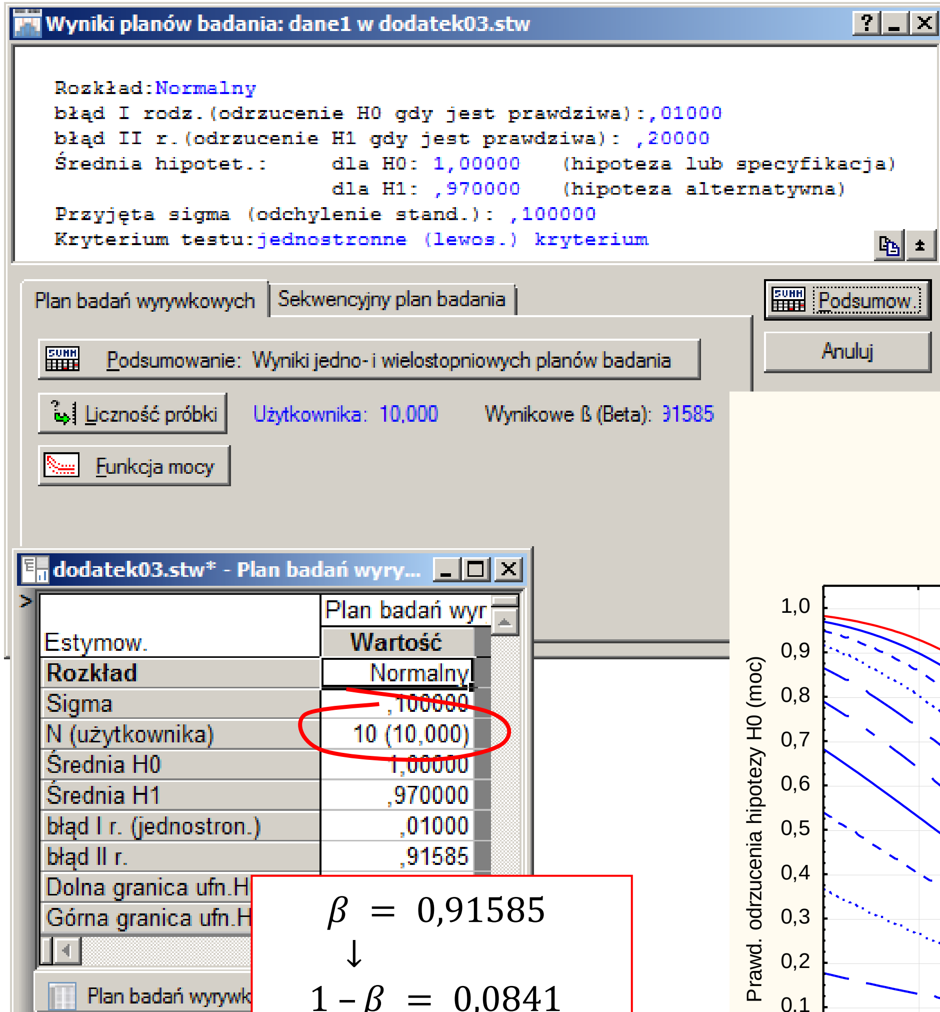




Estymow.	Plan badań wyr Wartość
Rozkład	Normalny
Sigma	,100000
N (obliczone z beta)	112 (111,51)
Średnia H0	1,00000
Średnia H1	,970000
błąd I r. (jednostron.)	,01000
błąd II r.	,20000
Dolna granica ufn.H0	,977970
Górna granica ufn.H0	1,02203



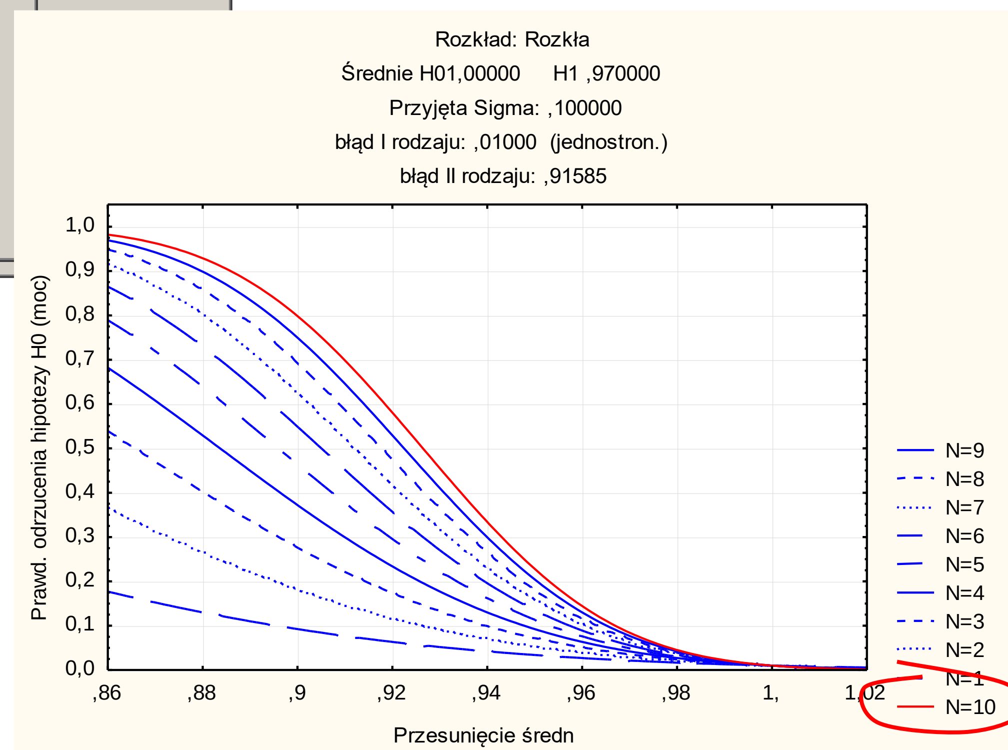
STATISTICA – moc testu statystycznego



$$\beta = 0{,}91585$$

$$\downarrow$$

$$1 - \beta = 0{,}0841$$

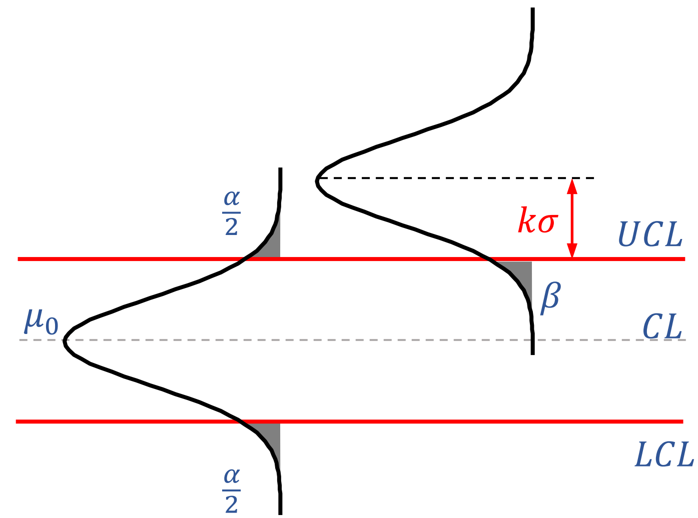


Karta $\overline{X}$ a test istotności dla średniej

Założenia

Wyznaczone zostały parametry karty $\overline{X}$, tzn.:

- średnia procesu μ_0
- odchylenie standardowe σ
- położenie linii kontrolnych UCL i LCL



Idea karty kontrolnej jest podobna do idei testu statystycznego:

- analiza próbki na karcie sprowadza się do przeprowadzenia testu istotności dla wartości średniej w k–tej próbce:

  H_0: średnia nie uległa zmianie $(\mu = \mu_0)$, H_1: średnia uległa zmianie $(\mu \neq \mu_0)$

- do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

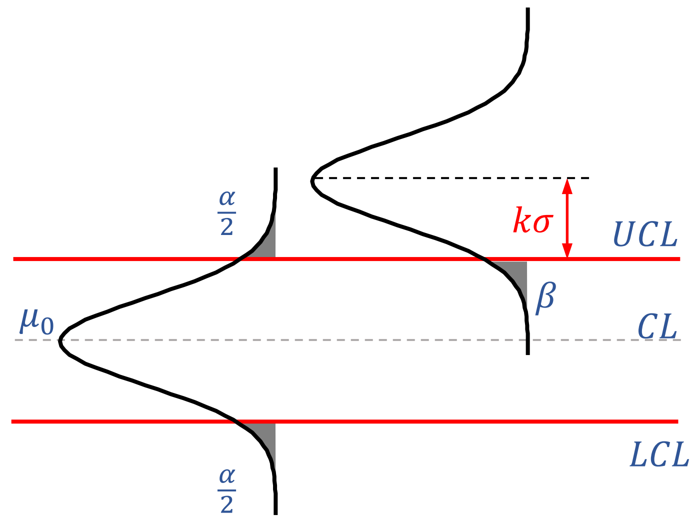
$$z_n = \frac{\bar{x}_k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- hipoteza H_0 jest odrzucana gdy średnia z próbki znajdzie się w obszarze krytycznym, tzn. w przypadku karty kontrolnej poza liniami UCL i LCL

Karta $\overline{X}$ a błąd I rodzaju

Założenia

- $UCL = \mu_0 + L\sigma_{\overline{x}}$
- $LCL = \mu_0 - L\sigma_{\overline{x}}$



Prawdopodobieństwo przekroczenia LCL wynosi

$$\alpha/2 = F_{\mathcal{N}(\mu_0,\sigma_{\overline{x}})}(\mu_0 - L\sigma_{\overline{x}}) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - L\sigma_{\overline{x}} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}}\right) = \Phi(-L).$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu (przekroczenie LCL lub UCL)

$$\alpha = 2\Phi(-L).$$

Dla domyślnych linii kontrolnych dla $L = 3$, prawdopodobieństwo błędu I rodzaju wynosi

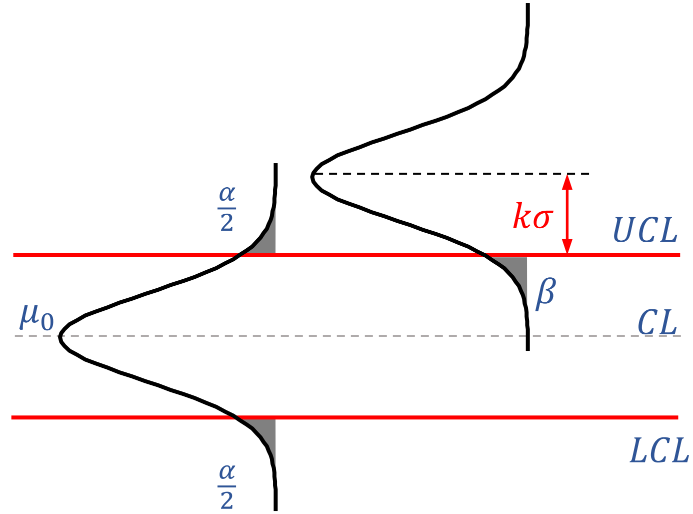
$$\alpha = 2\Phi(-L) = 2\Phi(-3) = 0{,}0027.$$

Karta $\overline{X}$ a błąd II rodzaju

Założenia

- proces uległ przesunięciu, jego średnia wynosi:

$$\mu_1 = \mu_0 + k\,\sigma$$



Moc testu przeprowadzanego przy pomocy karty wyznacza się z zależności:

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right), \qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = L.$$

Moc testu wynosi więc

$$1-\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_0-k\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} - L\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0+k\sigma-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - L\right) = \Phi(-L-k\sqrt{n}) + \Phi(-L+k\sqrt{n}).$$

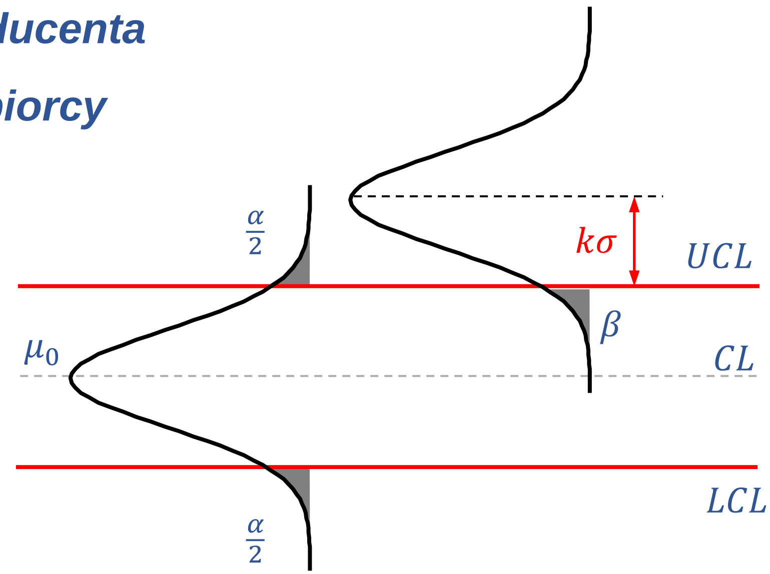
Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju

$$\beta = 1-\Phi(-L-k\sqrt{n}) - \Phi(-L+k\sqrt{n}) = \Phi(L-k\sqrt{n}) - \Phi(-L-k\sqrt{n}).$$

Karty kontrolne a błędy I i II rodzaju

W statystycznej kontroli jakości:

- błąd I rodzaju jest nazywany ***ryzykiem producenta***
- błąd II rodzaju jest nazywany ***ryzykiem odbiorcy***



Ryzyko producenta związane jest z kosztem poszukiwania przyczyny nieistniejącego problemu. Wprowadzona ewentualnie korekta nie zmieni dalszej analizy procesu, błąd ten nie jest więc niebezpieczny.

Błąd II rodzaju jest poważniejszy w skutkach – polega na przeoczeniu niestabilności procesu. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego błędu (β) oznacza, że karta kontrolna nie jest w stanie wykryć znaczącej zmiany procesu bezpośrednio po jej wystąpieniu. *Moc testu* $(1-\beta)$ określa szanse na wykrycie tej zmiany bezpośrednio po jej wystąpieniu.

Karta $\overline{X}$ a błąd II rodzaju i krzywe OC

Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju dla karty $\overline{X}$ wynosi:

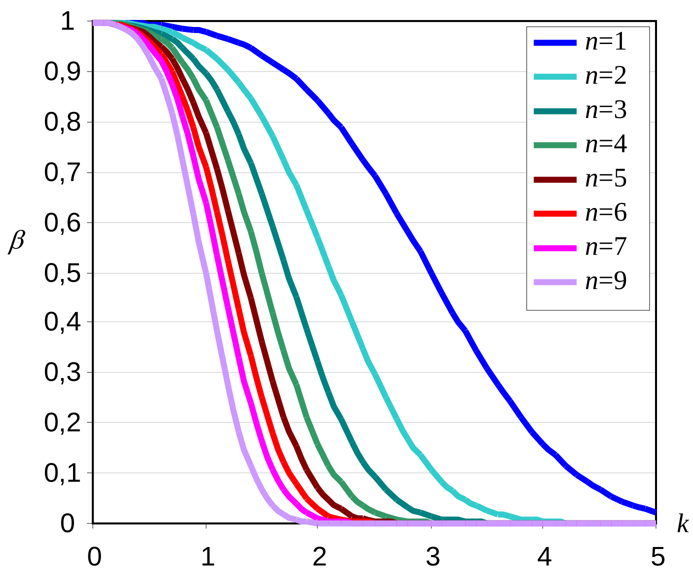
$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}).$$

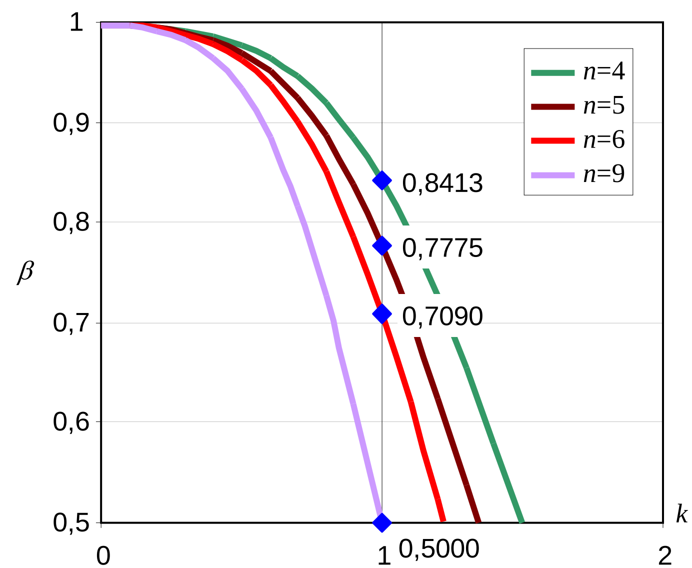
Dla procesu przesuniętego o $k = 1$ otrzymuje się następujące prawdopodobieństwa β:

$$\beta_{(n=4)} = \Phi\left(3 - \sqrt{4}\right) - \Phi\left(-3 - \sqrt{4}\right) \approx 0{,}8413 \qquad \beta_{(n=5)} = \Phi\left(3 - \sqrt{5}\right) - \Phi\left(-3 - \sqrt{5}\right) \approx 0{,}7775,$$

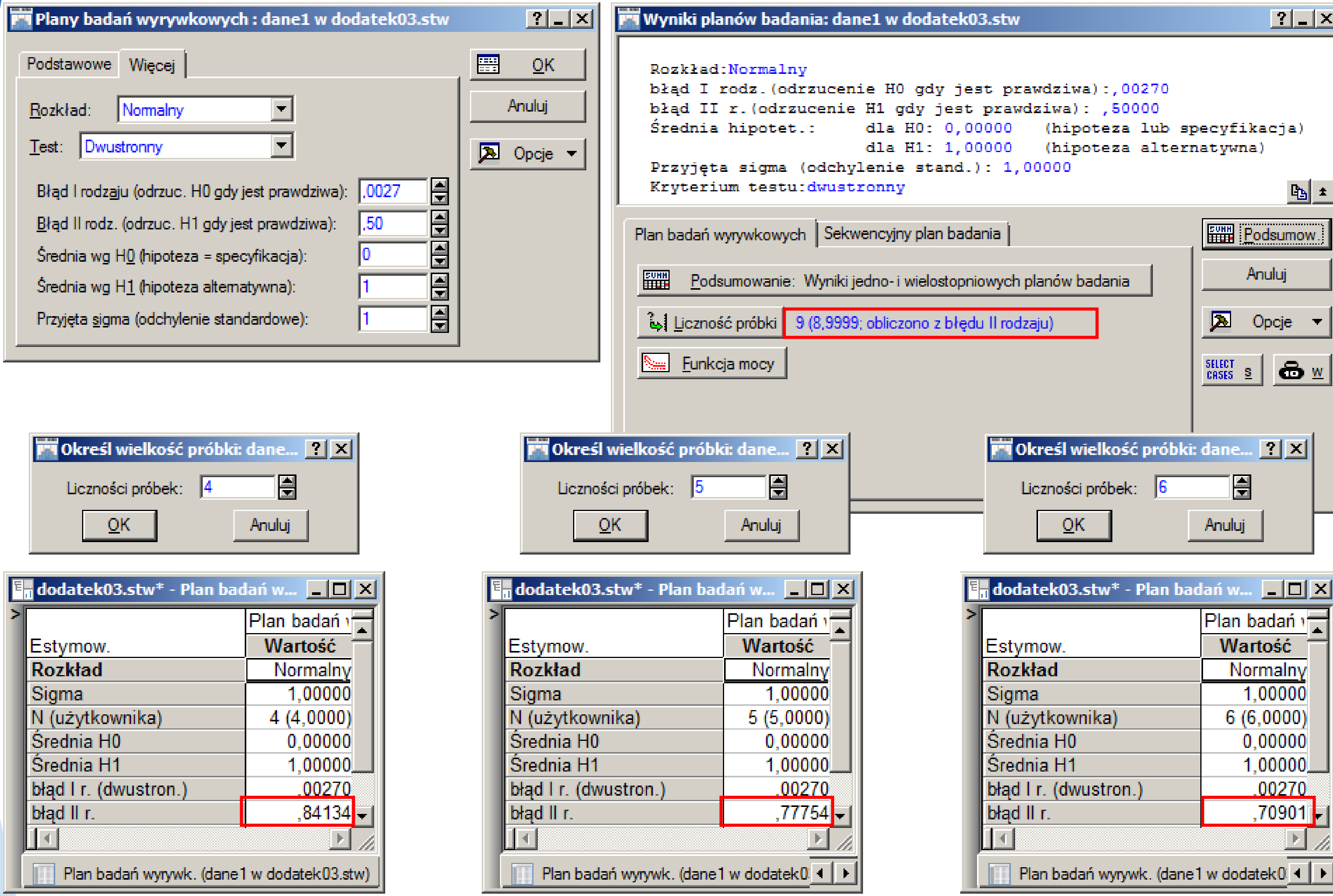
$$\beta_{(n=6)} = \Phi\left(3 - \sqrt{6}\right) - \Phi\left(-3 - \sqrt{6}\right) \approx 0{,}709, \qquad \beta_{(n=9)} = \Phi\left(3 - \sqrt{9}\right) - \Phi\left(-3 - \sqrt{9}\right) = 0{,}5.$$

W przypadku karty $\overline{X}$ zależność błędu II rodzaju od wielkości przesunięcia procesu jest przedstawiana za pomocą ***krzywych operacyjno charakterystycznych*** OC (ang. *operating characteristic curve*) wykreślanych dla różnych rozmiarów próbek.





STATISTICA – moc testu statystycznego



Karty kontrolne a błąd II rodzaju

Szybkość i koszt wykrywania zmian procesu na karcie kontrolnej:

- zwiększanie rozmiaru próbki prowadzi do zmniejszania błędu II rodzaju (wskazują na to obliczone wielkości błędów β i wykresy *OC*),
- im większe próbki i większa częstotliwość ich pobierania tym szybciej można wykryć nieprawidłowości,
- zwiększanie liczby kontroli pociąga za sobą dodatkowe koszty.

Wniosek

ustalenie rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek wymaga kompromisu pomiędzy kosztami kontroli a ryzykiem, że część wyprodukowanych wyrobów nie będzie spełniać wymogów specyfikacji.

koszt y kontroli

ryzyko wystąpienia niezgodnych

Karty kontrolne i wskaźniki *ARL*

Wskaźniki ARL definiują średnią długości serii (*ang. average run length*) albo inaczej średnią liczbę próbek, po których wystąpi sygnał o przekroczeniu linii kontrolnej. Wskaźniki ARL ułatwiają dobór rozmiaru i częstotliwości pobierania próbek.

Wskaźnik ARL_0 to średnia liczba próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje próbkę odstającą.

Wskaźnik ARL_1 to średnia liczba próbek, po której proces statystycznie rozregulowany wygeneruje próbkę odstającą.

Wskaźniki ARL wyznaczają średnie liczby próbek, po których na karcie powinien pojawić się sygnał o rozregulowaniu. Dodatkowo, może być również ważne wyznaczenie średniej liczby pomiarów, po których na karcie pojawia się próbka odstająca:

$$I = nARL.$$

ARL_0 – średnia liczba próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie uregulowanego.

Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki. W tabeli zestawione zostały prawdopodobieństwa dla różnych wartości l:

l	Opis	Prawdop.
$l = 1$	pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną	α
$l = 2$	pierwsza próbka w granicach a druga poza granicami	$(1-\alpha)\alpha$
$l = 3$	pierwsze dwie próbki w granicach a trzecia poza granicami	$(1-\alpha)^2\alpha$
$l = k$	pierwsze $(k-1)$ próbek w granicach a k–ta próbka poza granicami	$(1-\alpha)^{k-1}\alpha$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie uregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu zmiennej l:

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(l=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1}\alpha = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1} = -\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^k\right) = -\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) = 1/\alpha$$

Ostatecznie, wskaźnik ARL_0 wynosi więc: $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$.

Karta $\overline{\mathrm{X}}$ – wskaźnik ARL_1

ARL_1 – średnia liczba próbek do momentu pojawienia się sygnału o rozregulowaniu dla procesu statystycznie rozregulowanego.

Niech l oznacza numer pierwszej odstającej próbki. W tabeli zestawione zostały prawdopodobieństwa dla różnych wartości l:

l	Opis	Prawdop.
$l = 1$	pierwsza próbka przekroczy linię kontrolną	$1 - \beta$
$l = 2$	pierwsza próbka w granicach a druga poza granicami	$\beta(1 - \beta)$
$l = 3$	pierwsze dwie próbki w granicach a trzecia poza granicami	$\beta^2\,(1 - \beta)$
$l = k$	pierwsze $(k-1)$ próbek w granicach a k–ta próbka poza granicami	$\beta^k\,(1 - \beta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Średnią liczbą próbek, po której proces statystycznie rozregulowany wygeneruje odstającą próbkę wyznacza się wykorzystując wartość oczekiwaną rozkładu zmiennej l:

$$E(l) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta^k(1-\beta) = (1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty} k\beta^{k-1} = (1-\beta)\frac{d}{d\beta}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\right) = (1-\beta)\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = (1-\beta)\frac{1}{(1-\beta)^2} = 1/(1-\beta)$$

Ostatecznie, wskaźnik ARL_1 wynosi więc: $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$.

Karta $\overline{\mathrm{X}}$ – wskaźniki: ARL_0, ARL_1 oraz I

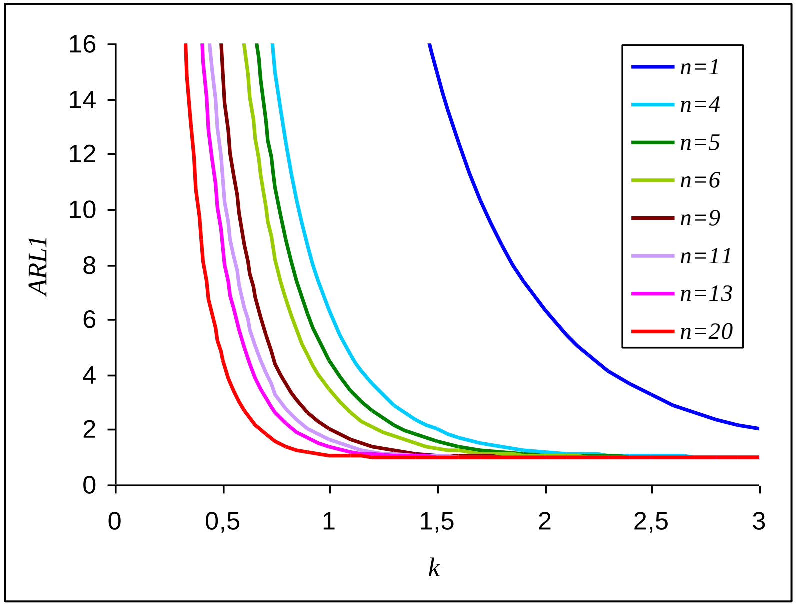
Prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu dla karty $\overline{\mathrm{X}}$ o domyślnych liniach kontrolnych wynosi $\alpha = 0{,}0027$, średnia liczba próbek, po której pojawi się próbka odstająca wyniesie więc:

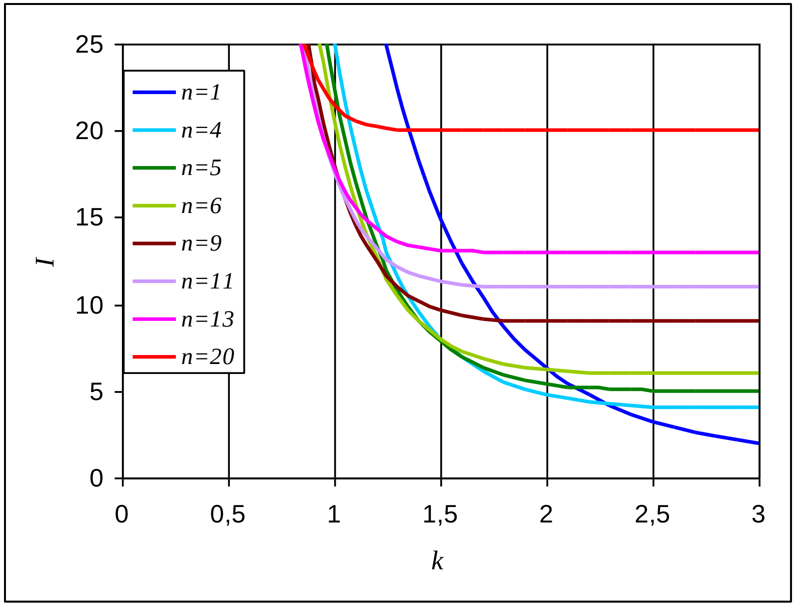
$$ARL_0 = 1/\alpha \approx 370.$$

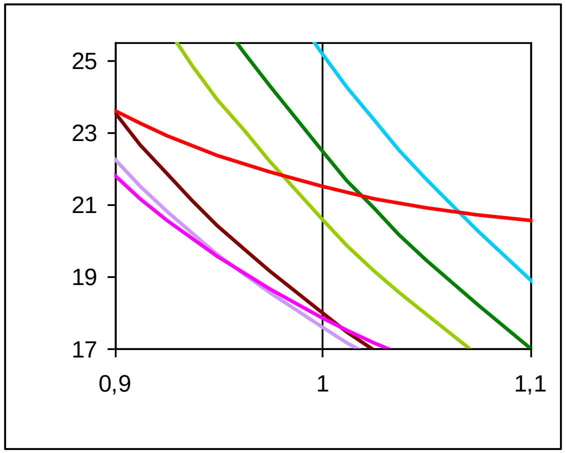
Zakładając, że proces uległ przesunięciu o $k = 1$, średnia liczba próbek i średnia liczba pomiarów, po której pojawi się próbka odstająca wyniosą w zależności od liczebności próbki:

n	β	ARL_1	$I = n\,ARL_1$
4	0,8413	$1/(1-0{,}8413) \approx 6{,}3012$	25,2
5	0,7775	$1/(1-0{,}7775) \approx 4{,}4944$	22,5
6	0,7090	$1/(1-0{,}7090) \approx 3{,}4364$	20,6
9	0,5	$1/(1-0{,}5) = 2$	18
11	0,3758	$1/(1-0{,}3758) \approx 1{,}602$	17,6
13	0,2724	$1/(1-0{,}2724) \approx 1{,}3744$	17,9
20	0,0705	$1/(1-0{,}0705) \approx 1{,}0758$	21,5

Karta $\overline{X}$ – wskaźniki: ARL_1 oraz I



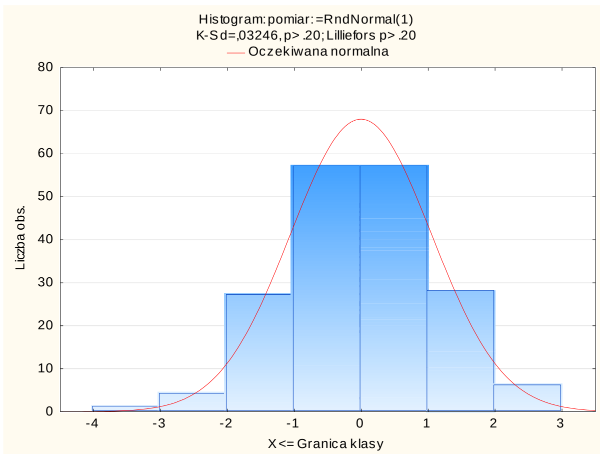


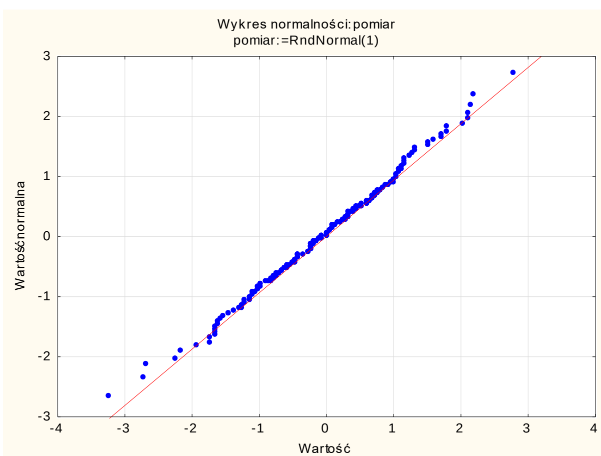


Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

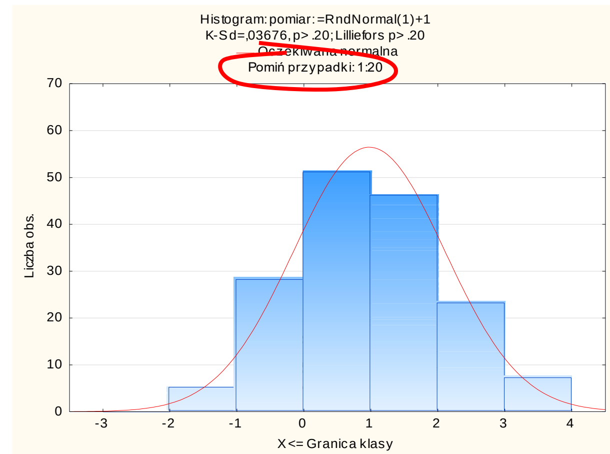
Dane1 wylosowano z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$, dane2 z wyjątkiem pierwszych 20 (wylosowanych z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$) pochodzą z rozkładu przesuniętego o $+1\sigma$, tzn.: $\mathcal{N}(1,1)$.

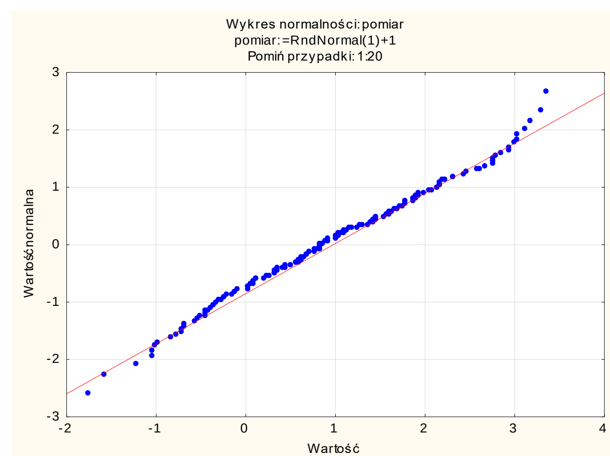
dane1





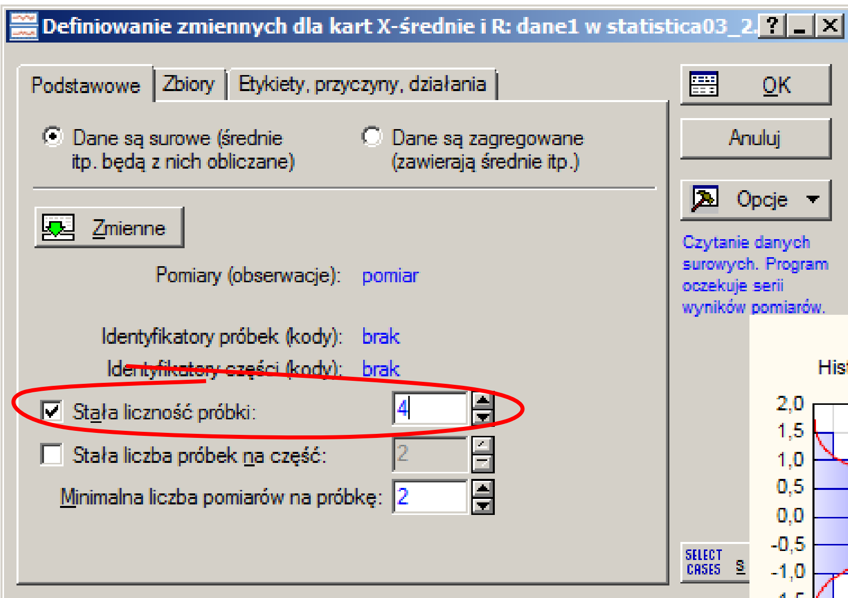
dane2

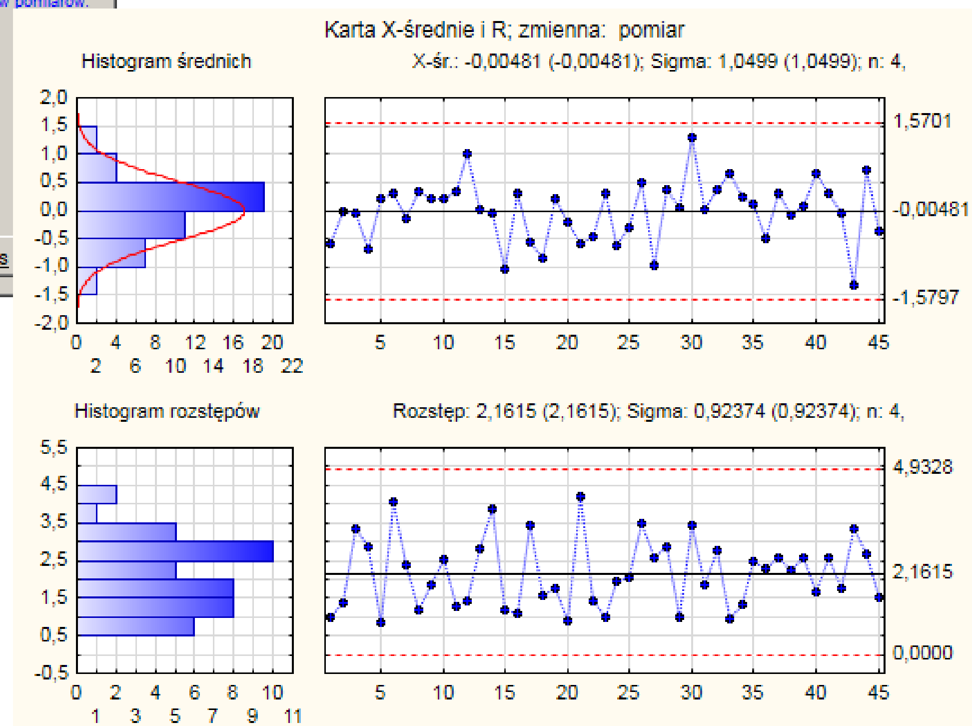




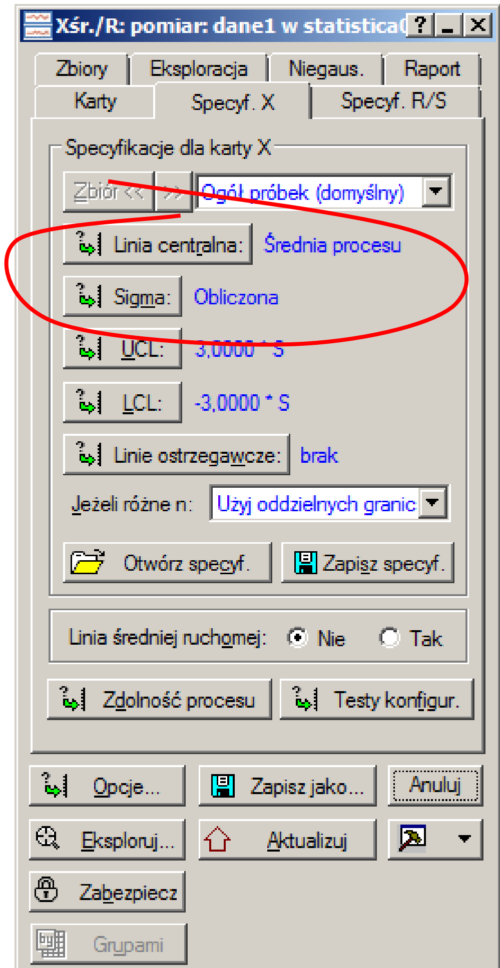
Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

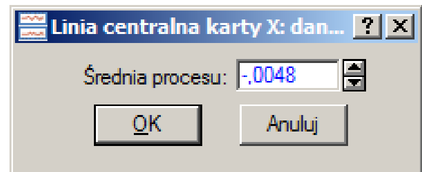
konfiguracja karty (dane1), $n = 4$

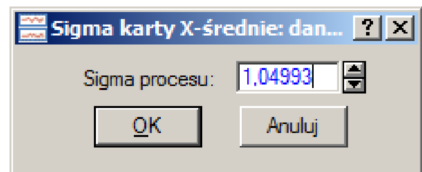


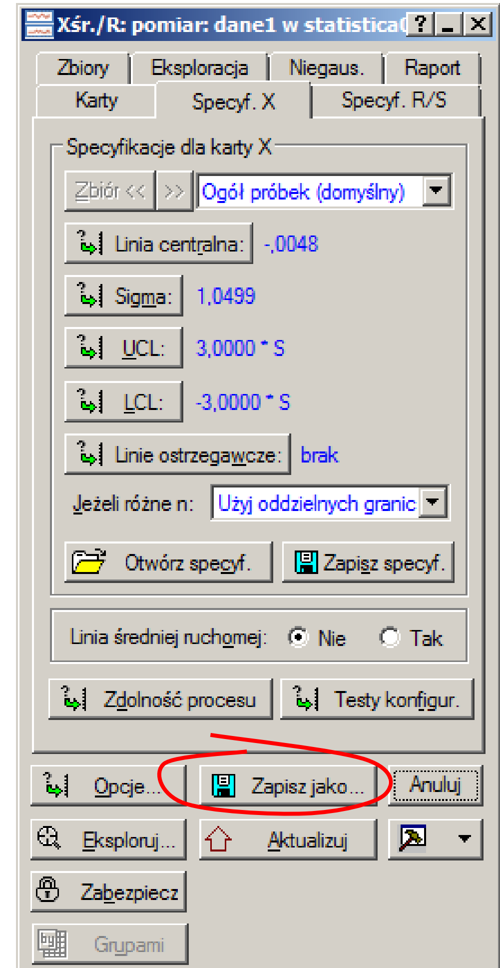


konfiguracja karty (dane1), $n = 4$



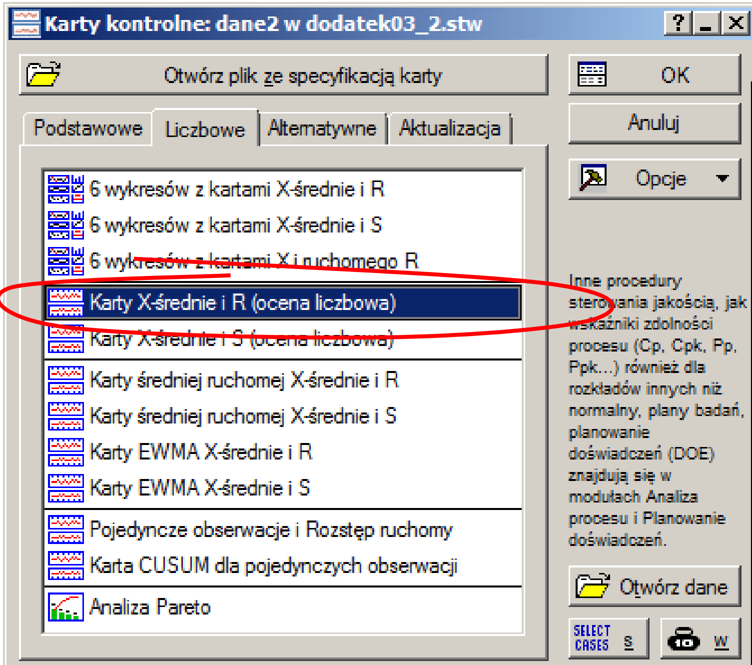


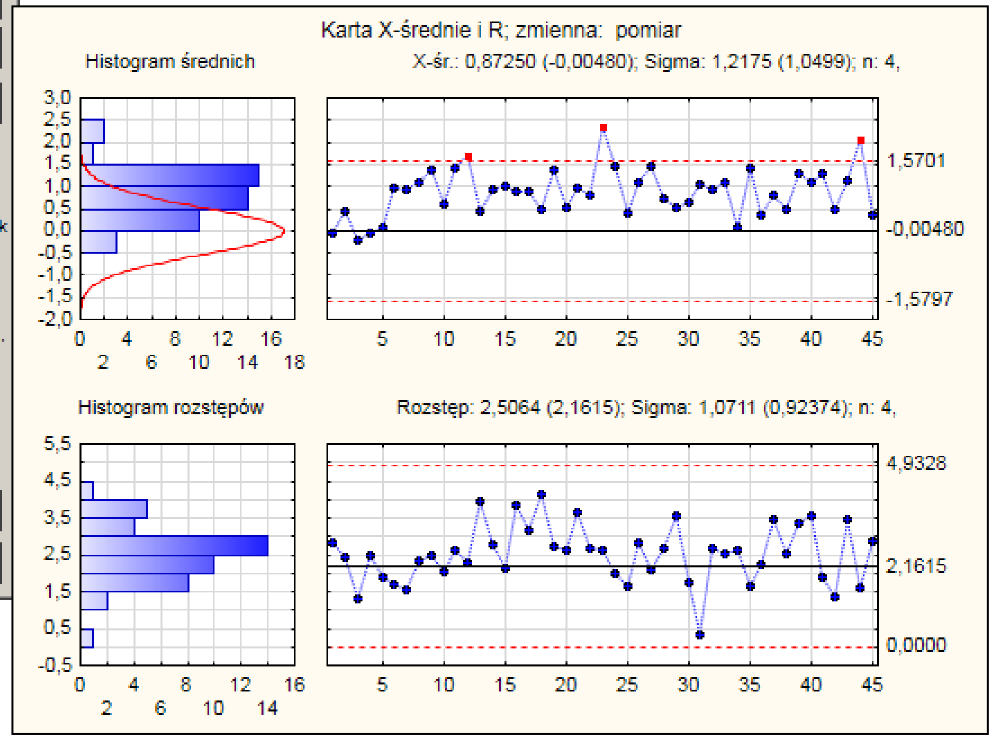




Skuteczność wykrywania przesunięcia procesu

monitorowanie procesu (dane2), $n = 4$

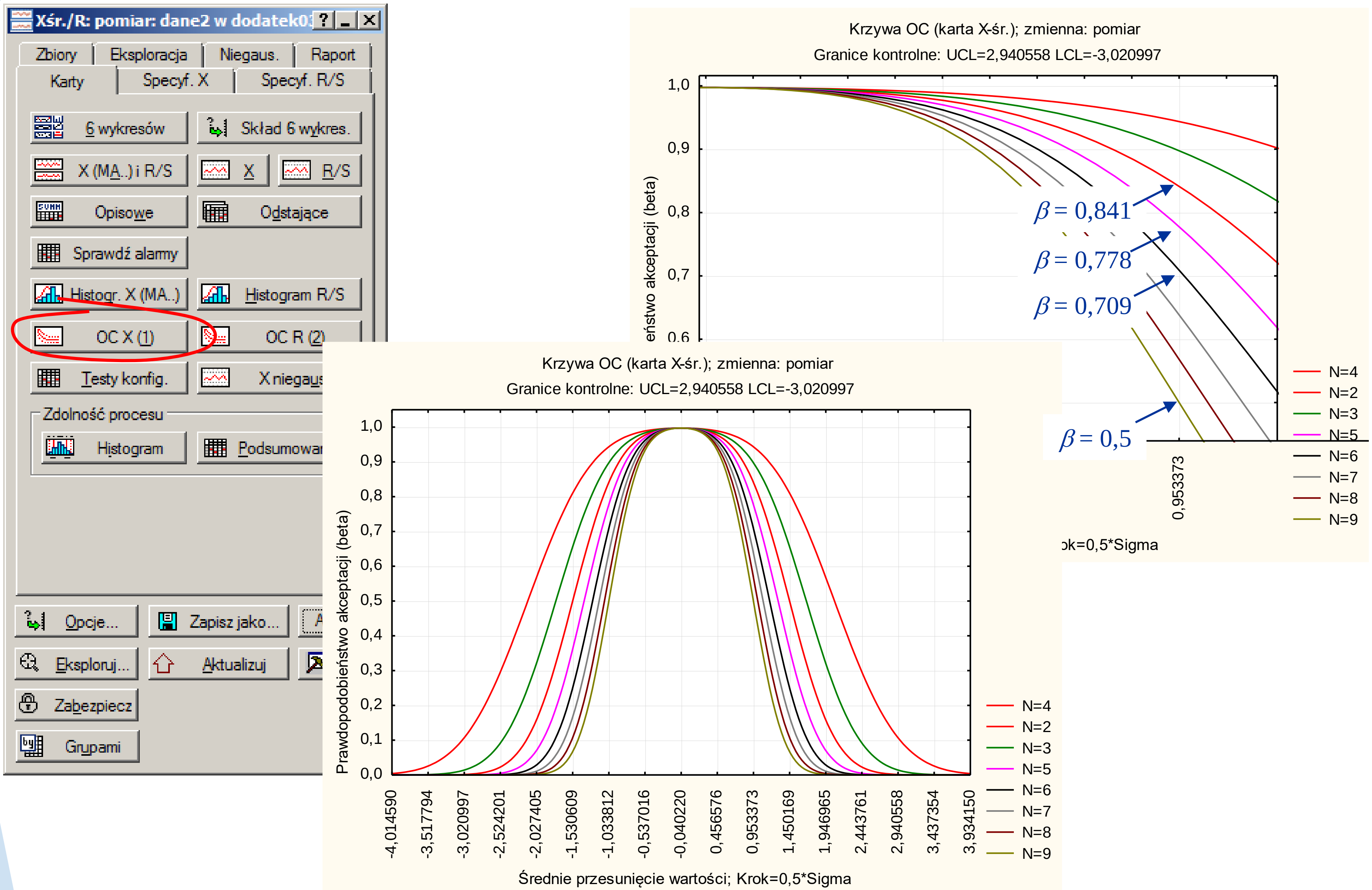




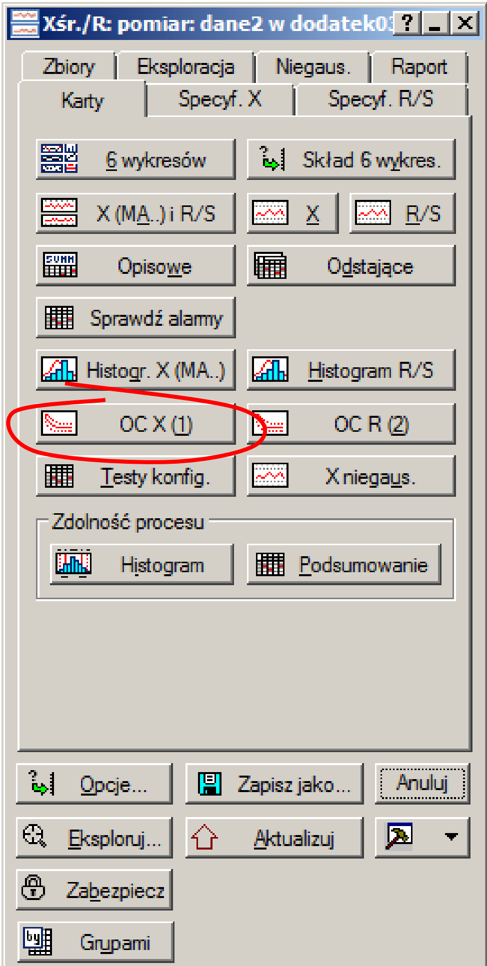
Analiza wyników:

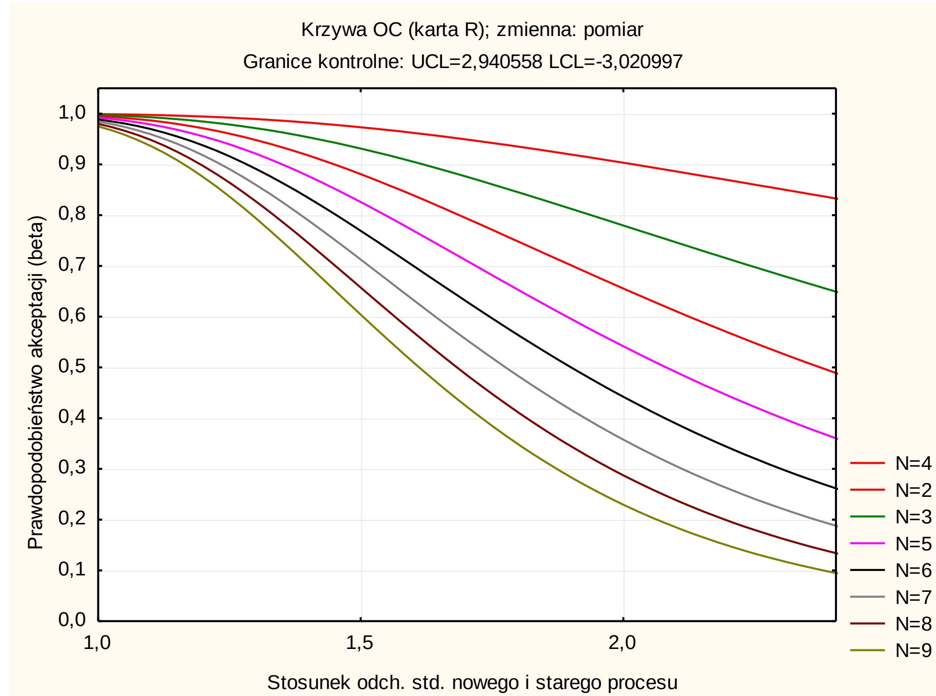
- sygnał o rozregulowaniu (pierwsza próbka poza UCL) pojawia się w próbce 12,
- zmiana procesu nastąpiła w próbce 6 (20 pierwszych wyników w arkuszu dane2 pochodzi z $\mathcal{N}(0, 1)$),
- od czasu zmiany do jej wykrycia przybyło na karcie 7 próbek,
- wskaźnik ARL_1 dla karty $\overline{\mathrm{X}}$ i przesunięcia $k = 1$ wynosi $ARL_1 = 6{,}3012$,
- rezultat jest zgodny z oczekiwaniami.

STATISTICA – krzywe OC dla karty $\bar{X}$



STATISTICA – karty kontrolne (krzywe OC)





Krzywe *OC* karty R pokazują wartość błędu β w funkcji zmiany odchylenia standardowego (stosunek odchylenia standardowego nowego do starego).

Z wykresu można odczytać np., że dla $n = 4$:

- jeśli σ zwiększy się $1{,}5$ raza to β wyniesie $0{,}88$ $(ARL_1 \approx 8{,}33)$,
- jeśli σ zwiększy się 2 razy to β wyniesie $0{,}65$, $(ARL_1 \approx 2{,}86)$.