

Sterowanie jakością

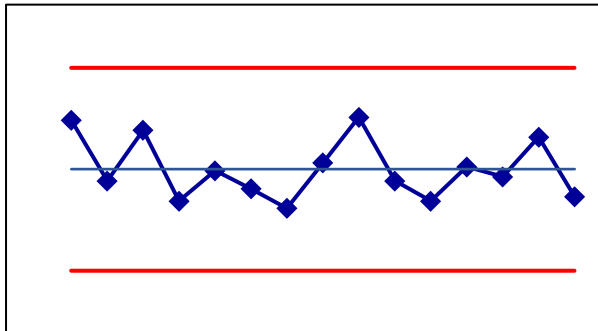
Sekwencyjne karty kontrolne

CuSum

EWMA

MA

MR



Materialy

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

Sekwencyjne karty kontrolne – wprowadzenie

Karty $\bar{X} - R$ i $\bar{X} - S$

- skuteczność kart maleje wraz ze zmniejszaniem rozregulowania monitorowanego procesu,
- zaleca się stosowanie w pierwszej fazie wprowadzania kart kontrolnych gdy monitorowany proces nie jest statystycznie uregulowany i występują duże (tzn. $\geq 1,5\sigma$) przesunięcia kontrolowanych parametrów,
- skuteczność kart na etapie monitorowania procesu kiedy jest on już uregulowany i występują tylko małe przesunięcia (tzn. $< 1,5\sigma$) jest już mniejsza – wada ta wynika z faktu, że karty w małym stopniu wykorzystują informacje ukryte w sekwencji próbek posługując się głównie bieżącymi informacjami o stanie procesu.

	przesunięcie procesu			
	1,5 σ		1 σ	
<i>n</i>	<i>ARL</i> ₁	<i>I</i>	<i>ARL</i> ₁	<i>I</i>
4	2	8	6,3	25,2
5	1,57	7,85	4,5	22,5
6	1,33	7,98	3,4	20,6
9	1,07	9,63	2	18

Karty sekwencyjne: *CuSum*, *MA*, *EWMA*

- wykorzystują w obliczeniach informacje ukryte w sekwencji obserwacji,
- są skuteczne do wykrywania małych przesunięć średniej procesu, zaleca się stosowanie na etapie monitorowania procesu,
- są mniej czułe na duże przesunięcia monitorowanego procesu.

Karta CuSum (ang. *Cumulative Sum Control Chart*) to tzw. karta sum skumulowanych, pozwala na analizę odchyłeń od wartości założonej:

- (częściej) do obserwacji pojedynczych pomiarów ($n = 1$),
- (rzadziej) dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$).

Punkt karty C_i odpowiada sumarycznej odchyłce od założonej wartości docelowej μ_0 :

- w karcie dla pojedynczych obserwacji:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0) = \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - \mu_0) + (x_i - \mu_0) = C_{i-1} + (x_i - \mu_0),$$

- w karcie dla próbek:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) = C_{i-1} + (\bar{x}_i - \mu_0)$$

gdzie: x_i – i -ta obserwacja, \bar{x}_i – średnia w i -tej próbce.

Linie kontrolne karty wyznacza się wykorzystując albo maskownicę w kształcie litery V, albo algorytm tabelaryczny.

CuSum – własności statystyki C_i

Wartość oczekiwaną statystyki $C_i = C_{i-1} + (\bar{x}_i - \mu_0)$ wyznacza się jako:

$$E(C_i) = E(C_{i-1}) + E(\bar{x}_i - \mu_0) = E(C_{i-1}) + E(\bar{x}_i) - \mu_0,$$

a przyjmując, że $E(\bar{x}_i) = \mu_i$:

$$E(C_i) = E(C_{i-1}) + \mu_i - \mu_0.$$

W przypadku gdy monitorowany proces:

- nie ulega przesunięciu ($\mu_i = \mu_0$)

$$E(C_i) = E(C_{i-1}), \quad \text{tzn. } C_i \text{ nie zmienia się,}$$

- ulega przesunięciu w górę ($\mu_i > \mu_0$)

$$E(C_i) = E(C_{i-1}) + \mu_i - \mu_0 > E(C_{i-1}), \quad \text{tzn. } C_i \text{ dryfuje w górę,}$$

- ulega przesunięciu w dół ($\mu_i < \mu_0$)

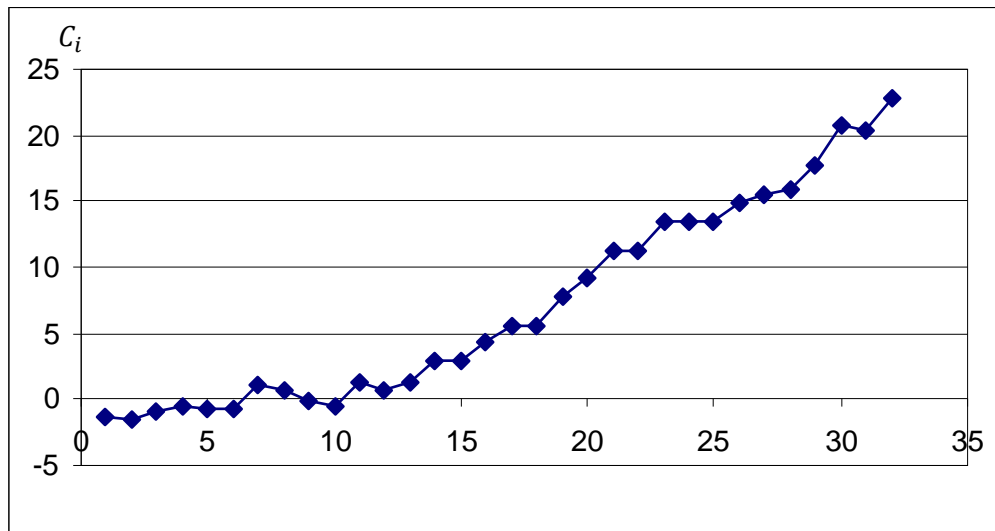
$$E(C_i) = E(C_{i-1}) + \mu_i - \mu_0 < E(C_{i-1}), \quad \text{tzn. } C_i \text{ dryfuje w dół.}$$

Karta *CuSum* pojedynczych obserwacji

W tabeli zebrane zostały wartości wylosowane z rozkładu normalnego. Pierwszych 10 wyników wylosowano z rozkładu $\mathcal{N}(5,1)$, pozostałe symulują przesunięcie procesu o 1s, tzn. pochodzą z rozkładu $\mathcal{N}(6,1)$. Należy wykorzystać kartę *CuSum* do monitorowania odchyłeń pojedynczych pomiarów od nominalnej średniej procesu $\mu_0 = 5$.

Wartości kolejnych odchyłeń wyznacza się jako:

$$C_1 = x_1 - 5 = 3,6 - 5 = -1,4, C_2 = C_1 + (x_2 - 5) = -1,5, \dots$$



Dla pierwszych 10 obserwacji wartości układają się wokół wartości 0, kolejne wyniki (procesu przesunięty) dają wzrost C_i .

nr	x_i	$x_i - 5$	C_i
1	3,6	-1,4	-1,4
2	4,9	-0,1	-1,5
3	5,6	0,6	-0,9
4	5,4	0,4	-0,5
5	4,8	-0,2	-0,7
6	4,9	-0,1	-0,8
7	6,9	1,9	1,1
8	4,6	-0,4	0,7
9	4,1	-0,9	-0,2
10	4,6	-0,4	-0,6
11	6,9	1,9	1,3
12	4,3	-0,7	0,6
13	5,6	0,6	1,2
14	6,8	1,8	3
15	5	0	3
16	6,3	1,3	4,3
17	6,2	1,2	5,5
18	5	0	5,5
19	7,2	2,2	7,7
20	6,5	1,5	9,2
...
32	7,3	2,3	22,7

CuSum – algorytm tabelaryczny

W celu wprowadzenia linii kontrolnych w algorytmie tabelarycznym wyznaczane są 2 skumulowane sumy C_i^+ i C_i^- :

$$C_i^+ = \max(0, C_{i-1}^+ + x_i - (\mu_0 + K))$$

$$C_i^- = \max(0, C_{i-1}^- + (\mu_0 - K) - x_i)$$

gdzie: $C_0^+ = C_0^- = 0$, K to tzw. wartość odniesienia.

Wartość odniesienia K

- często przyjmowana w postaci połowy odległości pomiędzy wartością założoną μ_0 a niedopuszczalną wartością μ_1

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

- dla niedopuszczalnego przesunięcia procesu wyrażonego w odchyleniach standardowych procesu wzorcowego: $\mu_1 = \mu_0 + s$, przyjmowana jako:

$$K = \frac{1}{2} k^* \sigma.$$

Własności C_i^+ i C_i^-

$$C_i^+ = \max(0, C_{i-1}^+ + x_i - (\mu_0 + K))$$

$$C_i^- = \max(0, C_{i-1}^- + (\mu_0 - K) - x_i)$$

- C_i^+ i C_i^- sumują odchylenia przekraczające wartość odniesienia K
 - w C_i^+ liczone są odległości pomiędzy wartością obserwacji a wartością $(\mu_0 + K)$
 - w C_i^- liczone są odległości pomiędzy wartością $(\mu_0 - K)$ a wartością obserwacji
 - jeśli skumulowana odległość spada poniżej 0, odpowiednie sumy są zerowane
- dla procesu przesuniętego o wielkość większą od $(\mu_0 + K)$, C_i^+ dryfuje w górę
- dla procesu przesuniętego o wielkość mniejszą od $(\mu_0 - K)$, C_i^- dryfuje w górę,
- dla procesu mieszczącego się w granicach od $(\mu_0 - K)$ do $(\mu_0 + K)$ nie ulegają zmianom

CuSum – algorytm tabelaryczny

Linie kontrolne

Przyjmuje się, że proces jest statystycznie niestabilny w przypadku gdy sumy C_i^+ i C_i^- przekraczają pewną wartość H (nazywaną *przedziałem decyzyjnym*)

$$H = h \sigma$$

Wielkość przedziału decyzyjnego H może być przyjmowana tak aby wskaźnik ARL_0 uzyskiwał taką samą wartość jak w przypadku kart Shewharta tzn. $ARL_0 = 370$.

W tabeli zestawione zostały wartości k^* i odpowiadające im wartości h dla $ARL_0 = 370$ ¹.

k^*	h
0,5	8,01
1	4,77
1,5	3,34
2	2,52
2,5	1,99
3	1,61

¹ Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009

Ze względu na prostotę i dobre przybliżanie dokładnych wartości wskaźnika ARL dla jednostronnej karty CuSum, monitorującej zmiany C_i^+ lub C_i^- często wykorzystywany jest wzór opracowany przez Siegmunda:

$$ARL^\pm = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

gdzie

$$\Delta \text{ dla } C_i^+: \Delta = k - \frac{1}{2}k^*, \text{ dla } C_i^-: \Delta = -k - \frac{1}{2}k^*$$

jeśli $\Delta = 0$ przyjmuje się $ARL = b^2$

k to przesunięcie procesu, dla którego jest wyznaczane ARL , k wyrażane jest w jednostkach odchylenia standardowego: $k = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$

$$b = h + 1,166$$

Dla karty dwustronnej średnią długość serii wyznacza się wykorzystując ARL^- obliczone dla C_i^- i ARL^+ obliczone dla C_i^+

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}$$

CuSum – algorytm tabelaryczny

Wyznaczyć parametry karty *CuSum*: k^* i h tak aby wykrywała przesunięcie procesu o 1σ z założonej wartości $\mu_0 = 5$ na niedopuszczalną wartość $\mu_1 = 6$ zapewniając zbliżoną do kart Shewharta wartość wskaźnika ARL_0 , tzn.: $ARL_0 = 370$. Wyznaczyć wartość wskaźnika ARL_1 dla założonego przesunięcia procesu.

Wartość parametru k^* zostanie dobrana w taki sposób, żeby niedopuszczalna wartość μ_1 powodowała zmiany wartości skumulowanych sum C_i^+ , C_i^- :

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{|6 - 5|}{2} = \frac{1}{2}, \quad K = \frac{1}{2} k^* \sigma \quad \rightarrow \quad k^* = \frac{2K}{\sigma} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1.$$

Parametr h zostanie wyznaczony metodą prób i błędów w taki sposób, żeby zapewnić wartość ARL_0 zbliżoną do 370. Wyznaczając ARL_0 przyjmuje się, że proces nie uległ przesunięciu, tzn. $k = 0$. Na początek niech $h = 4$:

$$b = h + 1,166 = 4 + 1,166 = 5,166$$

$$\Delta^+ = k - k^*/2 = 0 - 1/2 = -0,5$$

$$\Delta^- = -k - k^*/2 = 0 - 1/2 = -0,5,$$

$$ARL_0^+ = ARL_0^- = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} = \frac{e^{-2 \cdot (-0,5) \cdot 5,166} + 2 \cdot (-0,5) \cdot 5,166 - 1}{2 \cdot (-0,5)^2} \approx 338,1,$$

$$\frac{1}{ARL_0} = \frac{1}{ARL_0^+} + \frac{1}{ARL_0^-} = 2 \cdot \frac{1}{338,1} \approx 0,0059 \quad \rightarrow \quad ARL_0 \approx 169,05.$$

Otrzymana wartość wskaźnika ARL_0 jest zbyt mała, przyjmijmy więc, że $h = 5$.

CuSum – algorytm tabelaryczny

Wartość ARL_0 dla $h = 5$ otrzymuje się po obliczeniach:

$$b = h + 1,166 = 5 + 1,166 = 6,166$$

$$\Delta^+ = k - k^*/2 = 0 - 1/2 = -0,5$$

$$\Delta^- = -k - k^*/2 = 0 - 1/2 = -0,5,$$

$$ARL_0^+ = ARL_0^- = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} = \frac{e^{-2 \cdot (-0,5) \cdot 6,166} + 2 \cdot (-0,5) \cdot 6,166 - 1}{2 \cdot (-0,5)^2} \approx 938,2,$$

$$\frac{1}{ARL_0} = \frac{1}{ARL_0^+} + \frac{1}{ARL_0^-} = 2 \cdot \frac{1}{938,2} \approx 0,0021 \quad \rightarrow \quad ARL_0 \approx 469,1.$$

Wskaźnik ARL_0 ma wartość większą do założonej (dla $h = 4,77$ wartość $ARL_0 \approx 371,5$).
Zbadajmy wartość wskaźnika ARL_1 dla $h = 5$ i procesu przesuniętego o $k = 1$.

$$\Delta^+ = k - k^*/2 = 1 - 1/2 = 0,5$$

$$\Delta^- = -k - k^*/2 = -1,5,$$

$$ARL_1^+ = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} = \frac{e^{-2 \cdot 0,5 \cdot 6,166} + 2 \cdot 0,5 \cdot 6,166 - 1}{2 \cdot (0,5)^2} \approx 10,3,$$

$$ARL_1^- = \frac{e^{-2\Delta b} + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} = \frac{e^{-2 \cdot (-1,5) \cdot 6,166} + 2 \cdot (-1,5) \cdot 6,166 - 1}{2 \cdot (-1,5)^2} \approx 2,4 e^{+7},$$

$$\frac{1}{ARL_1} = \frac{1}{ARL_1^+} + \frac{1}{ARL_1^-} = \frac{1}{10,3} + \frac{1}{2,4 e^{+7}} \approx 0,097 \quad \rightarrow \quad ARL_1 \approx 10,3.$$

CuSum – algorytm tabelaryczny (podsumowanie)

Wykres postępu

$$C_i^+ = \max(0, C_{i-1}^+ + x_i - (\mu_0 + K)), \quad C_i^- = \max(0, C_{i-1}^- + (\mu_0 - K) - x_i)$$

gdzie: K – wartość odniesienia, zwykle $K = \frac{1}{2}k^*\sigma$, k^* – założone niedopuszczalne przesunięcie procesu (wyrażone w σ).

Linie kontrolne

$$LCL = -H,$$

$$CL = 0,$$

$$UCL = H,$$

gdzie: $H = h\sigma$, dla $k^* = 1$ przyjmuje się $h = 4$ lub $h = 5$, w innych przypadkach h biera się tak jak opisano na slajdzie poprzednim.

Karta CuSum – sposób rysowania

MiniTab: rysowane obydwie sumy, ale:

$$\text{MiniTab } C_i^- = \min(0, x_i - (\hat{\mu} - K) + C_{i-1}^-) \quad \text{tzn.:} \quad \text{MiniTab } C_i^- = -C_i^-$$

STATISTICA: rysowana pojedyncza wielkość liczona jako:

$$\text{STATISTICA } C_i = \begin{cases} C_i^+ & \text{gdy } C_i^+ > C_i^- \\ -C_i^- & \text{gdy } C_i^+ \leq C_i^- \end{cases}$$

Karta CuSum pojedynczych obserwacji

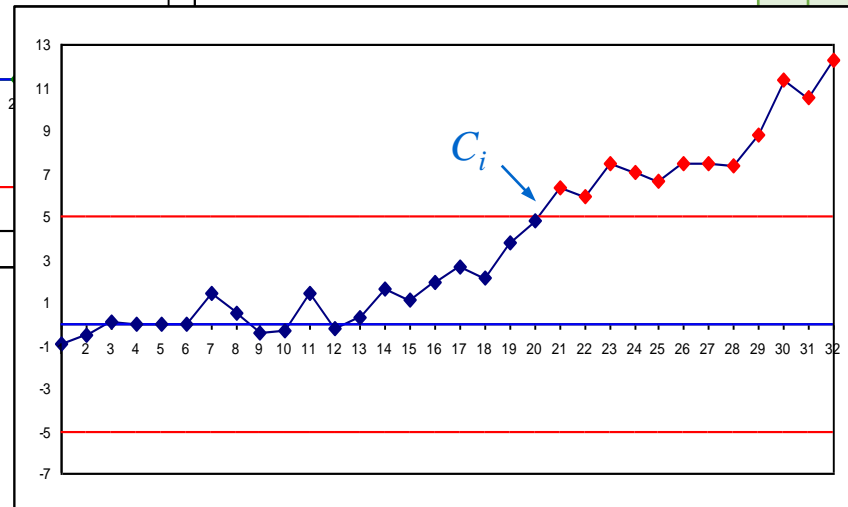
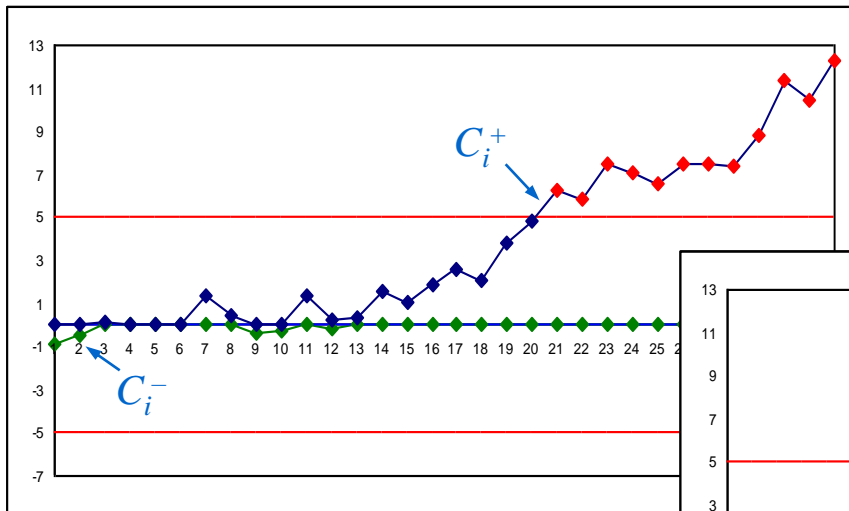
$$C_i^+ = \max(0, C_{i-1}^+ + x_i - (\mu_0 + K)), \quad C_i^- = \max(0, C_{i-1}^- + (\mu_0 - K) - x_i)$$

$$C_1^+ = \max(0; 0 + 3,6 - (5 + 0,5)) = 0 \quad C_1^- = \max(0; 0 + (5 - 0,5) - 3,6) = 0,9$$

$$C_2^+ = \max(0; 0 + 4,9 - (5 + 0,5)) = 0 \quad C_2^- = \max(0; 0,9 + (5 - 0,5) - 4,9) = 0,5$$

$$C_3^+ = \max(0; 0 + 5,6 - (5 + 0,5)) = 0,1 \quad C_3^- = \max(0; 0,5 + (5 - 0,5) - 5,6) = 0$$

nr	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
1	3,6	0	0,9	-0,9
2	4,9	0	0,5	-0,5
3	5,6	0,1	0	0,1
4	5,4	0	0	0
5	4,8	0	0	0
6	4,9	0	0	0
7	6,9	1,4	0	1,4
8	4,6	0,5	0	0,5
9	4,1	0	0,4	-0,4
10	4,6	0	0,3	-0,3
11	6,9	1,4	0	1,4
12	4,3	0,2	0,2	-0,2
13	4,3	0,3	0	0,3
14	4,3	0,3	0	0,3
15	4,3	0,3	0	0,3
16	4,3	0,3	0	0,3
17	4,3	0,3	0	0,3
18	4,3	0,3	0	0,3
19	4,3	0,3	0	0,3
20	4,3	0,3	0	0,3
21	4,3	0,3	0	0,3
22	4,3	0,3	0	0,3
23	4,3	0,3	0	0,3
24	4,3	0,3	0	0,3
25	4,3	0,3	0	0,3
26	4,3	0,3	0	0,3
27	4,3	0,3	0	0,3
28	4,3	0,3	0	0,3
29	4,3	0,3	0	0,3
30	4,3	0,3	0	0,3
31	4,3	0,3	0	0,3
32	4,3	0,3	0	0,3
33	4,3	0,3	0	0,3
34	4,3	0,3	0	0,3
35	4,3	0,3	0	0,3
36	4,3	0,3	0	0,3
37	4,3	0,3	0	0,3
38	4,3	0,3	0	0,3
39	4,3	0,3	0	0,3
40	4,3	0,3	0	0,3
41	4,3	0,3	0	0,3
42	4,3	0,3	0	0,3
43	4,3	0,3	0	0,3
44	4,3	0,3	0	0,3
45	4,3	0,3	0	0,3
46	4,3	0,3	0	0,3
47	4,3	0,3	0	0,3
48	4,3	0,3	0	0,3
49	4,3	0,3	0	0,3
50	4,3	0,3	0	0,3
51	4,3	0,3	0	0,3
52	4,3	0,3	0	0,3
53	4,3	0,3	0	0,3
54	4,3	0,3	0	0,3
55	4,3	0,3	0	0,3
56	4,3	0,3	0	0,3
57	4,3	0,3	0	0,3
58	4,3	0,3	0	0,3
59	4,3	0,3	0	0,3
60	4,3	0,3	0	0,3
61	4,3	0,3	0	0,3
62	4,3	0,3	0	0,3
63	4,3	0,3	0	0,3
64	4,3	0,3	0	0,3
65	4,3	0,3	0	0,3
66	4,3	0,3	0	0,3
67	4,3	0,3	0	0,3
68	4,3	0,3	0	0,3
69	4,3	0,3	0	0,3
70	4,3	0,3	0	0,3
71	4,3	0,3	0	0,3
72	4,3	0,3	0	0,3
73	4,3	0,3	0	0,3
74	4,3	0,3	0	0,3
75	4,3	0,3	0	0,3
76	4,3	0,3	0	0,3
77	4,3	0,3	0	0,3
78	4,3	0,3	0	0,3
79	4,3	0,3	0	0,3
80	4,3	0,3	0	0,3
81	4,3	0,3	0	0,3
82	4,3	0,3	0	0,3
83	4,3	0,3	0	0,3
84	4,3	0,3	0	0,3
85	4,3	0,3	0	0,3
86	4,3	0,3	0	0,3
87	4,3	0,3	0	0,3
88	4,3	0,3	0	0,3
89	4,3	0,3	0	0,3
90	4,3	0,3	0	0,3
91	4,3	0,3	0	0,3
92	4,3	0,3	0	0,3
93	4,3	0,3	0	0,3
94	4,3	0,3	0	0,3
95	4,3	0,3	0	0,3
96	4,3	0,3	0	0,3
97	4,3	0,3	0	0,3
98	4,3	0,3	0	0,3
99	4,3	0,3	0	0,3
100	4,3	0,3	0	0,3
101	4,3	0,3	0	0,3
102	4,3	0,3	0	0,3
103	4,3	0,3	0	0,3
104	4,3	0,3	0	0,3
105	4,3	0,3	0	0,3
106	4,3	0,3	0	0,3
107	4,3	0,3	0	0,3
108	4,3	0,3	0	0,3
109	4,3	0,3	0	0,3
110	4,3	0,3	0	0,3
111	4,3	0,3	0	0,3
112	4,3	0,3	0	0,3
113	4,3	0,3	0	0,3
114	4,3	0,3	0	0,3
115	4,3	0,3	0	0,3
116	4,3	0,3	0	0,3
117	4,3	0,3	0	0,3
118	4,3	0,3	0	0,3
119	4,3	0,3	0	0,3
120	4,3	0,3	0	0,3
121	4,3	0,3	0	0,3
122	4,3	0,3	0	0,3
123	4,3	0,2	0	12,3



Przesunięcie procesu wystąpiło w 11 obserwacji, zostało wykryte w 21 obserwacji, tzn. po 10 obserwacjach, wynik jest zgodny z otrzymaną wartością $ARL1 = 10,3$.

CuSum pojedynczych obserwacji – modyfikacje

Standaryzowana karta CuSum

Na karcie pokazywane są wyniki standaryzowane, tzn.: $y_i = (x_i - \mu_0)/\sigma$ (średnia i odchylenie standardowe procesu po przekształceniu wynoszą: $\mu_0 = 0$ i $\sigma = 1$), karta CuSum budowana jest w oparciu o zależności:

$$C_i^+ = \max\left(0, C_{i-1}^+ + y_i - \frac{1}{2}k^*\right) \qquad C_i^- = \max\left(0, C_{i-1}^- - \frac{1}{2}k^* - y_i\right)$$

Modyfikacja startu – procedura FIR (ang. Fast Initial Response) lub Headstart

Zamiast domyślnych wartości $C_0^+ = C_0^- = 0$, przyjmuje się wartości różne od zera, zwykle:

$$C_0^+ = C_0^- = \frac{1}{2}H.$$

Modyfikacja ta nie ma większego znaczenia w przypadku procesu statystycznie uregulowanego, a znacznie przyspiesza reakcję karty dla procesu nieuregulowanego.

ARL dla $k^* = 1$ i $h = 5$											
ARL	k	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	4
CuSum		465	139	38	17	10,4	5,75	4,01	3,11	2,57	2,01
CuSum (FIR)		430	122	28,7	11,2	6,35	3,37	2,36	1,86	1,54	1,16

CuSum pojedynczych obserwacji z FIR

Porównanie standardowej karty CuSum i karty CuSum z FIR

- w tabelach a) i b) proces jest monitorowany od pomiaru 20 (wcześniej pokazano, że $C_{21} > UCL$), rozregulowanie procesu jest wykrywane po przeanalizowaniu:

karta CuSum bez FIR: 10 pomiarów ($C_{30} > UCL$), CuSum z FIR: 3 pomiarów ($C_{23} > UCL$),

- w tabelach c) i d) proces jest monitorowany zaczynając od pomiaru 1 (wcześniej pokazano, że na początku proces był statystycznie stabilny), wyzerowanie niezerowej początkowej wartości sumy C_i^+ nastąpiło już przy 2. pomiarze, a wyzerowanie C_i^- przy pomiarze 7.

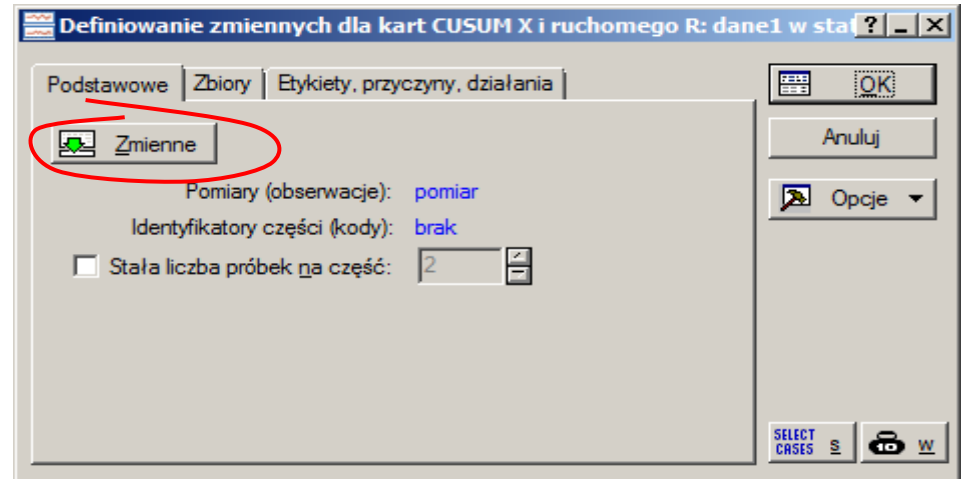
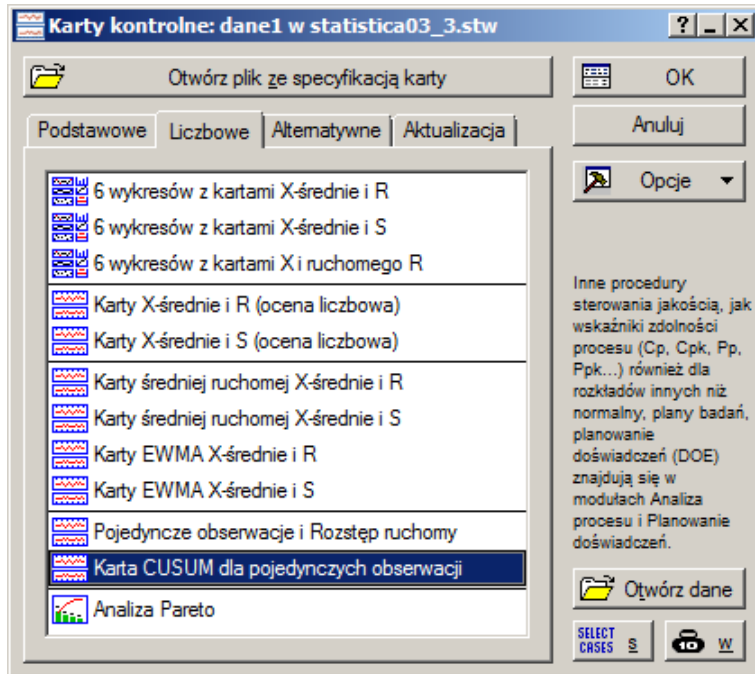
a) CuSum bez FIR				
nr	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
20	6,5	1	0	1
21	7	2,5	0	2,5
22	5,1	2,1	0	2,1
23	7,1	3,7	0	3,7
24	5,1	3,3	0	3,3
25	5	2,8	0	2,8
26	6,4	3,7	0	3,7
27	5,5	3,7	0	3,7
28	5,4	3,6	0	3,6
29	6,9	5	0	5
30	8,1	7,6	0	7,6

b) CuSum z FIR				
nr	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
20	6,5	3,5	0,5	3,5
21	7	5	0	5
22	5,1	4,6	0	4,6
23	7,1	6,2	0	6,2

c) CuSum bez FIR				
nr	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
1	3,6	0	0,9	-0,9
2	4,9	0	0,5	-0,5
3	5,6	0,1	0	0,1
4	5,4	0	0	0
5	4,8	0	0	0
6	4,9	0	0	0
7	6,9	1,4	0	1,4

d) CuSum z FIR				
nr	x_i	C_i^+	C_i^-	C_i
1	3,6	0,6	3,4	-3,4
2	4,9	0	3	-3
3	5,6	0,1	1,9	-1,9
4	5,4	0	1	-1
5	4,8	0	0,7	-0,7
6	4,9	0	0,3	-0,3
7	6,9	1,4	0	1,4

STATISTICA – karta *CuSum* pojedynczych obserwacji



STATISTICA – karta *CuSum* pojedynczych obserwacji

CUSUM: pomiar: dane1 w statistica

Zbiory | Eksploracja | Raport
Karty | Specyf. X | Specyf. R/S

Specyfikacje dla karty X

Zbiór << >> Ogól próbek (domyślny)

Linia centralna: 5,0000 $\leftarrow \mu_0$

Sigma: 1,0000 $\leftarrow \sigma$

UCL: 5,0000 * S $\leftarrow h$

LCL: -5,0000 * S

Linie ostrzegawcze:

Otwórz specyf.

Linia średniej ruchomej:

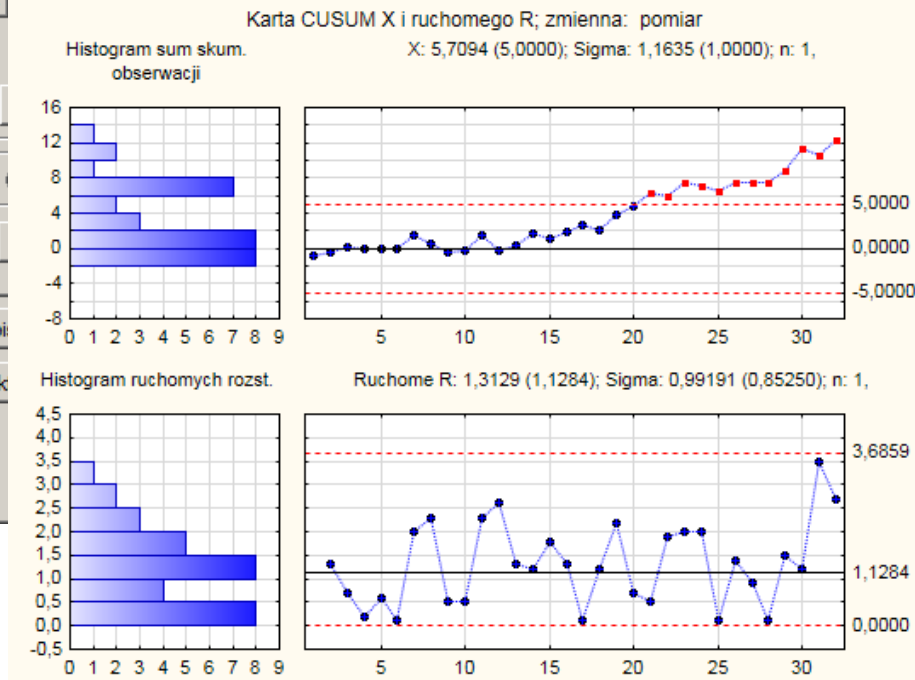
Zdolność procesu

Opcje... Zapisz

Eksploruj... Aktualizuj

Zabezpiecz

Grupami



CUSUM: pomiar: dane1 w statistica

Zbiory | Eksploracja | Raport
Karty | Specyf. X | Specyf. R/S

6 wykresów | Skład 6 wykres.

X (MA..) i R/S | X | R/S

Opisowe | Odstające

Sprawdź alamy

Histogr. X (MA..) | Histogram R/S

Testy konfig.

Zdolność procesu

Histogram | Podsumowanie

Wykryj przesun. większe od 1,0000*Sigma $\leftarrow k^*$

Opcje... Zapisz jako... Anuluj

Eksploruj... Aktualizuj

Zabezpiecz

Grupami

Karta EWMA (ang. *Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*) to tzw. karta wykładniczo ważonych średnich ruchomych, pozwala na analizę odchyleń od wartości założonej:

- do obserwacji pojedynczych pomiarów ($n = 1$)
- dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$)

Każdy punkt karty z_i odpowiada **średniej wykładniczej** liczonej ze wzoru:

- w karcie dla pojedynczych obserwacji:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1},$$

- w karcie dla próbek:

$$z_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)z_{i-1},$$

gdzie: x_i – i -ta obserwacja, \bar{x}_i – średnia w i -tej próbce, λ – parametr karty, $0 < \lambda < 1$,

z_i – wartość średniej wykładniczej obliczona dla pierwszych i obserwacji,

z_0 – początkowa wartość średniej, przyjmuje się ją jako:

- równą założonej wartości docelowej, tzn. $z_0 = \mu_0$
- równą średniej procesu przybliżonej na podstawie obserwacji, tzn. $z_0 = \bar{x}$

Karta EWMA – analiza zależności

Zależność:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1},$$

można rozwinąć pozbywając się z prawej strony średniej z_{i-1} :

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)(\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}) = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2},$$

kontynuując powyższy sposób postępowania dla z_{i-2}, \dots, z_1 , otrzymuje się:

$$z_i = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 x_{i-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1} x_1 + (1 - \lambda)^i z_0$$

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0.$$

Punkt z_i jest sumą ważoną wszystkich dotychczasowych obserwacji.

obserwacja	waga
bieżąca	λ
poprzednia	$\lambda(1 - \lambda)$
poprzedzająca poprzednią	$\lambda(1 - \lambda)^2$
pierwsza	$\lambda(1 - \lambda)^{i-1}$

Karta EWMA – analiza zależności

$$z_i = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 x_{i-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1} x_1 + (1 - \lambda)^i z_0$$

Wagi tworzą ciąg geometryczny postaci

$$a_i = a_{i-1} q,$$

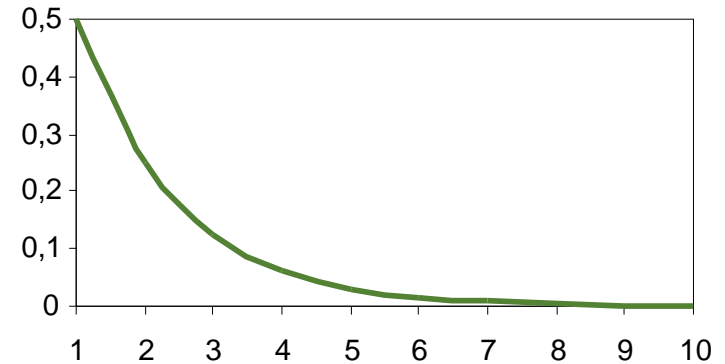
gdzie:

$$a_1 = \lambda \text{ i } q = (1 - \lambda),$$

$$\text{dla } 0 < \lambda < 1: \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0.$$

Własności z_i :

- średnia ważona wszystkich obserwacji z wagami malejącymi w postępie geometrycznym,
- największy wpływ na wartość średniej z_i ma wartość ostatniej obserwacji – ma największą wagę,
- najmniejszy wpływ ma pierwsza obserwacja, której waga jest najmniejsza.



Wagi kolejnych obserwacji dla $\lambda = 0,5$, oś pozioma to nr obserwacji: 1 – bieżąca, 2 – poprzednia, ...

Karta EWMA – własności statystyki z_i

Wartość oczekiwaną statystyki

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0$$

wyznacza się jako:

$$\begin{aligned} E(z_i) &= E\left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0\right) = E\left(\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1 - \lambda)^j x_{i-j}\right) + (1 - \lambda)^i E(z_0) = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1 - \lambda)^j E(x_{i-j}) + (1 - \lambda)^i E(z_0) \end{aligned}$$

Przyjmując, że $z_0 = \mu_0$ i $E(x_i) = \mu_0$ otrzymuje się:

$$E(z_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1 - \lambda)^j \mu_0 + (1 - \lambda)^i \mu_0 = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1 - \lambda)^j + (1 - \lambda)^i\right) \mu_0$$

dodatkowo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1 - \lambda)^j + (1 - \lambda)^i &= \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda)^i)}{1 - (1 - \lambda)} + (1 - \lambda)^i = \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda)^i)}{\lambda} + (1 - \lambda)^i \\ &= 1 - (1 - \lambda)^i + (1 - \lambda)^i = 1, \end{aligned}$$

więc: $E(z_i) = \mu_0$.

Karta EWMA – własności statystyki z_i

Wariancję statystyki

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0$$

wyznacza się jako:

$$\begin{aligned} D^2(z_i) &= D^2 \left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0 \right) = D^2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} \lambda (1 - \lambda)^j x_{i-j} \right) + (1 - \lambda)^i D^2(z_0) = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1 - \lambda)^{2j} D^2(x_{i-j}) + (1 - \lambda)^i D^2(z_0) = \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1 - \lambda)^{2j} D^2(x_{i-j}) \end{aligned}$$

Przyjmując, że $D^2(x_i) = \sigma^2$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} D^2(z_i) &= \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1 - \lambda)^{2j} \sigma^2 = \sigma^2 \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^{2j} = \sigma^2 \lambda^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2i}}{1 - (1 - \lambda)^2} = \sigma^2 \lambda^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2i}}{1 - (1 - 2\lambda + \lambda^2)} = \\ &= \sigma^2 \lambda^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2i}}{2\lambda - \lambda^2} = \sigma^2 \frac{\lambda^2}{\lambda(2 - \lambda)} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) = \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i}), \\ D^2(z_i) &= \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i}). \end{aligned}$$

Dodatkowo, dla $i \rightarrow \infty$: $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) = \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda}$, więc: $D^2(z_i) = \sigma^2 \frac{\lambda}{2 - \lambda}$.

EWMA pojedynczych obserwacji – ARL

Czułość karty zależy od parametrów λ i L . Tabela zawiera zestawienie wartości wskaźników *ARL* dla wybranych parametrów i oraz określonego przesunięcia procesu^[1].

k	$L = 3,054$ $\lambda = 0,40$	$L = 2,998$ $\lambda = 0,25$	$L = 2,962$ $\lambda = 0,20$	$L = 2,814$ $\lambda = 0,10$	$L = 2,615$ $\lambda = 0,05$
0	500	500	500	500	500
0,25	224	170	150	106	84,1
0,50	71,2	48,2	41,8	31,3	28,8
0,75	28,4	20,1	18,2	15,9	16,4
1,00	14,3	11,1	10,5	10,3	11,4
1,50	5,9	5,5	5,5	6,1	7,1
2,00	3,5	3,6	3,7	4,4	5,2
2,50	2,5	2,7	2,9	3,4	4,2
3,00	2,0	2,3	2,4	2,9	3,5
4,00	1,4	1,7	1,9	2,2	2,7

Wpływ parametrów λ i L :

- mniejsze wartości λ pozwalają na szybsze wykrycie małych przesunięć procesu,
- parametr $L = 3$ może być wykorzystywany z większymi wartościami λ , dla wartości $\lambda \leq 0,1$ należy wybierać $L \in [2,6, 2,8]$.

W praktyce najczęściej wykorzystywane są λ równe 0,05, 0,1 i 0,2.

^[1]Montgomery D., Introduction to Statistical Quality Control – John Wiley & Sons, New York 2009

EWMA pojedynczych obserwacji (podsumowanie)

Wykres postępu

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1},$$

gdzie: λ – parametr karty, $0 < \lambda < 1$.

Linie kontrolne

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})} \quad CL = \mu_0 \quad UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})}$$

gdzie: L – odległość granic kontrolnych od linii środkowej wyrażona w jednostkach σ , zwykle $L = 3$.

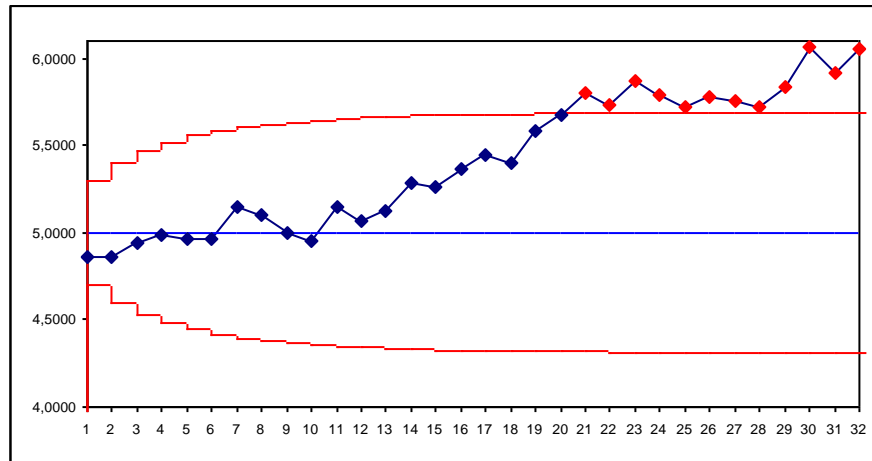
Uwagi

Ze względu na to, że na karcie odkładane są ważone średnie wszystkich obserwacji karta jest mniej wrażliwa na rozkład danych monitorowanej wartości (skuteczność karty została potwierdzona również dla danych o rozkładach bardziej skośnych czy bardziej spłaszczonych w stosunku do rozkładu normalnego).

Karta *EWMA* pojedynczych obserwacji

Wykonaj analizę procesu z analizowanego przykładu przy pomocy karty *EWMA* pojedynczych obserwacji. Należy założyć, że: $\mu_0 = 5$, $\sigma = 1$, $\lambda = 0,1$ i $L = 3$.

Wyniki obliczeń zostały zebrane w tabeli obok, rysunek przedstawia gotową kartę *EWMA*.

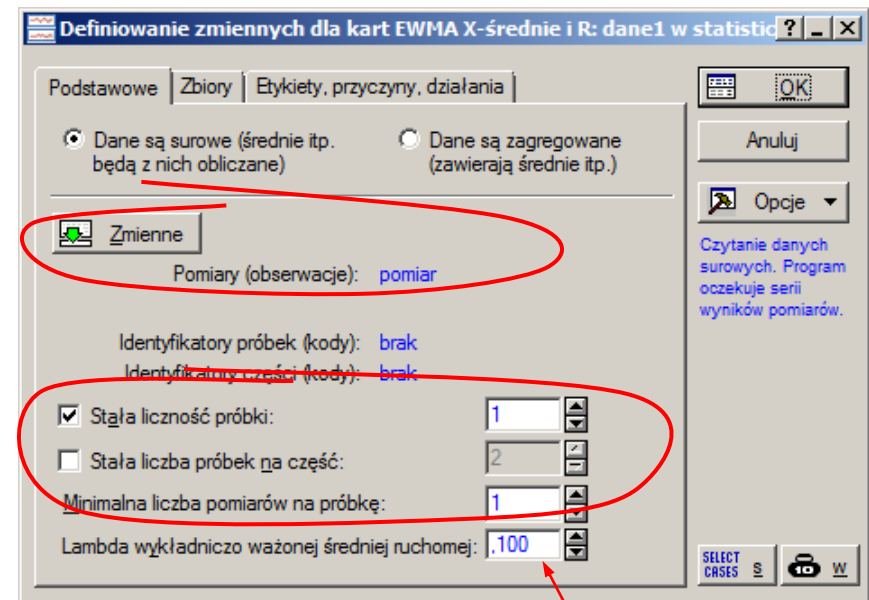
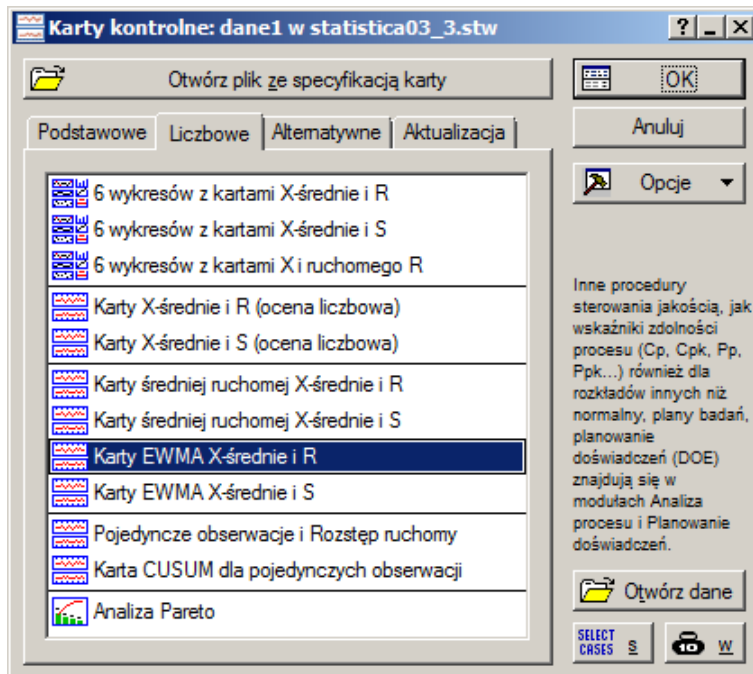


nr	x_i	z_i	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>
1	3,6	4,8600	5,3000	4,7000
2	4,9	4,8640	5,4036	4,5964
3	5,6	4,9376	5,4711	4,5289
4	5,4	4,9838	5,5194	4,4806
5	4,8	4,9655	5,5554	4,4446
6	4,9	4,9589	5,5830	4,4170
7	6,9	5,1530	5,6044	4,3956
8	4,6	5,0977	5,6212	4,3788
9	4,1	4,9979	5,6345	4,3655
10	4,6	4,9582	5,6451	4,3549
11	6,9	5,1523	5,6535	4,3465
12	4,3	5,0671	5,6602	4,3398
13	5,6	5,1204	5,6656	4,3344
14	6,8	5,2884	5,6700	4,3300
15	5	5,2595	5,6735	4,3265
16	6,3	5,3636	5,6763	4,3237
17	6,2	5,4472	5,6786	4,3214
18	5	5,4025	5,6805	4,3195
19	7,2	5,5822	5,6819	4,3181
20	6,5	5,6740	5,6831	4,3169
...
32	7,3	6,0561	5,6878	4,3122

Karta *EWMA* zareagowała na przesunięcie procesu identycznie jak karta *CuSum*, tzn. w 21 obserwacji. Do wykrycia przesunięcia o 1σ potrzebnych więc było 10 obserwacji.

Wartość ta odpowiada odczytanej z tabeli z wartościami *ARL* dla $k = 1$, $\lambda = 0,1$ i $L = 2,814$.

STATISTICA – karta EWMA



ustawienia jak w przykładzie, tzn. dla karty pojedynczych obserwacji

λ

STATISTICA – karta EWMA

EWMA/MR pomiar: dane1 w statist

Zbiory Eksploracja Raport
Karty Specyf. X Specyf. R/S

Specyfikacja dla karty X

Zbiór << >> **Ogól próbek (domyślny)**

Linia centralna: 5,0000

Sigma: 1,0000

UCL: $3,0000 * S$

LCL: $-3,0000 * S$

Linie ostrzegawcze: brak

Otwórz specyf. Zapisz specyf.

Zdolność procesu Testy konfigur.

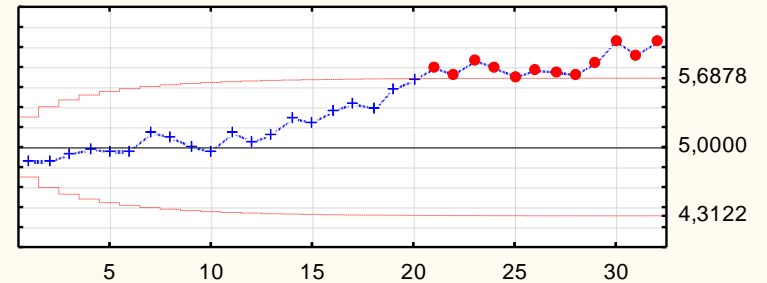
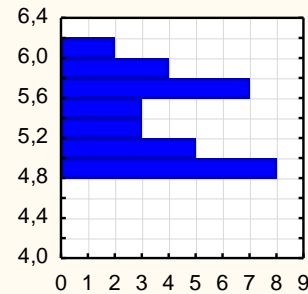
Opcje... Zapisz jako... Anuluj

Eksploruj... Aktualizuj

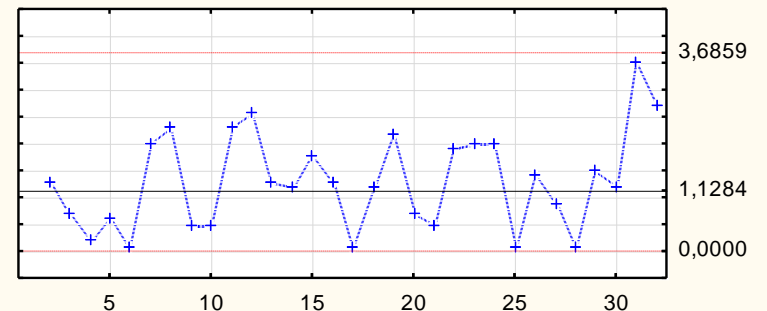
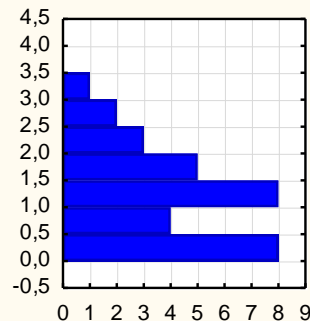
Zabezpiecz

Grupami

Karta EWMA X i ruchomego R; zmienna: pomiar
Histogram obserwacji EWMA EWMA X: 5,7094 (5,0000); Sigma: 1,1635 (1,0000); n: 1,0000;
Lambda: 0,1



Histogram ruchomych rozst. Ruchome R: 1,3129 (1,1284); Sigma: 0,99191 (0,85250); n: 1,



Karta MA (ang. *Moving Average Control Chart*) to tzw. karta średnich ruchomych, pozwala na analizę odchyłeń od wartości założonej:

- do obserwacji pojedynczych pomiarów ($n = 1$),
- dla próbek o ustalonej liczności ($n > 1$).

Każdy punkt karty M_i odpowiada średniej liczonej ze wzoru:

- w karcie dla pojedynczych obserwacji:

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-w+1}}{w}$$

- w karcie dla próbek:

$$M_i = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_{i-1} + \dots + \bar{x}_{i-w+1}}{w}$$

gdzie:

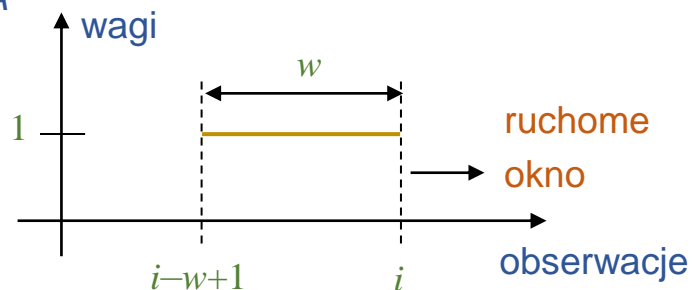
x_i – i -ta obserwacja, \bar{x}_i – średnia w i -tej próbce,

w – parametr karty określający szerokość okna karty, na początku w jest zmienne, po osiągnięciu ustalonej szerokości pozostaje stałe.

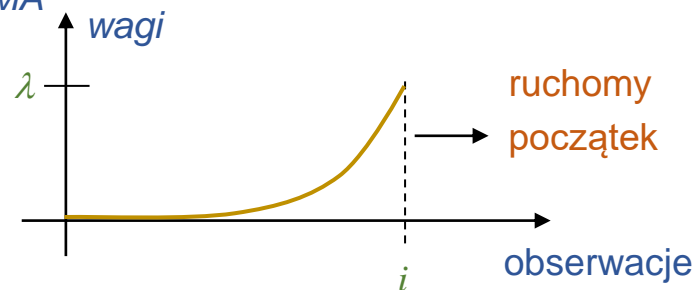
Karta MA

Karta *MA* jest zmodyfikowaną wersją karty *EWMA*, w której wszystkie obserwacje mają wagę równą 1, ale starsze obserwacje są systematycznie zastępowane nowymi.

karta MA



karta EWMA



Karta MA ($w = 4$)

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

Karta EWMA

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3,6	4,9	5,6	5,4	4,8	4,9	4,1

Karta MA pojedynczych obserwacji

Wykres postępu

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-w+1}}{w}$$

Linie kontrolne

$i < w$	$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{i}}$	$CL = \mu_0$	$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{i}}$
$i \geq w$	$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{w}}$		$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{w}}$

Karta MA dla próbek (n – liczebność próbki)

Wykres postępu

$$M_i = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_{i-1} + \dots + \bar{x}_{i-w+1}}{w}$$

Linie kontrolne

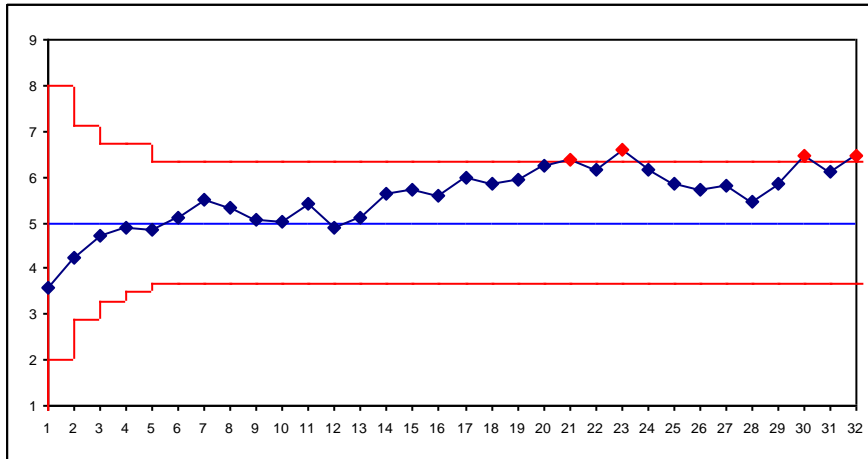
$i < w$	$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{ni}}$	$CL = \mu_0$	$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{ni}}$
$i \geq w$	$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{nw}}$		$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{nw}}$

gdzie: w – szerokość okna, L – odległość granic kontrolnych wyrażona σ , zwykle $L = 3$.

Karta *MA* pojedynczych obserwacji

Wykonaj analizę procesu z analizowanego przykładu przy pomocy karty *MA* pojedynczych obserwacji. Należy założyć, że: $\mu_0 = 5$, $\sigma = 1$, $w = 5$ i $L = 3$.

Wyniki obliczeń zostały zebrane w tabeli obok, rysunek przedstawia gotową kartę *MA*.

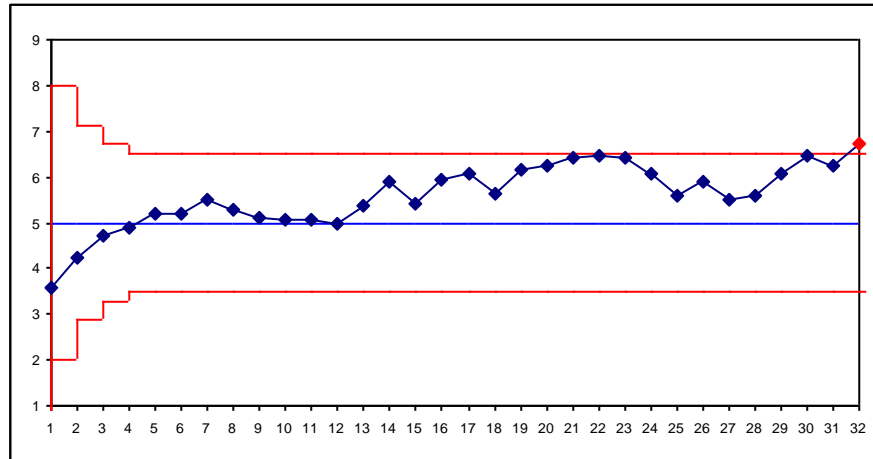


Karta *MA* zareagowała na przesunięcie procesu identycznie jak karta *CuSum* i *EWMA*, tzn. w 21 obserwacji. Do wykrycia przesunięcia o 1σ potrzebnych więc było 10 obserwacji. Czulość karty zależy od szerokości okna – a kolejnym slajdzie wykreślona została karta dla okna o rozmiarze $w = 4$.

nr	x_i	M_i	<i>UCL</i>	<i>LCL</i>
1	3,6	3,60	8,0000	2,0000
2	4,9	4,25	7,1213	2,8787
3	5,6	4,70	6,7321	3,2679
4	5,4	4,88	6,7321	3,5000
5	4,8	4,86	6,3416	3,6584
6	4,9	5,12	6,3416	3,6584
7	6,9	5,52	6,3416	3,6584
8	4,6	5,32	6,3416	3,6584
9	4,1	5,06	6,3416	3,6584
10	4,6	5,02	6,3416	3,6584
11	6,9	5,42	6,3416	3,6584
12	4,3	4,90	6,3416	3,6584
13	5,6	5,10	6,3416	3,6584
14	6,8	5,64	6,3416	3,6584
15	5	5,72	6,3416	3,6584
16	6,3	5,60	6,3416	3,6584
17	6,2	5,98	6,3416	3,6584
18	5	5,86	6,3416	3,6584
19	7,2	5,94	6,3416	3,6584
20	6,5	6,24	6,3416	3,6584
...
32	7,3	6,46	6,3416	3,6584

Karta *MA* pojedynczych obserwacji

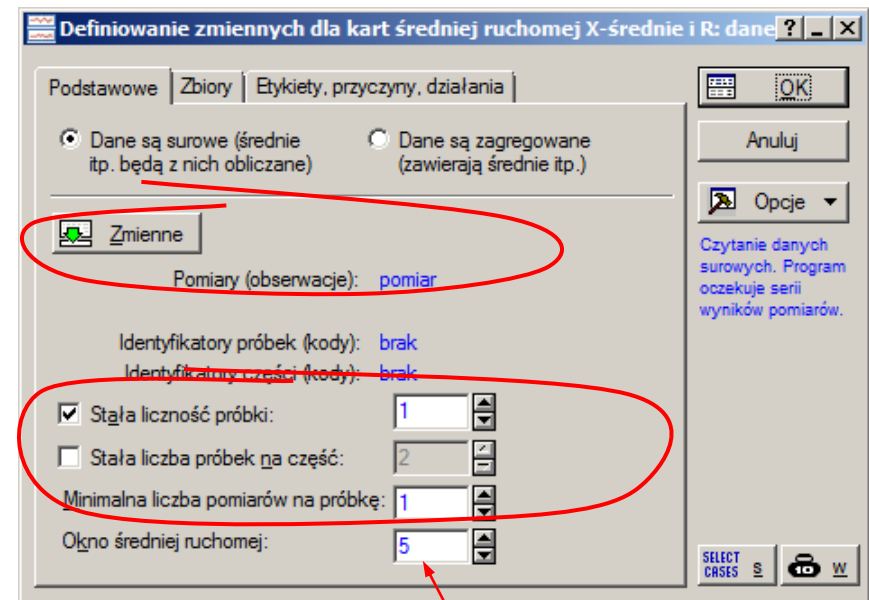
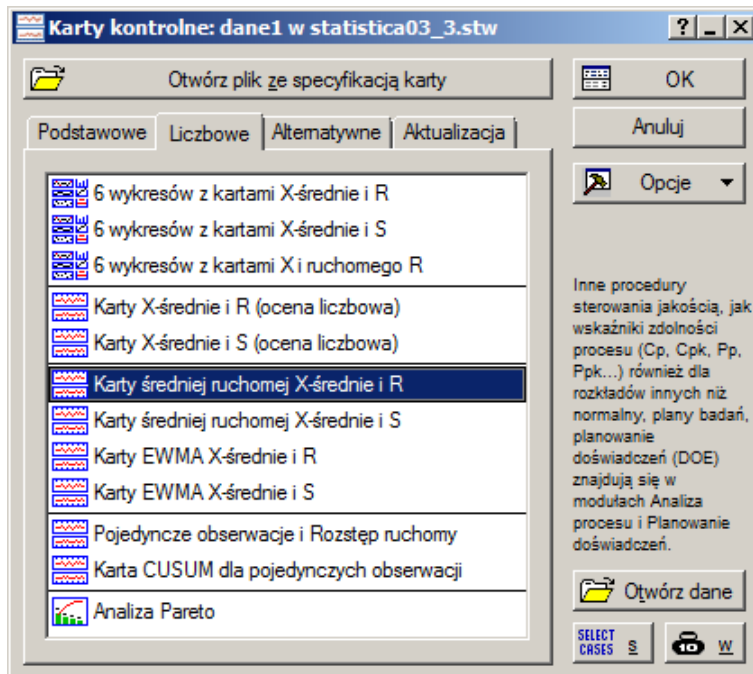
Wyniki obliczeń dla analizowanego procesu dla okna o szerokości $w = 4$ zostały zebrane w tabeli obok, rysunek przedstawia gotową kartę *MA*.



Karta *MA* z oknem o szerokości $w = 4$ wykryła rozregulowania procesu dopiero w ostatniej obserwacji, tzn. do wykrycia przesunięcia procesu o 1σ potrzebnych więc było 21 obserwacji.

nr	x_i	M_i	UCL	LCL
1	3,6	3,600	8,0000	2,0000
2	4,9	4,250	7,1213	2,8787
3	5,6	4,700	6,7321	3,2679
4	5,4	4,875	6,5000	3,5000
5	4,8	5,175	6,5000	3,5000
6	4,9	5,175	6,5000	3,5000
7	6,9	5,500	6,5000	3,5000
8	4,6	5,300	6,5000	3,5000
9	4,1	5,125	6,5000	3,5000
10	4,6	5,050	6,5000	3,5000
11	6,9	5,050	6,5000	3,5000
12	4,3	4,975	6,5000	3,5000
13	5,6	5,350	6,5000	3,5000
14	6,8	5,900	6,5000	3,5000
15	5	5,425	6,5000	3,5000
16	6,3	5,925	6,5000	3,5000
17	6,2	6,075	6,5000	3,5000
18	5	5,625	6,5000	3,5000
19	7,2	6,175	6,5000	3,5000
20	6,5	6,225	6,5000	3,5000
...
32	7,3	6,725	6,5000	3,5000

STATISTICA – karta MA



ustawienia jak w przykładzie, tzn. dla karty pojedynczych obserwacji

W

MA/MR: pomiar: dane1 w statistica

Zbiory | Eksploracja | Raport
Karty | Specyf. X | Specyf. R/S

Specyfikacje dla karty X

Zbiór << >> Ogól próbek (domyślny)

Linia centralna: 5,0000

Sigma: 1,0000

UCL: 3,0000 * S

LCL: -3,0000 * S

Linie ostrzegawcze: brak

Otwórz specyf. | Zapisz specyf.

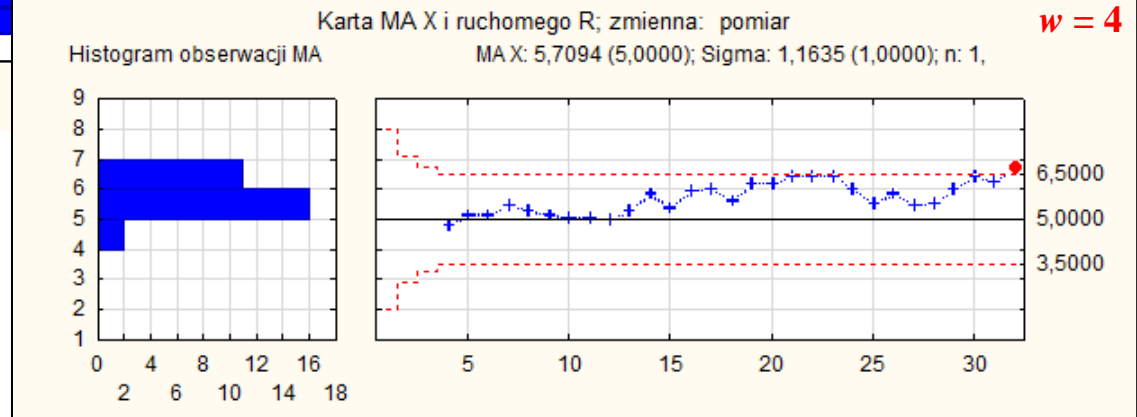
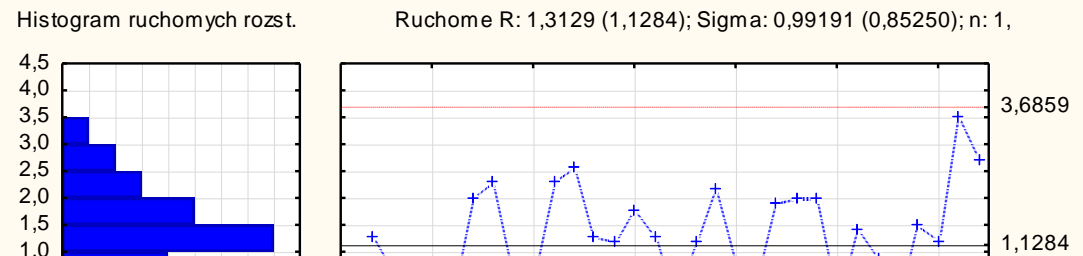
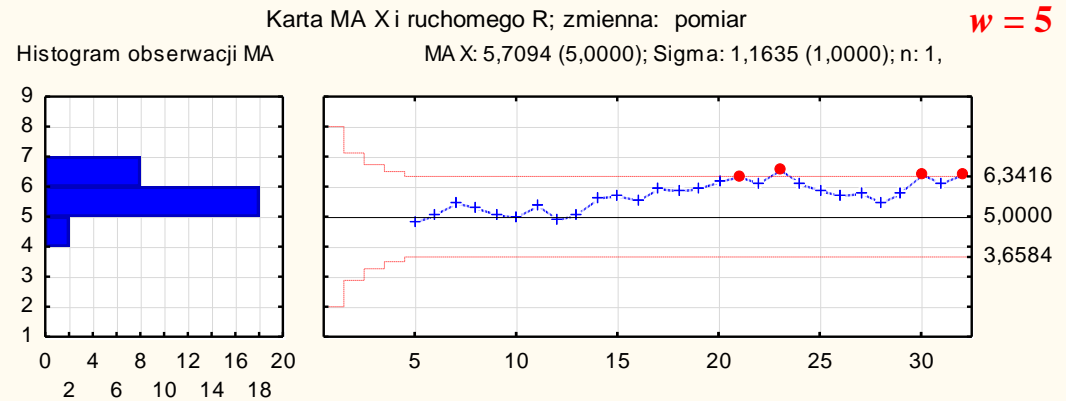
Zdolność procesu | Testy konfigur.

Opcje... | Zapisz jako... | Anuluj

Eksploruj... | Aktualizuj

Zabezpiecz

Grupami



Monitorowanie położenia procesu

Karty *CuSum*, *EWMA* i *MA* umożliwiają monitorowanie zmian średniej procesu.

Podobnie do klasycznych kart Shewharta mogą być łączone z kartami monitorującymi zmiany rozproszenia procesu.

Monitorowanie rozproszenia procesu

Karty *CuSum*, *EWMA* i *MA*

- dla próbek ($n > 1$) łączone są z klasycznymi kartami *R* i *S*
- karty pojedynczych obserwacji ($n = 1$) łączone są z kartą *MR*.

Karta MR (ang. *Moving Range Control Chart*) to tzw. karta ruchomego rozstępu. Karta ta pozwala na obserwację zmian tzw. ruchomego rozstępu definiowanego jako:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|.$$

Linie kontrolne

Sposób wyznaczania parametrów karty zależy od tego czy parametry monitorowanego procesu są zadane czy też są estymowane.

Dla estymowanych parametrów procesu granice wyznacza się jako:

$$LCL = D_3 \overline{MR}$$

$$CL = \overline{MR}$$

$$UCL = D_4 \overline{MR}$$

dla ustalonego odchylenia standardowego σ

$$LCL = D_3 d_2 \sigma$$

$$CL = d_2 \sigma$$

$$UCL = D_4 d_2 \sigma$$

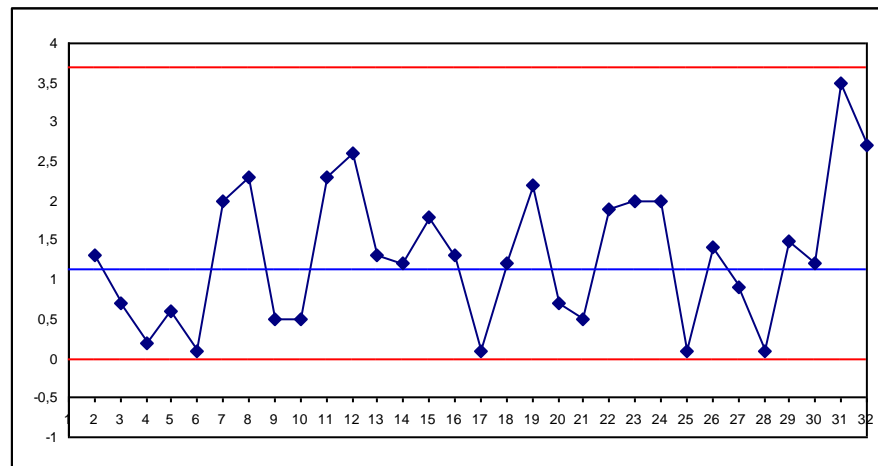
gdzie: wartości funkcji współczynników statystycznych odczytuje się z tablic dla $n = 2$, tzn.: $d_2 = 1,128$, $D_3 = 0$ i $D_4 = 3,267$.

Wykonaj analizę procesu z analizowanego przykładu przy pomocy karty *MR*. Należy założyć, że: $\mu_0 = 5, \sigma = 1$

Obliczone wartości ruchomego rozstępu zostały zebrane w tabeli obok, poniżej wyznaczone zostały parametry karty:

$$CL = d_2\sigma = 1,128 \cdot 1 = 1,128$$

$$LCL = D_3d_2\sigma = 0 \cdot 1,128 \cdot 1 = 0, \quad UCL = D_4d_2\sigma = 3,267 \cdot 1,128 \cdot 1 \approx 3,6852$$



nr	x_i	MR_i
1	3,6	
2	4,9	1,3
3	5,6	0,7
4	5,4	0,2
5	4,8	0,6
6	4,9	0,1
7	6,9	2,0
8	4,6	2,3
9	4,1	0,5
10	4,6	0,5
11	6,9	2,3
12	4,3	2,6
13	5,6	1,3
14	6,8	1,2
15	5	1,8
16	6,3	1,3
17	6,2	0,1
18	5	1,2
19	7,2	2,2
20	6,5	0,7
...
32	7,3	2,7

Karta *MR* nie dała sygnału o rozregulowaniu procesu (pierwszych 10 wyników wylosowano z rozkładu $\mathcal{N}(5,1)$, pozostałe symulowały przesunięcie procesu o 1σ i zostały wylosowane z rozkładu $\mathcal{N}(6,1)$ – odchylenie standardowe procesu nie uległo więc zmianie). *Uwaga!* W STATISTICE karta *MR* wykreślana jest przy okazji każdej omówionej sekwencyjnej karty pojedynczych obserwacji.