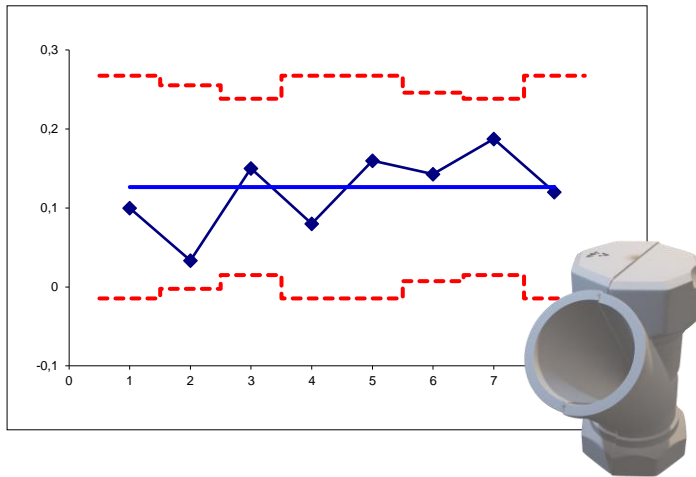


Sterowanie jakością

Karty kontrolne dla cech dyskretnych *p, np, c i u*



Materiały

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

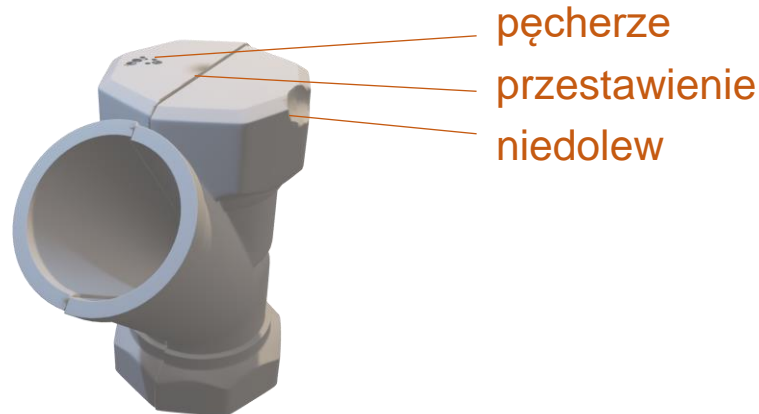
Niezgodności i wyroby niezgodne

Niezgodność to niespełnienie wymagania, czyli niespełnienie potrzeby lub oczekiwania, które zostało ustalone, przyjęte zwyczajowo lub jest obowiązkowe (ISO 9000:2005).

niezgodność \approx wada

wyrób niezgodny

niezgodności



Wyrób niezgodny to wyrób nie spełniający wyspecyfikowanych wymagań, wyrób w którym została stwierdzona co najmniej jedna niezgodność.

Karty kontrolne dla cech dyskretnych

Dla danych otrzymywanych w wyniku zliczania liczby lub częstości występowania jakiegoś zdarzenia (np. wadliwego produktu) stosowane są tzw. **karty alternatywne**.

	próby o zmiennej liczności	próby o stałej liczności
karty dla wyrobów niezgodnych wykorzystywany rozkład dwumianowy	karta p	karta np
karty dla niezgodności wykorzystywany rozkład Poissona	karta u	karta c

Karty kontrolne dla cech dyskretnych

Do kontroli wadliwości w przypadku gdy wyrób oceniany jest jako zgodny lub niezgodny (ocena przyjmuje dwie wartości: jest lub nie ma wady) stosowane są *karty: p i np* .

Karta np

karta przedstawia zmiany *liczby wyrobów wadliwych* w kolejnych próbkach

Karta p

karta przedstawia zmiany *proporcji wyrobów wadliwych* do ilości sprawdzonych produktów dla serii próbek

Uwaga!

- Zalecane są próbki o liczebności co najmniej **50**.
- Karty są oparte na rozkładzie dwumianowym, mogą być stosowane, gdy wyrobów niezgodnych jest więcej niż **5%**.

Każdy punkt p_i na karcie p przedstawia proporcję produktów niezgodnych (ilość wadliwych do rozmiaru próbki). Zakładając, że:

- proces wytwarzania jest stabilny, tzn. prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego produktu wynosi p
- wykonanie danego produktu w próbce nie jest zależne od pozostałych

można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę wyrobów niezgodnych jest rozkładem dwumianowym (lub inaczej r. Bernoulliego) $B(n, p)$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie d wyrobów wadliwych w n elementowej próbie wyznacza się jako

$$P(d) = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}$$

Średnia i wariancja rozkładu $B(n, p)$ wynoszą:

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p).$$

Dla dostatecznie dużych n rozkład $B(n, p)$ może być aproksymowany rozkładem

$$\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Rozkład zmiennej losowej reprezentującej proporcję produktów niezgodnych jest zbieżny do:

$$\mathcal{N}\left(p, \sqrt{p(1-p)/n}\right).$$

Dla procesu o nieznannej wadliwości, wadliwość tą można estymować w oparciu o dostępne dane. Niech m_i oznacza ilość wadliwych produktów w i -tej próbkce a n_i jej liczebność. Proporcja produktów wadliwych w tej próbkce wynosi więc

$$p_i = \frac{m_i}{n_i}$$

Biorąc pod uwagę cały dostępny zbiór danych, prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego produktu można oszacować jako stosunek łącznej liczby wad (we wszystkich k próbkach) do łącznej liczby elementów:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

lub jeśli $n_i = n$

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{kn} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}.$$

Wykres postępu

$$p_i = \frac{m_i}{n} \quad \text{lub} \quad p_i = \frac{m_i}{n_i}$$

Linie kontrolne

dla znanej wadliwości procesu:

$$LCL = p - L\sqrt{p(1-p)/n} \quad CL = p \quad UCL = p + L\sqrt{p(1-p)/n}$$

dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o tych samych rozmiarach):

$$LCL = \bar{p} - L\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n} \quad CL = \bar{p} \quad UCL = \bar{p} + L\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}$$

dla próbek o różnych rozmiarach mogą być stosowane 3 różne podejścia →

Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$, przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Karta p – próbki o różnych rozmiarach

1. zmienne granice kontrolne (liczone indywidualnie dla każdej próbki):

$$LCL_i = \bar{p} - L\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n_i} \qquad CL = \bar{p} \qquad UCL_i = \bar{p} + L\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n_i}$$

2. stałe granice kontrolne po standaryzacji wadliwości:

$$LCL = -L \qquad CL = 0 \qquad UCL = L$$

wadliwość standaryzowana: $\hat{p}_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n_i}}$ lub $\hat{p}_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n_i}}$

3. stałe granice kontrolne po uśrednieniu rozmiaru próbki (mogą być stosowane dla małej zmienności próbek)

$$LCL = \bar{p} - L\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/\bar{n}} \qquad CL = \bar{p} \qquad UCL = \bar{p} + L\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/\bar{n}}$$

gdzie $\bar{n} = \sum_{i=1}^k n_i$

Karta p – zasady doboru n

1. liczność próbek nie może być zbyt mała

niech $p = 0,01$, $n = 5$, $L = 3$ i $m_i = 1$, wtedy:

$$p_i = \frac{m_i}{n} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad UCL = p + L \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,01 + 3 \sqrt{\frac{0,01(1-0,01)}{5}} \approx 0,1445.$$

parametr n jest źle dobrany – wystąpienie pojedynczego elementu wadliwego powoduje przekroczenie linii kontrolnej

2. liczność próbki musi być na tyle duża, żeby prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jednego wadliwego produktu było duże

zakładając, że prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jednego wadliwego produktu w próbce wynosi np. 0,9, tzn.: $P(m_i \geq 1) \geq 0,9$.

po przekształceniach otrzymuje się kolejno

$$\begin{aligned} 1 - P(m_i < 1) &\geq 0,9 && \rightarrow && 1 - P(m_i = 0) &\geq 0,9 && \rightarrow && P(m_i = 0) &\leq 0,1 && \rightarrow \\ \binom{n}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^n &\leq 0,1 && \rightarrow && 1 \cdot 1 \cdot 0,99^n &\leq 0,1 && \rightarrow && 0,99^n &\leq 0,1 && \rightarrow \\ \log(0,99^n) &\leq \log(0,1) && \rightarrow && n \log(0,99) &\leq \log(0,1) && \rightarrow && n &\geq 229,1 \end{aligned}$$

rozmiar próbki powinien w tym przypadku wynosić $n \geq 230$.

3. liczność próbki można dobrać w taki sposób, żeby przekroczenie określonej proporcji ilości produktów wadliwych miało co najmniej 50% szanse na wykrycie przez kartę*

niech p_0 i p_1 to odpowiednio: dotychczasowy i niedopuszczalny procent produktów wadliwych, linie kontrolne karty zaprojektowane w oparciu o wadliwość p_0 wynoszą: $UCL = p_0 + L\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$, zakładając, że prawdopodobieństwo przekroczenia linii kontrolnej powinno wynosić co najmniej 50% otrzymuje się kolejno:

$$P(p_i \geq UCL) \geq 0,5 \quad \rightarrow \quad 1 - P(p_i < UCL) \geq 0,5 \quad \rightarrow \quad P(p_i < UCL) \leq 0,5 \quad \rightarrow$$

$$F_{\mathcal{N}(p_1, \sigma_1)}(UCL) \leq 0,5 \quad \rightarrow \quad UCL \leq p_1 \quad \rightarrow \quad p_0 + L\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq p_1 \quad \rightarrow$$

$$p_1 - p_0 \geq L\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad \rightarrow \quad n \geq \frac{L^2}{(p_1 - p_0)^2} p_0(1 - p_0)$$

$$\text{np. dla } p_0 = 0,01, p_1 = 0,04, L = 3, n \geq \frac{3^2}{(0,03)^2} \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 99.$$

4. $LCL \geq 0$

liczność próbki powinna być na tyle duża, żeby dolna granica kontrolna była nieujemna tym samym monitorowany na karcie proces ma w rzeczywistości tylko górną linię kontrolną (wykreślane na karcie procenty produktów wadliwych nigdy nie będą liczbami ujemnymi), stąd:

$$\begin{aligned} p - L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \geq 0 & \quad \rightarrow \quad p \geq L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} & \quad \rightarrow \quad \frac{p^2}{L^2} \geq \frac{p(1-p)}{n} & \quad \rightarrow \\ n \geq \frac{L^2}{p^2} p(1-p) & \quad \rightarrow \quad n \geq \frac{L^2}{p} (1-p) \end{aligned}$$

np. dla $p = 0,1$, $L = 3$, wtedy $n > 3^2 \frac{(1-0,1)}{0,1} = 81$.

W tabeli zgromadzono dane dotyczące liczby części odrzuconych w trakcie 8 kontroli. Przeprowadź analizę procesu zakładając, że rozmiary kontrolowanych próbek były równe 60.

Dane: $n = 60, k = 8$.

W kolumnie **frakcja wadliwych** obliczone zostały proporcje produktów wadliwych w każdej próbce. Wadliwość procesu nie jest znana, więc należy ją oszacować:

$$\sum_{i=1}^k m_i = 62 \quad \bar{p} = \frac{62}{8 \cdot 60} \approx 0,129.$$

Linie kontrolne karty wynoszą:

$$UCL = 0,129 + 3\sqrt{0,129 \cdot 0,871/60} \approx 0,259$$

$$LCL = 0,129 - 3\sqrt{0,129 \cdot 0,871/60} \approx -0,001$$

$$\rightarrow LCL = 0$$

narysowana w oparciu o wyznaczone parametry karta p wskazuje, że proces jest statystycznie stabilny

kontrola	liczba wadliwych	frakcja wadliwych
1	5	0,0833
2	2	0,0333
3	12	0,2000
4	4	0,0667
5	8	0,1333
6	10	0,1667
7	15	0,2500
8	6	0,1000
Razem	62	

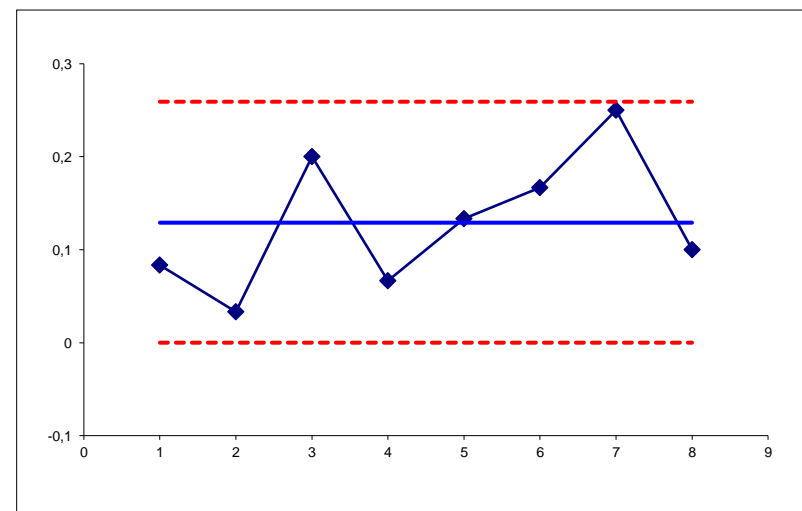


Tabela zawiera dane dotyczące liczby części odrzuconych w trakcie 8 kontroli, w których rozmiary kontrolowanych próbek były różne.

Kolumna **frakcja wadliwych** zawiera obliczone proporcje produktów wadliwych, kolumny **UCL** i **LCL** linie kontrolne (obliczone tak jak poniżej dla próbki nr 1).

Szacowanie wadliwości procesu:

$$\sum_{i=1}^k n_i = 490, \quad \sum_{i=1}^k m_i = 62, \quad \bar{p} = \frac{62}{490} \approx 0,127.$$

Linie kontrolne karty dla próbki nr 1:

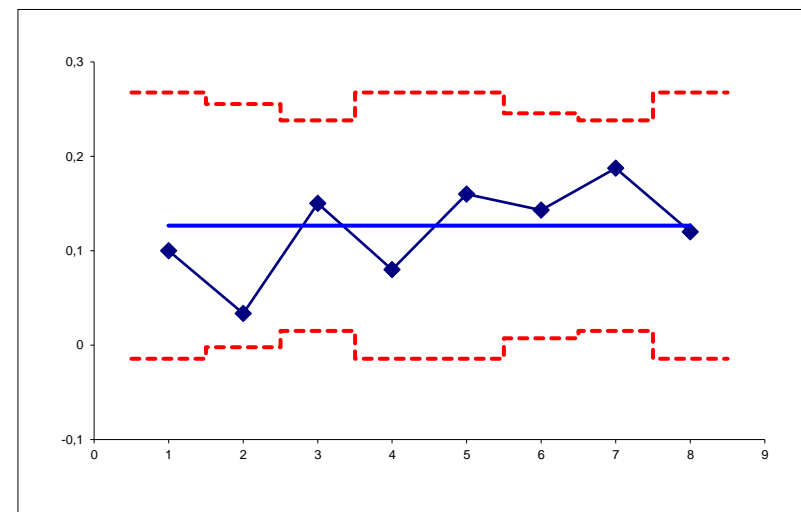
$$UCL_1 = 0,127 + 3 \sqrt{\frac{0,127 \cdot 0,873}{50}} \approx 0,268$$

$$LCL_1 = 0,127 - 3 \sqrt{\frac{0,127 \cdot 0,873}{50}} \approx -0,015$$

$$\rightarrow LCL_1 = 0$$

karta wskazuje na brak niełosowych oddziaływań na proces

kontrola	liczba wadliwych	rozmiar próbki	frakcja wadliwych	LCL	UCL
1	5	50	0,1	-0,015	0,268
2	2	60	0,0333	-0,002	0,255
3	12	80	0,15	0,015	0,238
4	4	50	0,08	-0,015	0,268
5	8	50	0,16	-0,015	0,268
6	10	70	0,1429	0,007	0,246
7	15	80	0,1875	0,015	0,238
8	6	50	0,12	-0,015	0,268
Razem	62	490			

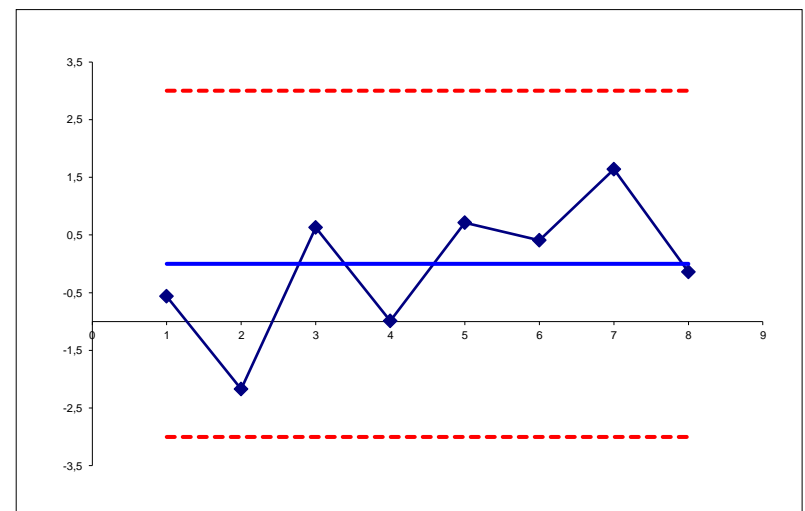


Dla różnych rozmiarów próbek karta p może być przygotowana w wersji standaryzowanej.

Standaryzowaną wadliwości w próbce nr 1 wyznacza się jako:

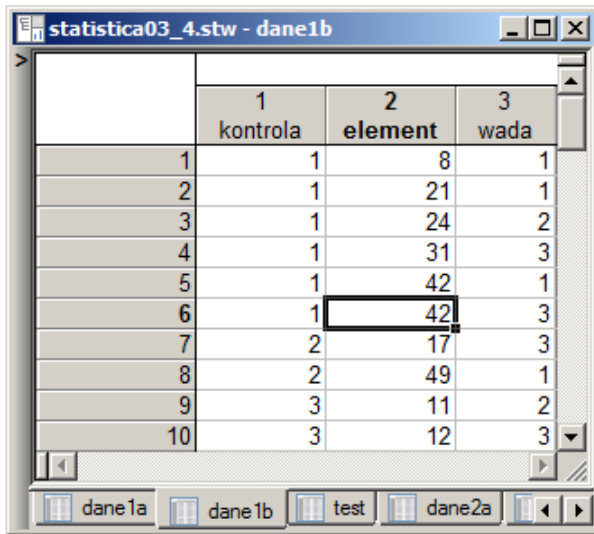
$$\hat{p}_1 = \frac{p_1 - \bar{p}}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1}}} = \frac{0,1 - 0,127}{\sqrt{\frac{0,127(1-0,127)}{50}}} \approx -0,5643$$

kontrola	liczba wadliwych	rozmiar próbki	frakcja wadliwych	standaryz.
1	5	50	0,1	-0,5643
2	2	60	0,0333	-2,1715
3	12	80	0,15	0,6314
4	4	50	0,08	-0,9897
5	8	50	0,16	0,7119
6	10	70	0,1429	0,4109
7	15	80	0,1875	1,6403
8	6	50	0,12	-0,1389
Razem	62	490		



karta wskazuje na brak nielosowych oddziaływań na proces

STATISTICA – karta p – definiowanie zmiennych



	1 kontrola	2 element	3 wada
1	1	8	1
2	1	21	1
3	1	24	2
4	1	31	3
5	1	42	1
6	1	42	3
7	2	17	3
8	2	49	1
9	3	11	2
10	3	12	3

dane surowe

w kolejnych wierszach arkusza są informacje o:

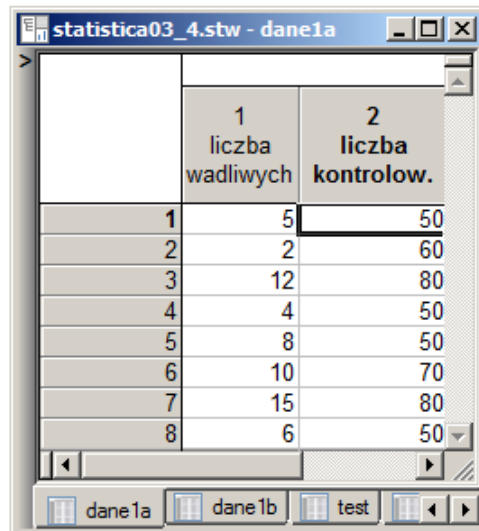
- numerze kontroli,
- numerze elementu
- kodzie wykrytej wady

arkusz może zawierać również dane elementów nieuszkodzonych – w takim przypadku brak wad należy opisać przypisując elementowi kod wady równy 0

dane zagregowane

kolejne wiersze arkusza zawierają zbiorcze informacje o każdej przeprowadzonej kontroli:

- liczbę wadliwych i
- liczbę sprawdzonych elementów



	1 liczba wadliwych	2 liczba kontrolow.
1	5	50
2	2	60
3	12	80
4	4	50
5	8	50
6	10	70
7	15	80
8	6	50

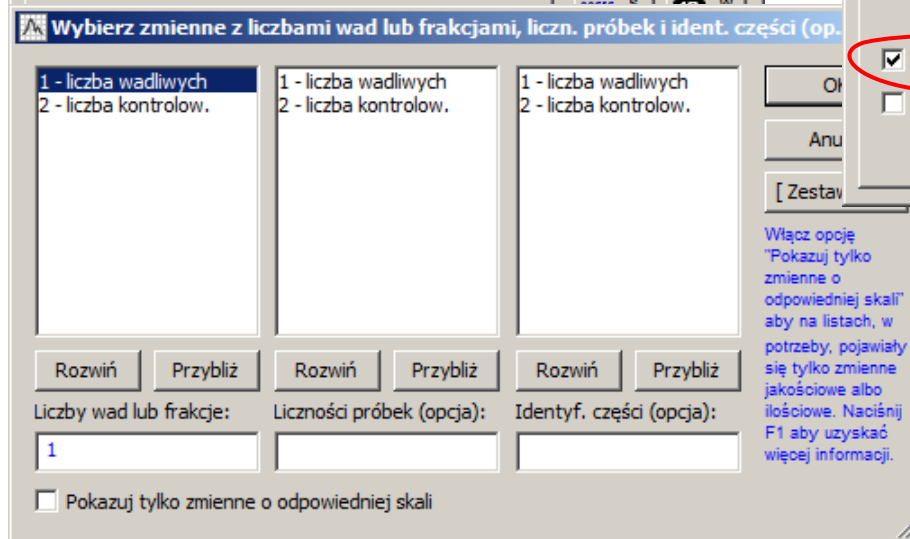
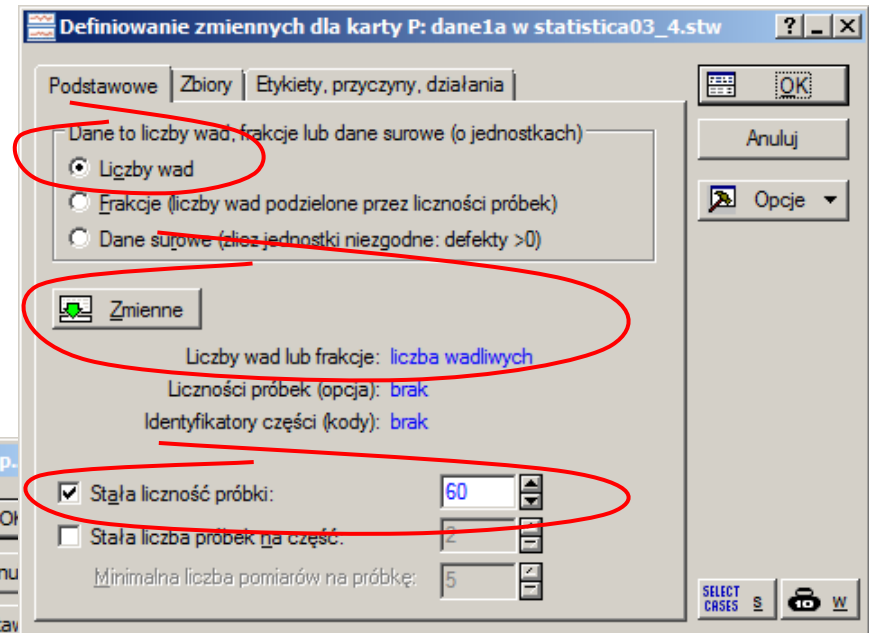
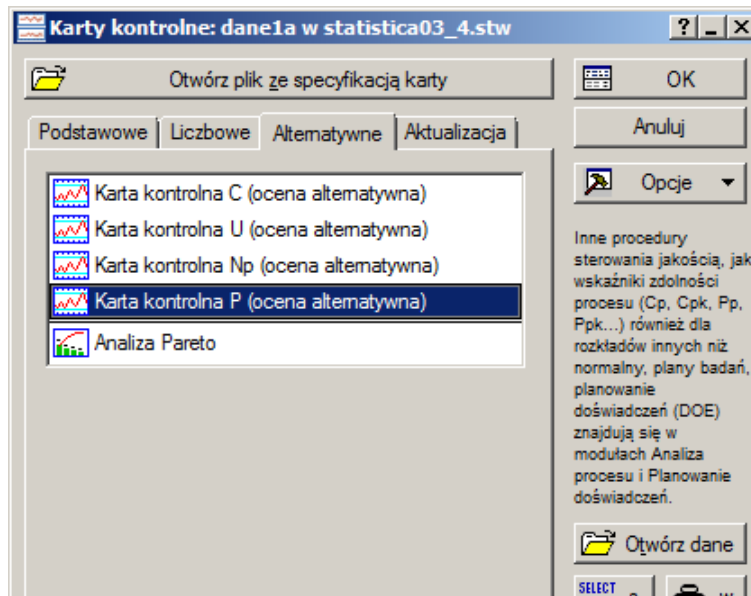
Uwaga!

arkusz z danymi surowymi zawiera opis 6 uszkodzeń detali, wadliwych elementów znaleziono jednak tylko 5 – program zlicza elementy wadliwe a nie liczbę znalezionych wad (detal 42 jest liczony tylko jeden raz) tak jak zapisano w arkuszu z danymi zagregowanymi.

STATISTICA – karta p

dane zagregowane

stała liczność próbek: $n = 60$



STATISTICA – karta p

dane zintegrowane
próbki o zmiennej liczności

Karty kontrolne: dane1a w statistica03_4.stw

Otwórz plik ze specyfikacją karty

Podstawowe | Liczbowe | Alternatywne | Aktualizacja

Karta kontrolna C (ocena alternatywna)
Karta kontrolna U (ocena alternatywna)
Karta kontrolna Np (ocena alternatywna)
Karta kontrolna P (ocena alternatywna)
Analiza Pareto

Inne procedury sterowania jakością, jak wskaźniki zdolności procesu (Cp, Cpk, Pp, Ppk...) również dla rozkładów innych niż normalny, plany badań, planowanie doświadczeń (DOE) znajdują się w modułach Analiza procesu i Planowanie doświadczeń.

Otwórz dane

SELECT CASES S W

Wybierz zmienne z liczbami wad lub frakcjami, liczn. próbek i ident. części (opcjonalnie)

1 - liczba wadliwych 2 - liczba kontrolow.	1 - liczba wadliwych 2 - liczba kontrolow.	1 - liczba wadliwych 2 - liczba kontrolow.
-----------------------------------------------	-----------------------------------------------	-----------------------------------------------

Rozwiń | Przybliż

Liczby wad lub frakcje: 1
Liczności próbek (opcja): 2
Identyf. części (opcja):

Pokazuj tylko zmienne o odpowiedniej skali

Definiowanie zmiennych dla karty P: dane1a w statistica03_4.stw

Podstawowe | Zbiory | Etykiety, przyczyny, działania

Dane to liczby wad, frakcje lub dane surowe (o jednostkach)

Liczby wad
 Frakcje (liczby wad podzielone przez licznosc próbek)
 Dane surowe (licz jednostki niezgodne: defekty >0)

Zmienne

Liczby wad lub frakcje: liczba wadliwych
Liczności próbek (opcja): liczba kontrolow.
Identyfikatory części (kody): brak

Stała licznosc próbki: 60
 Stała licznosc próbek na część: 2
Minimalna licznosc pomiarów na próbkę: 5

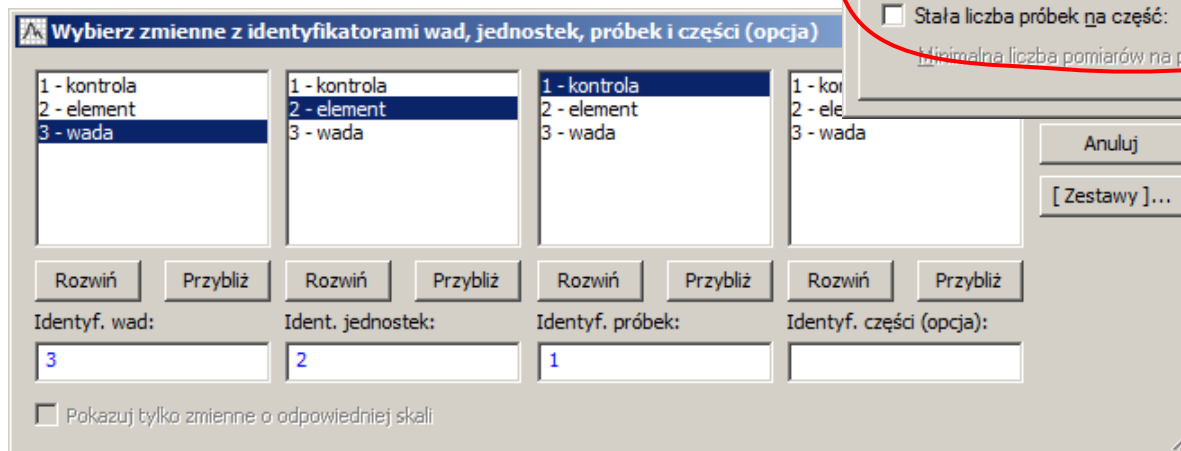
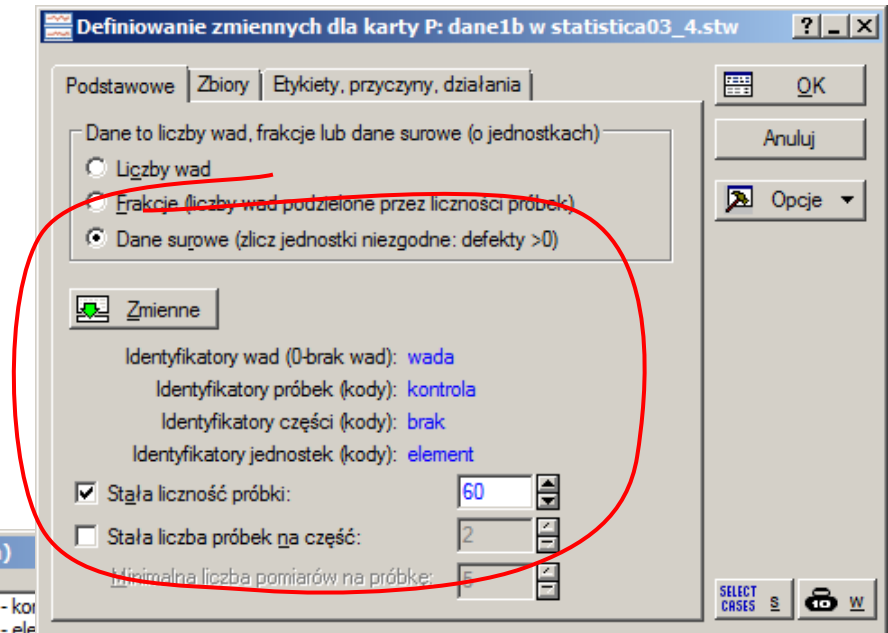
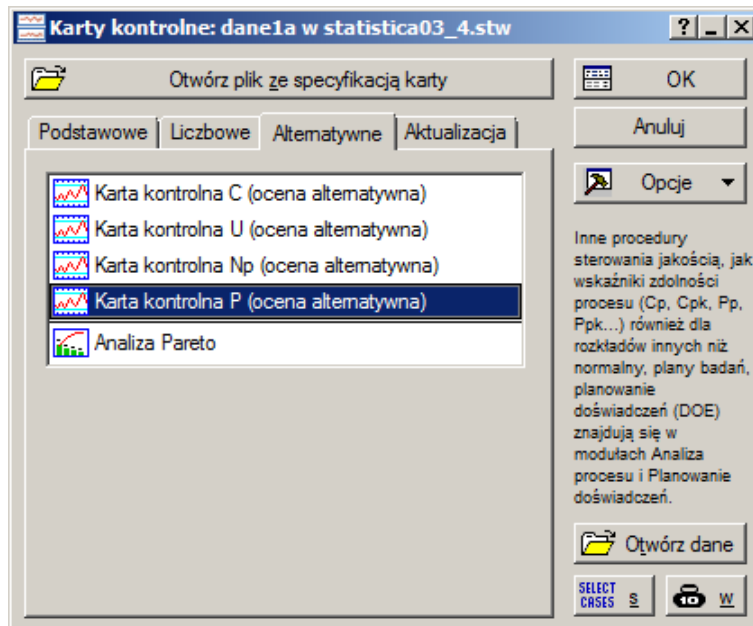
SELECT CASES S W

Włącz opcję "Pokazuj tylko zmienne o odpowiedniej skali" aby na listach, w potrzeby, pojawiły się tylko zmienne jakościowe albo ilościowe. Naciśnij F1 aby uzyskać więcej informacji.

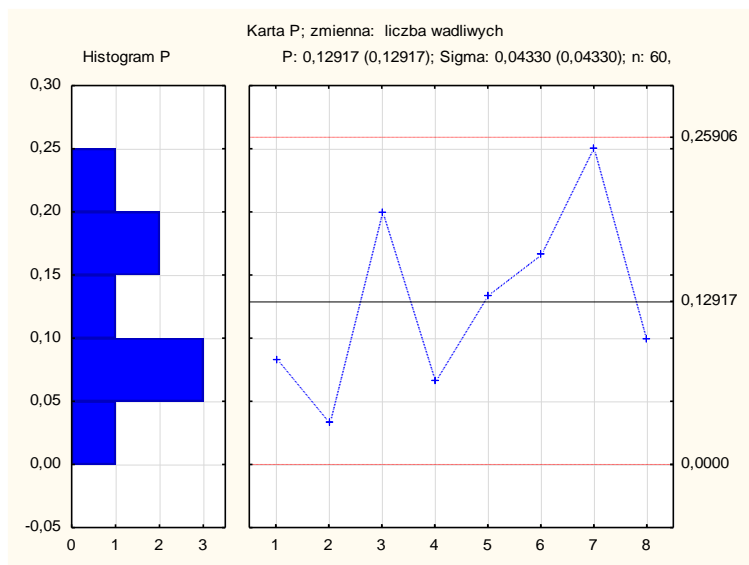
STATISTICA – karta p

dane surowe

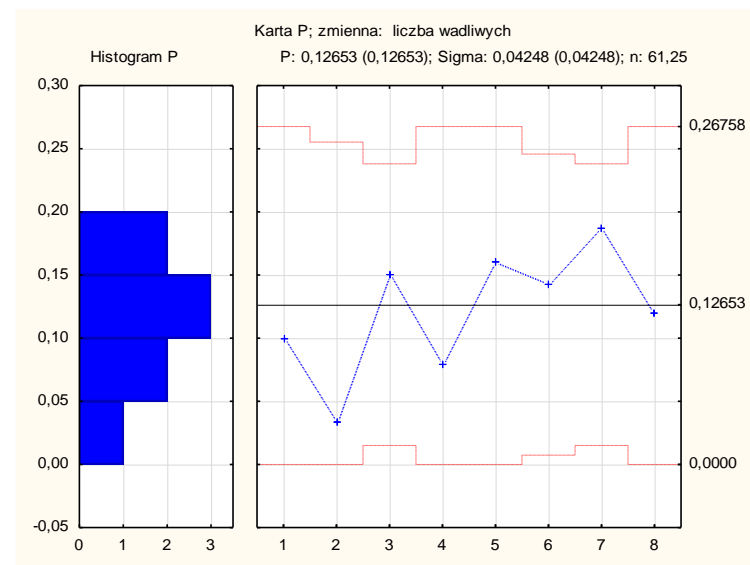
stała liczność próbek: $n = 60$



próbki o stałej liczności $n = 60$



próbki o zmiennej liczności



karty wskazują na brak nielosowych oddziaływań na proces

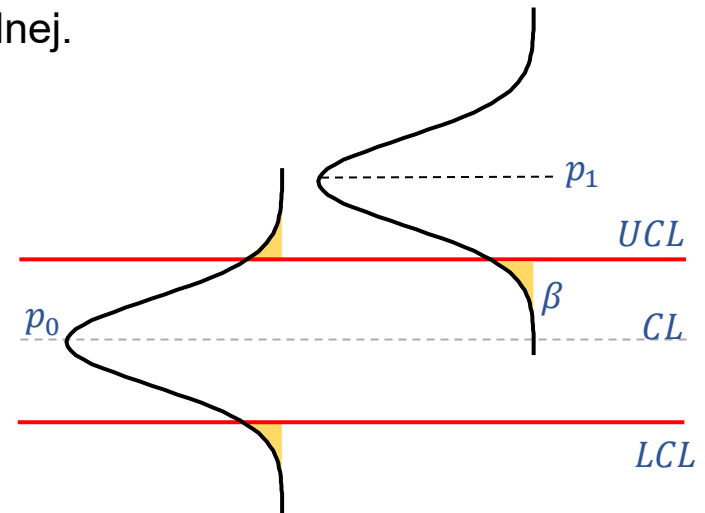
Karta p – błąd II rodzaju

Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju dla karty p wyznacza się zakładając, że:

- linie kontrolne karty są obliczone na podstawie nominalnej wadliwości p_0 , tzn.:

$$UCL = p_0 + L\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}, \quad LCL = p_0 - L\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$$

- rzeczywista wadliwość p_1 różni się od nominalnej.



Błąd II rodzaju polega na przeoczeniu zmiany wadliwości, jest wyznaczany z:

$$\beta = P(p_i < UCL) - P(p_i \leq LCL)$$

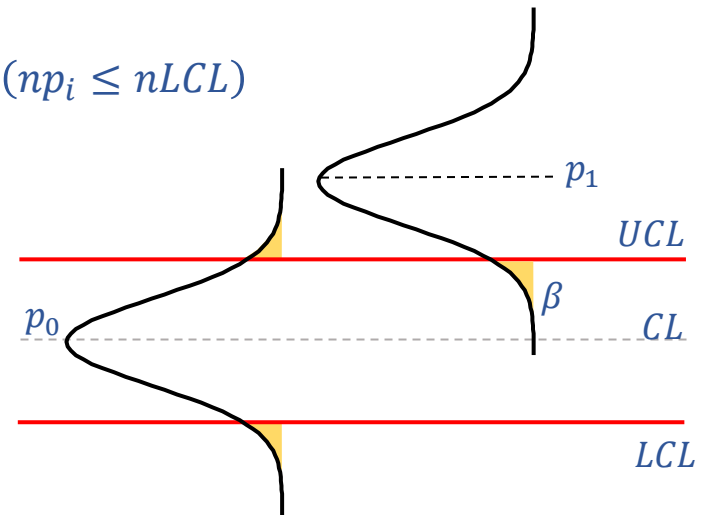
Karta p – błąd II rodzaju

Rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę produktów niezgodnych jest *rozkładem dwumianowym* $B(n, p)$ a karta p przedstawia procenty produktów niezgodnych, wzór:

$$\beta = P(p_i < UCL) - P(p_i \leq LCL)$$

jest przekształcany do postaci

$$\beta = P(np_i < nUCL) - P(np_i \leq nLCL)$$



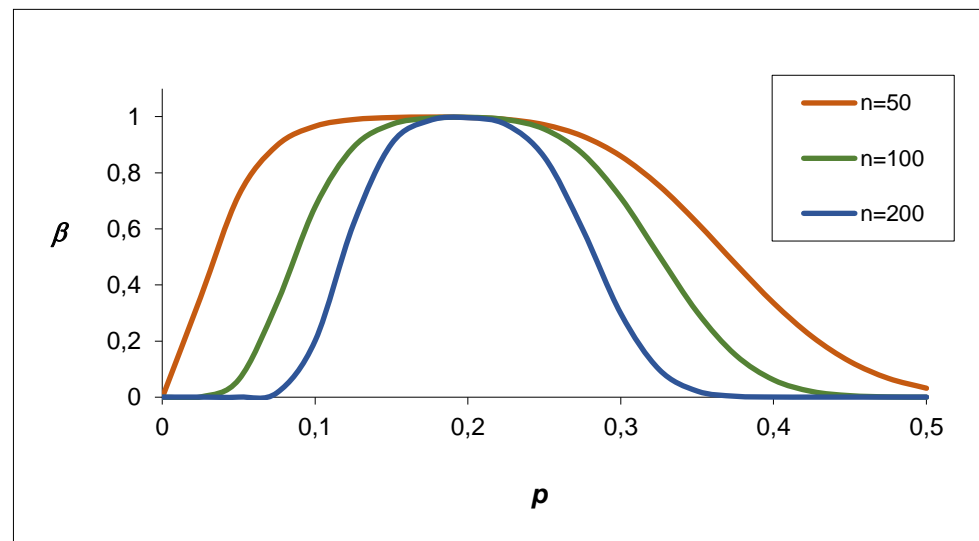
prawdopodobieństwo wystąpienia błędu II rodzaju β wyznaczone jest jako

$$\beta = F_{B(n,p_1)}(nUCL) - F_{B(n,p_1)}(nLCL)$$

gdzie: składnik $F_{B(n,p_1)}(nLCL)$ jest pomijany dla $LCL < 0$.

Krzywe operacyjno – charakterystyczne OC (ang. *operating characteristic curve*)

W przypadku karty p krzywe przedstawiają zmiany błędu II rodzaju w zależności od procenta produktów wadliwych, krzywe dla różnych rozmiarów próbek umożliwiają dopasowanie rozmiaru próbki do wymagań stawianych przed kartą.



ARL

Wskaźniki ARL definiują **średnią długości serii** (*ang. average run length*) albo inaczej średnią liczbę próbek po których wystąpi sygnał o przekroczeniu linii kontrolnej:

- wskaźnik ARL_0 jest średnią liczbą próbek, po której **proces statystycznie uregulowany** wygeneruje odstającą próbkę:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

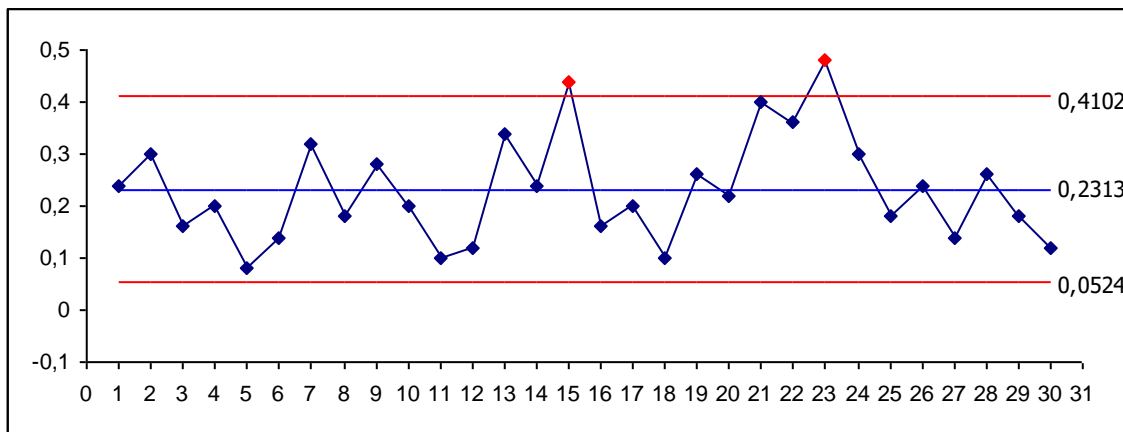
- wskaźnik ARL_1 jest średnią liczbą próbek, po której **proces statystycznie rozregulowany** wygeneruje odstającą próbkę:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

Konfiguracja karty*

Maszyna produkuje puszki o objętości 170ml (6 uncji). Do skonfigurowania karty p pobierano co pół godziny 50 puszek sprawdzając ich szczelność. Zgromadzone w trakcie 30 kontroli dane zostały zebrane w tabeli obok.

*Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009

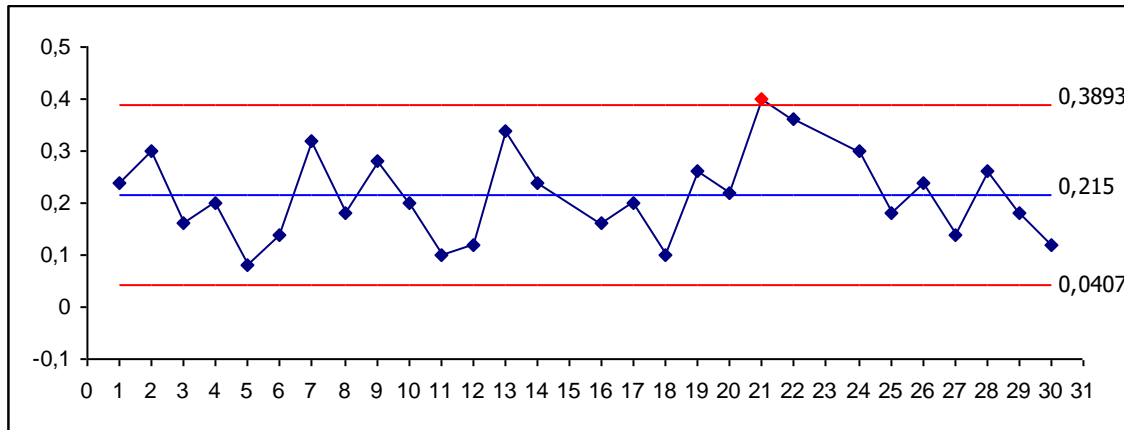


i	m _i	i	m _i
1	12	16	8
2	15	17	10
3	8	18	5
4	10	19	13
5	4	20	11
6	7	21	20
7	16	22	18
8	9	23	24
9	14	24	15
10	10	25	9
11	5	26	12
12	6	27	7
13	17	28	13
14	12	29	9
15	22	30	6

Proces nie jest statystycznie stabilny. Przeprowadzona kontroli wykazała, że próbki 15 i 23 należy wyłączyć z obliczeń ponieważ znaleziono nielosowe przyczyny niestabilności procesu. Próbkę 15 pobrano po załadowaniu nowej partii materiału do produkcji puszek, próbka 23 została pobrana na zmianie na której na maszynie pracował niedoświadczony operator (gdyby ten sam operator obsługiwał maszynę gdy zebrane zostały np. próbki 21 – 24 to wszystkie próbki należałoby wyłączyć z obliczeń – nawet jeśli nie znalazły się one poza granicami kontrolnymi).

Konfiguracja karty cd.

Po wyłączeniu próbek 15 i 23 ponownie wyznaczono parametry karty.



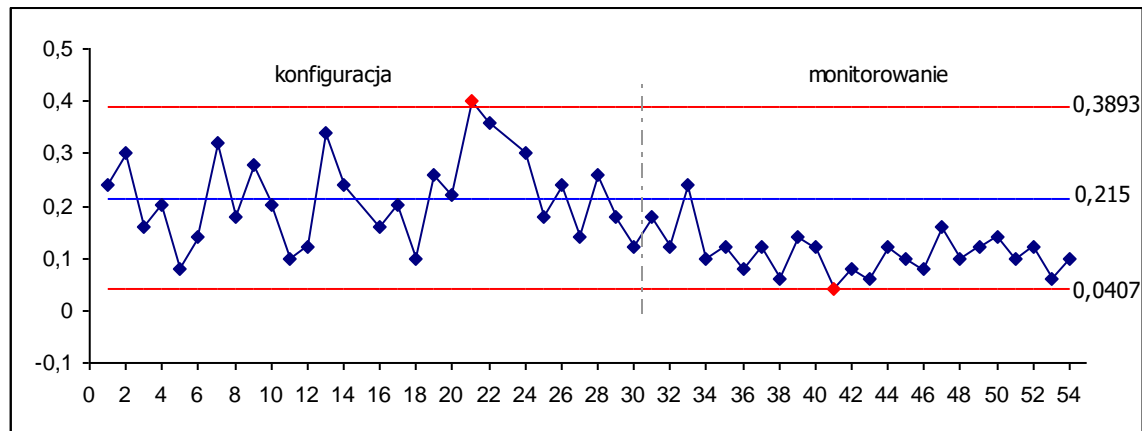
Po wykreśleniu karty okazało się, że proces nie jest statystycznie stabilny – próbka 21 znajduje się powyżej *UCL*.

W wyniku przeprowadzonej kontroli nie udało ustalić się nielosowości przyczyniającej się do pojawienia próbki, w związku z tym uznano, że proces jest statystycznie stabilny a próbkę należy uwzględnić przy wyznaczaniu parametrów karty.

Średnia proporcja ilości produktów wadliwych jest dosyć duża $\bar{p} = 0,215$ w związku z tym powinny zostać podjęte działania prowadzące do jej zmniejszenia.

Monitorowanie procesu

Po naniesieniu kolejnych 24 próbek okazało się, że próbka 41 znajduje się poniżej LCL , dodatkowo wydaje się, że korekta nastaw maszyny doprowadziła do zmniejszenia liczby wadliwych puszek.



i	m_i	i	m_i
31	9	43	3
32	6	44	6
33	12	45	5
34	5	46	4
35	6	47	8
36	4	48	5
37	6	49	6
38	3	50	7
39	7	51	5
40	6	52	6
41	2	53	3
42	4	54	5

$$\sum_{i=31}^{54} m_i = 133$$

Obserwację tą można potwierdzić testując hipotezy

zerową $H_0: p_1 = p_2$ wobec alternatywnej $H_1: p_1 > p_2$,

gdzie:

p_1 – procent produktów wadliwych z fazy konfiguracji karty, $p_1 = 0,215$,

p_2 – procent produktów wadliwych z fazy monitorowania procesu:

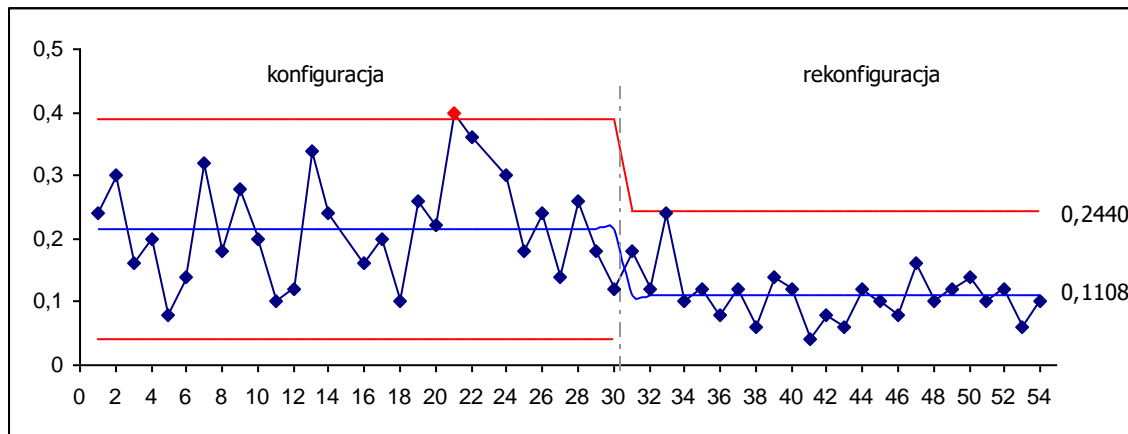
$$p_2 = 133 / (24 \cdot 50) = 0,1108.$$

Rekonfiguracja karty

Otrzymana wartość *p-value* wskazuje, że hipotezę o równości proporcji należy odrzucić na rzecz hipotezy alternatywnej.

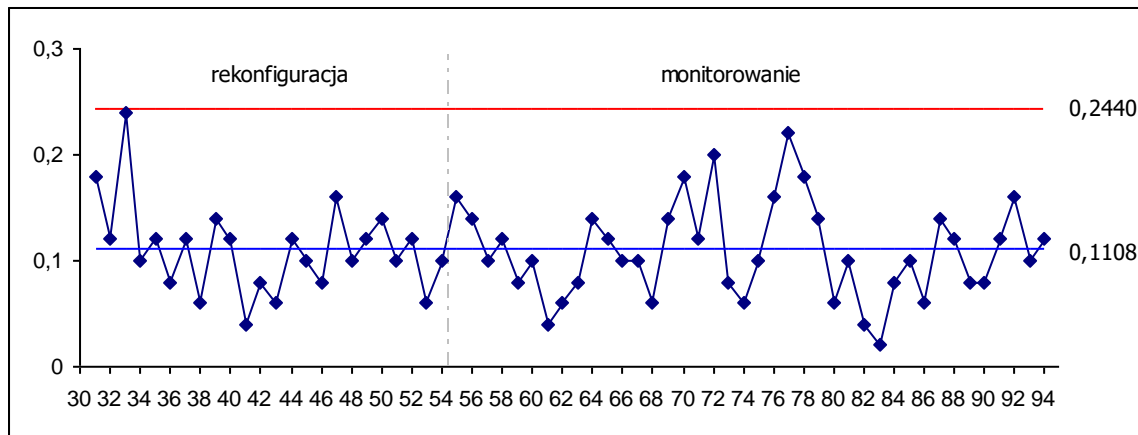
Korekta nastaw maszyny doprowadziła więc do istotnego zmniejszenia liczby wadliwych puszek – *kartę p* należy ponownie skonfigurować w oparciu o dane zebrane po zmianie nastaw maszyny.

p_1 p_2 $24 \cdot 50 = 1200$ $28 \cdot 50 = 1400$ $p\text{-value} = 0$



Monitorowanie procesu

Po ponownym skonfigurowaniu karty zebrano kolejnych 40 próbek i naniesiono je na kartę.



Proces jest statystycznie stabilny chociaż otrzymany procent produktów wadliwych w dalszym ciągu jest dosyć wysoki.

i	m_i	i	m_i
55	8	75	5
56	7	76	8
57	5	77	11
58	6	78	9
59	4	79	7
60	5	80	3
61	2	81	5
62	3	82	2
63	4	83	1
64	7	84	4
65	6	85	5
66	5	86	3
67	5	87	7
68	3	88	6
69	7	89	4
70	9	90	4
71	6	91	6
72	10	92	8
73	4	93	5
74	3	94	6

Należy sprawdzić skuteczność karty ze slajdu 24 wyznaczając wskaźniki ARL_0 i ARL_1 .

Dane $p_0 = 0,215$, $n = 50$, $p_1 = 0,1108$, $LCL \approx 0,0407$, $UCL \approx 0,3893$.

ARL_0

Wartość wskaźnika wyznacza się zakładając, że wadliwość nie ulega zmianie, tzn. $p_1 = p_0$. Prawdopodobieństwo, że p_i znajdzie się pomiędzy liniami kontrolnymi wynosi:

$$\beta = F_{B(n,p_1)}(nUCL) - F_{B(n,p_1)}(nLCL) = F_{B(50,0,215)}(50 \cdot 0,3893) - F_{B(50,0,215)}(50 \cdot 0,0407) \approx 0,9971.$$

Prawdopodobieństwo wygenerowania fałszywego alarmu wynosi $\alpha = 1 - \beta = 0,0029$,

czyli $ARL_0 = 1/\alpha = 1/0,0029 \approx 339,4$.

ARL_1

Prawdopodobieństwo β wynosi w tym przypadku:

$$\beta = F_{B(n,p_1)}(nUCL) - F_{B(n,p_1)}(nLCL) = F_{B(50,0,1108)}(50 \cdot 0,3893) - F_{B(50,0,1108)}(50 \cdot 0,0407) \approx 0,9260,$$

więc: $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-0,9260} \approx 13,5$.

Na slajdzie 24 karta p wykryła analizowaną zmianę wadliwości w 11 próbce (zmiana nastąpiła w próbce 31 a została wykryta w 41) – otrzymany wynik był więc zbliżony do otrzymanej wartości ARL_1 .

Na karcie np każdy punkt wykresu przedstawia ilość produktów wadliwych w każdej próbce, przy założeniu, że rozmiary próbek są takie same.

Przyjmując takie same założenia jak w przypadku karty p, można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę produktów wadliwych jest rozkładem dwumianowym $B(n, p)$, który dla dużych próbek jest zbieżny do rozkładu normalnego:

$$\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Wykres postępu

$$np_i = m_i$$

Linie kontrolne

dla znanej wadliwości procesu:

$$LCL = np - L\sqrt{np(1-p)}$$

$$CL = np$$

$$UCL = np + L\sqrt{np(1-p)}$$

dla nieznannej wadliwości procesu:

$$LCL = n\bar{p} - L\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

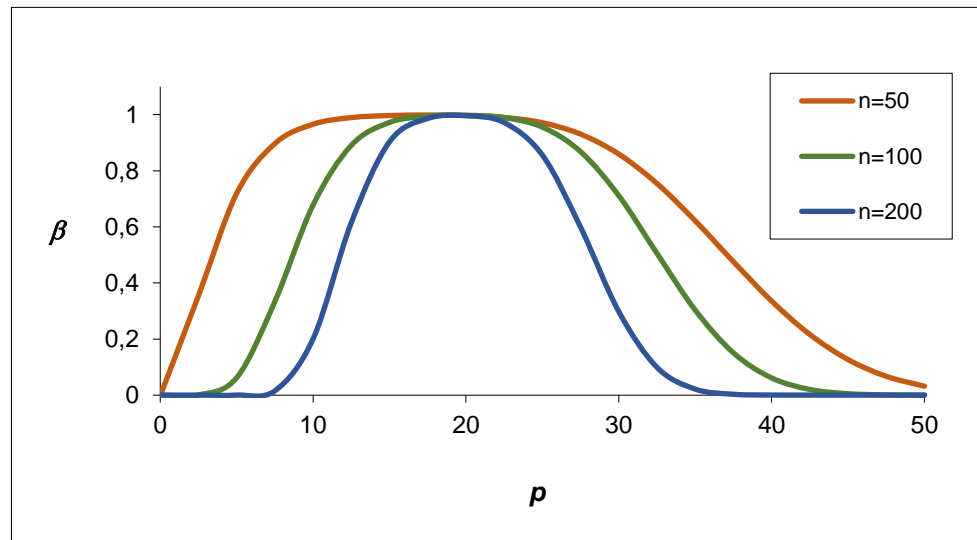
$$CL = n\bar{p}$$

$$UCL = n\bar{p} + L\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$, przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Karta np – błąd II rodzaju, krzywe OC i ARL

Wartości β i ARL (dla tych samych prawdopodobieństw p) dla kart p i np są identyczne, na wykresie OC oś pozioma – na karcie p przedstawia prawdopodobieństwa, na karcie np – liczby wyrobów niezgodnych.



Karta *np*, podobnie jak karta *p*, dla procesu ze slajdu 10 wskazuje na brak nielosowych oddziaływań na proces.

Dane

$$n = 60, k = 8.$$

Obliczenia

$$\bar{p} = \frac{62}{8 \cdot 60} \approx 0,129.$$

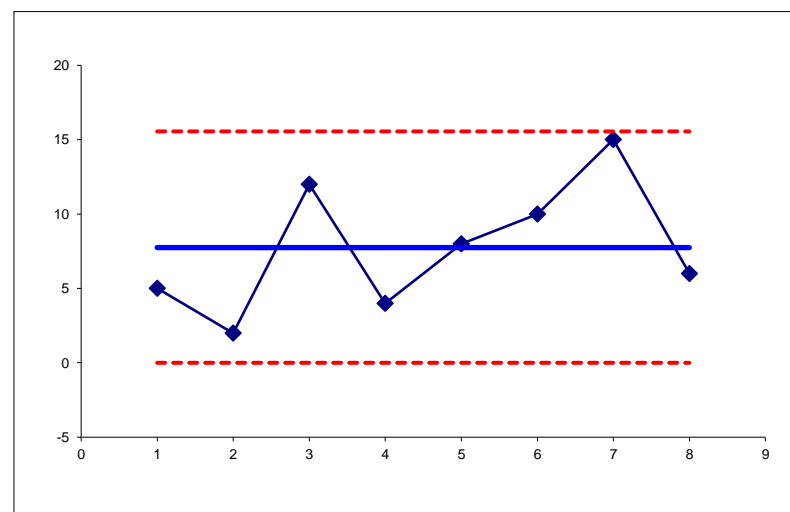
$$CL = 60 \cdot 0,129 \approx 7,75$$

$$UCL = 7,75 + 3\sqrt{60 \cdot 0,129 \cdot 0,871} \approx 15,54$$

$$LCL = 7,75 - 3\sqrt{60 \cdot 0,129 \cdot 0,871} \approx -0,04$$

$$\rightarrow LCL = 0$$

kontrola	liczba wadliwych
1	5
2	2
3	12
4	4
5	8
6	10
7	15
8	6
Razem	62



Karty kontrolne dla cech dyskretnych

Do kontroli wadliwości w przypadku gdy obliczana jest liczba niezgodności stosowane są karty *c* i *u*.

Karta *c*

karta przedstawia zmiany liczby niezgodności w kolejnych próbkach

Karta *u*

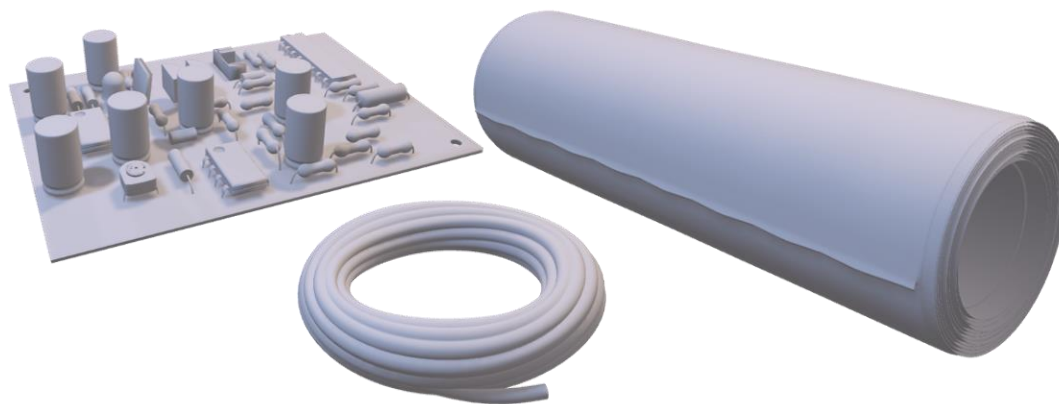
karta przedstawia zmiany proporcji niezgodności obliczany jako stosunek liczby niezgodności do liczby przebadanych jednostek

Karty stosowane są

- dla produktów złożonych (wyrób może mieć kilka podzespołów, które mogą okazać się wadliwe)
- gdy niezgodności mogą mieć różne przyczyny
- niezgodności rozrzucone są w całym toku produkcji (skazy na całej długości materiału)
- gdy wady pojawiają się rzadko

Na karcie *c*, podobnie jak na karcie *np*, przedstawiana jest ilość (a nie proporcja) niezgodności w próbkach.

Na próbkę składa się ustalona liczba tzw. jednostek kontrolnych. W każdej jednostce może wystąpić dowolna liczba niezgodności (w przypadku karty *np* jednostką kontrolną był badany element, który w całości był oceniany jako prawidłowy albo nieprawidłowy). Jednostką kontrolną może być określona jednostka miary badanego wyrobu.



- 100m drutu
- 1m² materiału
- strona dokumentu dla której zliczane będą błędy
- płytka drukowana dla której liczona będzie ilość zimnych lutów lub ilość uszkodzonych podzespołów

Każdy punkt c_i na karcie c przedstawia ilość niezgodności w jednostce kontrolnej. Zakładając, że:

- rozmiar jednostki kontrolnej jest stały
- wykonanie danego produktu w próbkce nie jest zależne od pozostałych
- prawdopodobieństwo wystąpienia niezgodności w określonym punkcie jest małe i stałe

można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej reprezentującej liczbę niezgodności jest rozkładem Poissona $Pois(c)$, gdzie c to oczekiwana liczba niezgodności.

Prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie d niezgodności wyznacza się jako

$$P(X = d) = \frac{c^d e^{-c}}{d!}$$

Średnia i wariancja rozkładu $Pois(c)$ są równe parametrowi c

$$\mu = c, \quad \sigma^2 = c.$$

Dla dostatecznie dużych c rozkład $Pois(c)$ może być aproksymowany rozkładem $\mathcal{N}(c, \sqrt{c})$.

Wykres postępu

$$c_i = m_i$$

Linie kontrolne

dla znanej wadliwości procesu:

$$LCL = c - L\sqrt{c}$$

$$CL = c$$

$$UCL = c + L\sqrt{c}$$

dla nieznannej wadliwości procesu:

$$LCL = \bar{c} - L\sqrt{\bar{c}}$$

$$CL = \bar{c}$$

$$UCL = \bar{c} + L\sqrt{\bar{c}}$$

wadliwość można estymować jako stosunek łącznej liczby znalezionych niezgodności (we wszystkich próbkach) do liczby próbek (m_i to ilość niezgodności w i -tej próbce a k to ilość próbek):

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{k}$$

Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$, przyjmuje się, że $LCL = 0$.

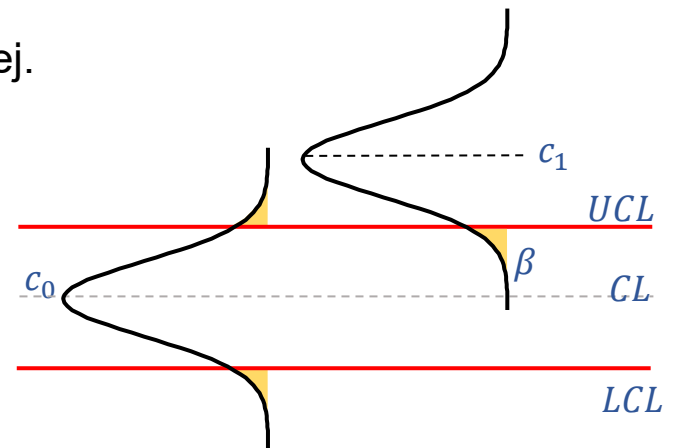
Karta c – błąd II rodzaju

Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju dla karty c wyznacza się zakładając, że:

- linie kontrolne karty są obliczone na podstawie nominalnej wadliwości c_0 , tzn.:

$$UCL = c_0 + L\sqrt{c_0}, \quad LCL = c_0 - L\sqrt{c_0}$$

- rzeczywista wadliwość c_1 różni się od nominalnej.



Błąd II rodzaju polega na przeoczeniu zmiany wadliwości, jest wyznaczany z:

$$\beta = P(c_i < UCL) - P(c_i \leq LCL)$$

Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju β wyznacza się dysytrybuanty rozkładu Poissona:

$$\beta = F_{Pois(c_1)}(UCL) - F_{Pois(c_1)}(LCL)$$

gdzie: składnik $F_{Pois(c_1)}(LCL)$ jest pomijany gdy $LCL < 0$.

Krzywe operacyjno – charakterystyczne OC (ang. *operating characteristic curve*)

W przypadku karty c krzywe przedstawiają zmiany błędu II rodzaju w zależności od liczby niezgodności, krzywe dla różnych rozmiarów próbek umożliwiają dopasowanie rozmiaru próbki do wymagań stawianych przed kartą.

Konfiguracja karty*

W tabeli zgromadzono liczbę niezgodności znalezionych w 26 kolejno pobranych próbkach 100 sztuk płytek drukowanych.

*Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009

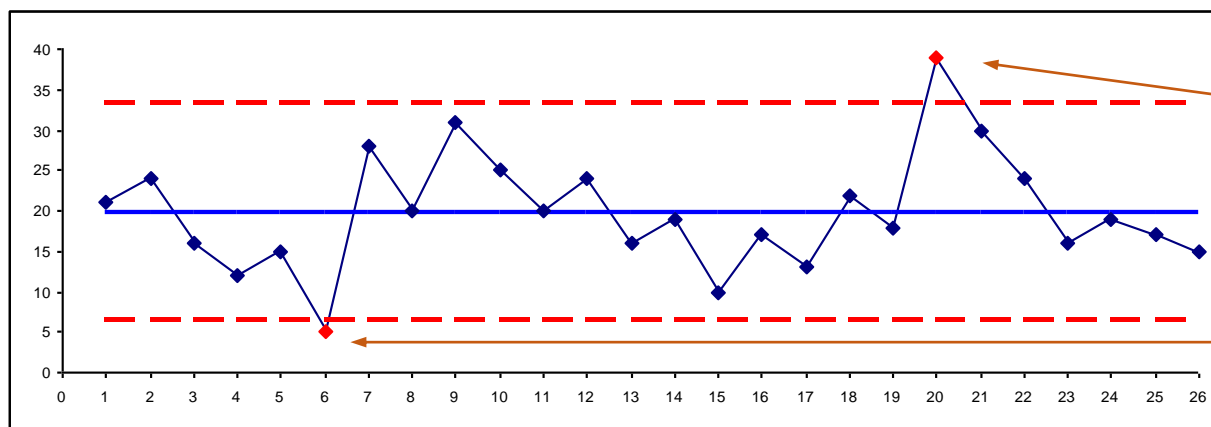
Wadliwość procesu oszacowana na podstawie $k = 26$ próbek wynosi:

$$\sum_{i=1}^k m_i = 516, \quad \bar{c} = \frac{516}{26} \approx 19,85,$$

a linie kontrolne:

$$LCL = 19,85 - 3\sqrt{19,85} \approx 6,84, \quad UCL = 19,85 + 3\sqrt{19,85} \approx 33,21.$$

i	m_i	i	m_i
1	21	14	19
2	24	15	10
3	16	16	17
4	12	17	13
5	15	18	22
6	5	19	18
7	28	20	39
8	20	21	30
9	31	22	24
10	25	23	16
11	20	24	19
12	24	25	17
13	16	26	15



próbka 20 poza UCL :
duża liczba niezgodności
wynika z uszkodzenia
maszyny do lutowania

próbka 6 poza LCL :
winę ponosi kontroler,
który nie wykrył wszystkich
niezgodności

Konfiguracja karty cd.

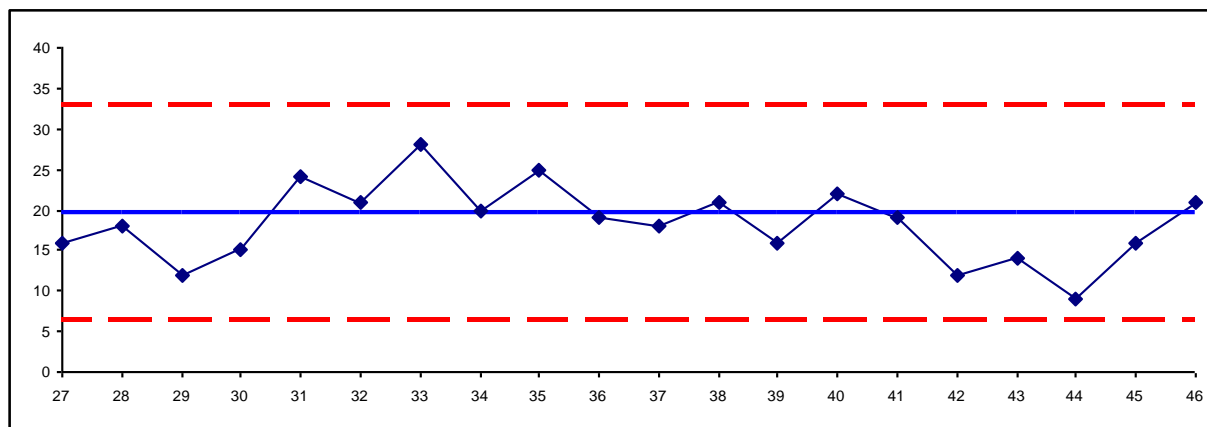
Po wyłączeniu próbek 6 i 20 ponownie wyznaczono parametry karty:

$$\sum_{i=1}^k m_i = 472,$$

$$\bar{c} = \frac{472}{24} \approx 19,67,$$

$$UCL = 19,67 + 3\sqrt{19,67} \approx 32,97,$$

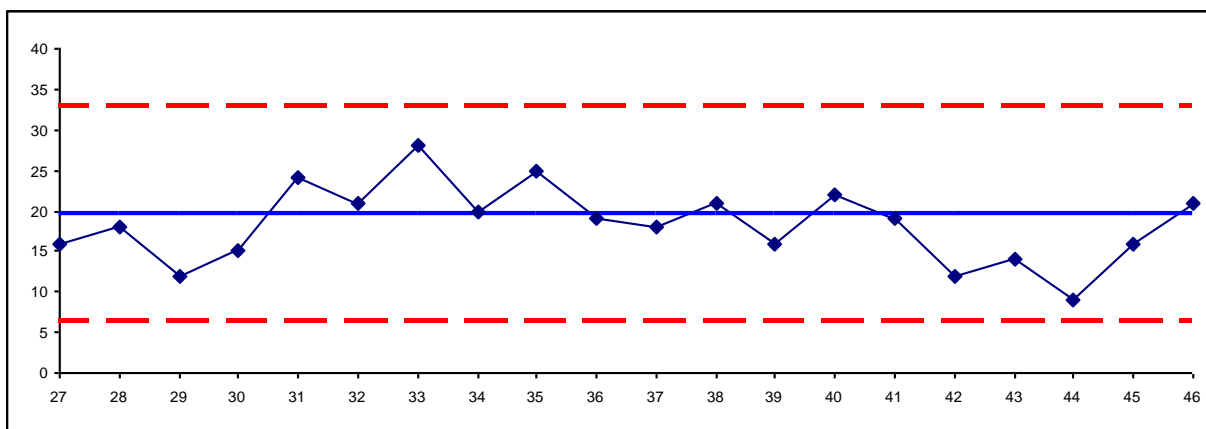
$$LCL = 19,67 - 3\sqrt{19,67} \approx 6,36.$$



Proces jest statystycznie stabilny.

Monitorowanie procesu

Zebrano kolejnych 20 próbek (po 100 sztuk płytek) i zbadano stabilność procesu dla parametrów ustalonych na etapie konfiguracji.



Wszystkie punkty karty mieszczą się w wyznaczonych granicach kontrolnych – proces jest statystycznie stabilny.

Liczba niezgodności w przeliczeniu na płytkę jest jednak stosunkowo duża, należy podjąć działania polegające na zmniejszeniu tej liczby.

i	m_i
27	16
28	18
29	12
30	15
31	24
32	21
33	28
34	20
35	25
36	19
37	18
38	21
39	16
40	22
41	19
42	12
43	14
44	9
45	16
46	21

Karta c – błąd II rodzaju, krzywe OC i ARL

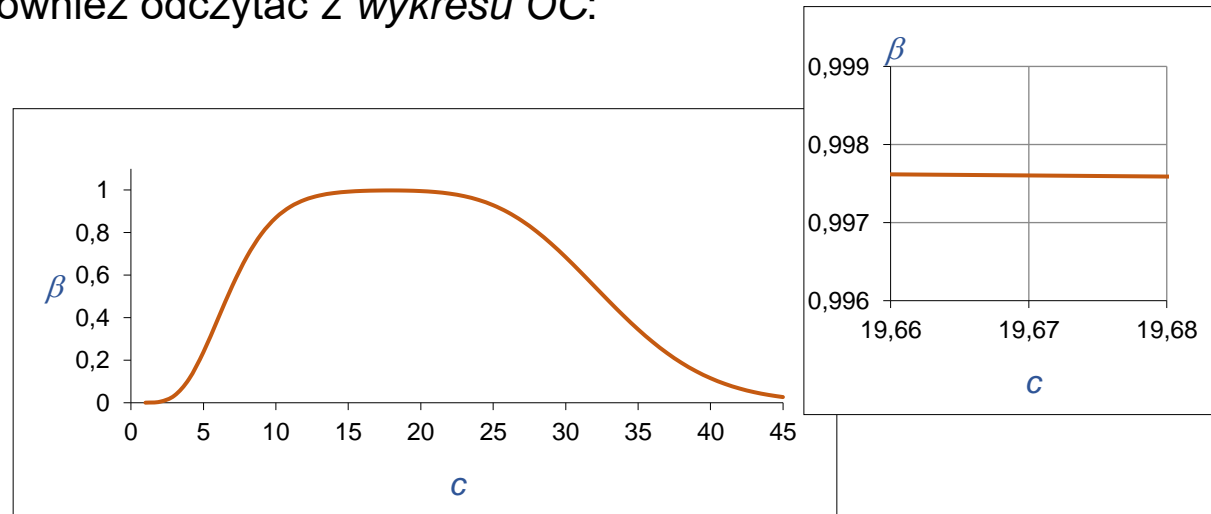
Wskaźnik ARL_0 dla karty o parametrach:

- nominalna wadliwość $c_0 = 19,67$,
- linie kontrolne $UCL = 32,97$, $LCL = 6,36$.

wyznacza się obliczając prawdopodobieństwo β

$$\beta = F_{Pois(c_1)}(UCL) - F_{Pois(c_1)}(LCL) = F_{Pois(19,67)}(32,97) - F_{Pois(19,67)}(6,36) \approx 0,997$$

Wartość β można również odczytać z wykresu OC:



Prawdopodobieństwo wygenerowania fałszywego alarmu wynosi więc $\alpha = 1 - \beta \approx 0,003$ a wskaźnik ARL_0 ma w przybliżeniu wartość podobną do kart Shewharta, dla których $ARL_0 = 370$.

Na karcie u , podobnie jak na karcie p , przedstawiana jest proporcja (a nie ilość) niezgodności w próbkach. Próbkę mogą się różnić liczbą jednostek kontrolnych. W każdej jednostce może wystąpić dowolna liczba niezgodności.

Przyjmując takie same założenia jak w przypadku karty c , można przyjąć, że rozkład zmiennej losowej u_i reprezentującej proporcję wad:

$$u_i = \frac{c_i}{n_i},$$

jest rozkładem Poissona (c_i to liczba niezgodności w i -tej próbce składającej się z n_i jednostek kontrolnych).

Średnią liczbę niezgodności na jednostkę kontrolną wyznacza się z zależności:

dla zmiennej liczby jednostek kontrolnych

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

dla stałej liczby jednostek kontrolnych

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{kn} = \frac{\sum_{i=1}^k u_i}{k}$$

Wykres postępu

$$u_i = \frac{c_i}{n} \quad \text{lub} \quad u_i = \frac{c_i}{n_i}$$

Linie kontrolne

dla znanej wadliwości procesu:

$$LCL = u - L\sqrt{u/n} \quad CL = u \quad UCL = u + L\sqrt{u/n}$$

dla nieznannej wadliwości procesu (i próbek o tych samych rozmiarach):

$$LCL = \bar{u} - L\sqrt{\bar{u}/n} \quad CL = \bar{u} \quad UCL = \bar{u} + L\sqrt{\bar{u}/n}$$

dla próbek o różnej liczbie jednostek kontrolnych mogą być stosowane 3 różne podejścia 

Gdy dolna linia kontrolna $LCL < 0$, przyjmuje się, że $LCL = 0$.

Karta u – próbki o różnych rozmiarach

1. zmienne granice kontrolne (liczone indywidualnie dla każdej próbki):

$$LCL_i = \bar{u} - L\sqrt{\bar{u}/n_i} \qquad CL = \bar{u} \qquad UCL_i = \bar{u} + L\sqrt{\bar{u}/n_i}$$

2. stałe granice kontrolne po standaryzacji wadliwości:

$$LCL = -L \qquad CL = 0 \qquad UCL = L$$

wadliwość standaryzowana: $\hat{u}_i = \frac{u_i - p}{\sqrt{u/n_i}}$ lub $\hat{u}_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\bar{u}/n_i}}$

3. stałe granice kontrolne po uśrednieniu rozmiaru próbki (mogą być stosowane dla małej zmienności próbek)

$$LCL = \bar{u} - L\sqrt{\bar{u}/\bar{n}} \qquad CL = \bar{u} \qquad UCL = \bar{u} + L\sqrt{\bar{u}/\bar{n}}$$

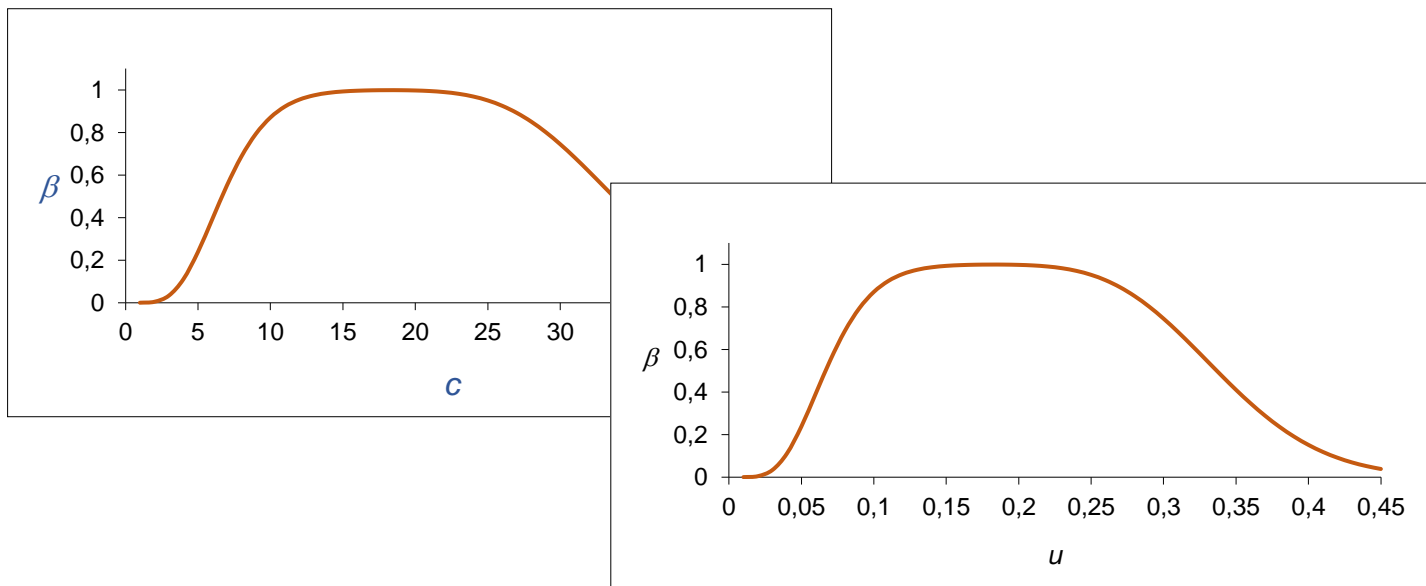
gdzie $\bar{n} = \sum_{i=1}^k n_i$

Karta u – błąd II rodzaju, krzywe OC i ARL

Wartości β dla karty u wyznacza się z zależności:

$$\beta = F_{Pois(nu_1)}(nUCL) - F_{Pois(nu_1)}(nLCL)$$

Na wykresie OC oś pozioma karty u przedstawia liczbę niezgodności na jednostkę kontrolną.



Konfiguracja karty*

W tabeli zgromadzono liczbę wad
znalezionych w 10 belach materiału. Ze względu na to, że bele nie są równe przyjęto wspólną jednostkę kontrolną równą $50m^2$ materiału. Oceń statystyczną stabilność procesu.

Lp.	m^2	ilość wad	ilość jednostek	proporcja	UCL	LCL
1	500	14	10	1,4	2,56	0,29
2	400	12	8	1,5	2,69	0,16
3	650	20	13	1,54	2,42	0,43
4	500	11	10	1,1	2,56	0,29
5	475	7	9,5	0,74	2,58	0,26
6	500	10	10	1	2,56	0,29
7	600	21	12	1,75	2,46	0,39
8	525	16	10,5	1,52	2,53	0,32
9	600	19	12	1,58	2,46	0,39
10	625	23	12,5	1,84	2,44	0,41

Obliczenia

Liczba jednostek kontrolnych, np.: pierwsza bel a składa się z:

$$n_1 = 500/50 = 10 \text{ jednostek}$$

średnia liczba niezgodności:

$$\sum_{i=1}^k c_i = 153, \quad \sum_{i=1}^k n_i = 107,5, \quad \bar{u} = 153/107,5 \approx 1,42,$$

linie kontrolne liczone indywidualnie dla każdej beli, np. dla pierwszej:

$$LCL_1 = 1,42 - 3\sqrt{1,42/10} \approx 0,29, \quad UCL_1 = 1,42 + 3\sqrt{1,42/10} \approx 2,56.$$

* Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control* – John Wiley & Sons, New York 2009

Konfiguracja karty cd

wszystkie punkty wykresu mieszczą się w
wyznaczonych granicach kontrolnych – proces
jest statystycznie stabilny

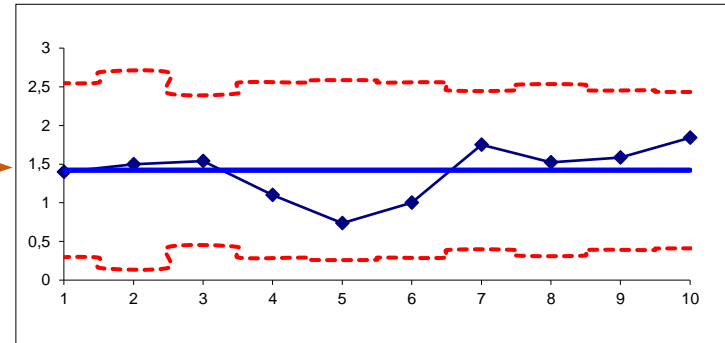
Wynik analizy jest niezależny od rozmiaru
jednostki kontrolnej. Analogiczne wnioski można
wyciągnąć np. dla jednostki kontrolnej o
wielkości $1m^2$:

$$\sum_{i=1}^k c_i = 153 \quad \sum_{i=1}^k n_i = 5375 = 50 \cdot 107,5$$

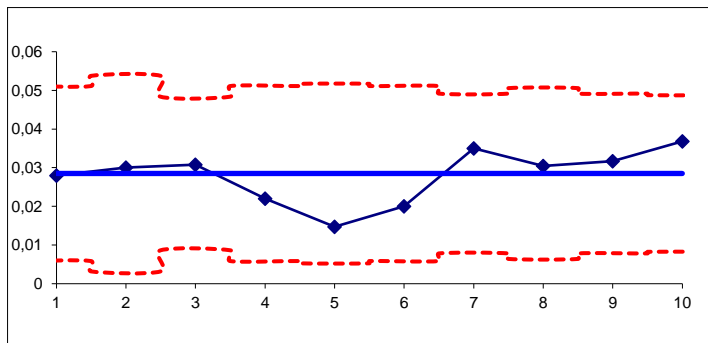
$$\bar{u} = 153/5375 \approx 0,0285 = 1,42/50$$

$$LCL_1 = 0,0285 - 3\sqrt{0,0285/500} \approx 0,0058 = 0,29/50$$

$$UCL_1 = 0,0285 + 3\sqrt{0,0285/500} \approx 0,0511 = 2,56/50$$



Lp.	m^2	ilość wad	proporcja	UCL	LCL
1	500	14	0,0280	0,0511	0,0058
2	400	12	0,0300	0,0538	0,0032
3	650	20	0,0308	0,0483	0,0086
4	500	11	0,0220	0,0511	0,0058
5	475	7	0,0147	0,0517	0,0052
6	500	10	0,0200	0,0511	0,0058
7	600	21	0,0350	0,0491	0,0078
8	525	16	0,0305	0,0506	0,0064
9	600	19	0,0317	0,0491	0,0078
10	625	23	0,0368	0,0487	0,0082



Przyjęcie 50 razy mniejszej jednostki kontrolnej
spowodowało 50-krotne zmniejszenie wszystkich
obliczonych wartości.

Karty dla cech ciągłych

pozwalają na analizę pojedynczej cechy produktu

- wdrożenie wielu kart do analizy wielu cech produktu jest trudniejsze
- pomiary wielu parametrów są bardziej kosztowne
- + w przypadku rozregulowania procesu łatwiej jest odkryć jego przyczyny
- + rozregulowanie procesu może być zauważone i usunięte jeszcze przed pojawieniem się produktów wadliwych
- + nie wymagają tak dużych rozmiarów próbek jak karty dla cech dyskretnych

Karty dla cech dyskretnych

kontrola liczby czy proporcji braków pozwala na równoczesną łączną analizę wielu parametrów produktu wpływających na jego ostateczną ocenę w postaci informacji o wadliwości

- + wdrożenie karty jest prostsze
- + pomiary są mniej kosztowne
- w przypadku rozregulowania procesu trudniej jest odkryć jego przyczyny
- rozregulowanie procesu zostanie zauważone tylko gdy zmieni się liczba produktów wadliwych
- wymagają znacznie większych rozmiarów próbek niż karty dla cech ciągłych

Nominalna średnia monitorowanego procesu wynosi $\mu_0 = 100$ a jego odchylenie standardowe $\sigma = 1$. Zakładając, że zgodnie ze specyfikacją proces powinien mieścić się w granicach $[97, 103]$, należy wyznaczyć minimalną liczebność próbki dla kart \bar{X} i p tak aby dla przesunięcia procesu do wartości $\mu_1 = 101$ prawdopodobieństwo przekroczenia górnej linii kontrolnej wynosiło 50%.

Karta \bar{X}

$$P(x_i \geq UCL) \geq 0,5 \quad \rightarrow \quad 1 - P(x_i < UCL) \geq 0,5 \quad \rightarrow \quad P(x_i < UCL) \leq 0,5 \quad \rightarrow$$

$$F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{\bar{X}})}(UCL) \leq 0,5 \quad \rightarrow \quad UCL \leq \mu_1 \quad \rightarrow \quad \mu_0 + L \sigma / \sqrt{n} \leq \mu_1 \quad \rightarrow$$

$$\mu_1 - \mu_0 \geq L \sigma / \sqrt{n} \quad \rightarrow \quad n \geq \frac{L^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \quad \rightarrow \quad n \geq \frac{3^2 \cdot 1^2}{(101 - 100)^2} = 9$$

Karta p

Zastosowanie reguły doboru rozmiaru próby dla przekroczenia określonej proporcji ilości produktów wadliwych z co najmniej 50% prawdopodobieństwem wykrycia (slajd 10) wymaga ustalenia wadliwości aktualnej p_0 i niedopuszczalnej p_1 .

Dla procesu o $\mu_0 = 100$ i $\sigma = 1$ i granicach $[97, 103]$ położonych w odległości $\pm 3\sigma$ od nominalnej średniej prawdopodobieństwo wystąpienia produktów wadliwych wynosi

$$p_0 = 0,0027.$$

W przypadku przesunięcia średniej procesu prawdopodobieństwo wystąpienia wad wzrasta do wartości:

$$p_1 = P(x_i \geq UCL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma)}(UCL) = 1 - F_{\mathcal{N}(101, 1)}(103) \approx 0,0228$$

Rozmiar próby powinien wynosić:

$$n \geq \frac{L^2}{(p_1 - p_0)^2} p_0(1 - p_0) = \frac{3^2}{(0,0228 - 0,0027)^2} 0,0027(1 - 0,0027) \approx 60.$$

Karty kontrolne – podsumowanie

- wdrażając karty kontrolne należy wybrać istotne parametry procesu i przygotować dla nich karty kontrolne
- w miarę upływu czasu weryfikować istotność monitorowanych parametrów: eliminować niewykorzystywane karty, wdrażać nowe karty
- karty dla cech dyskretnych należy wykorzystywać jeśli nie można wdrożyć kart dla cech ciągłych (np. monitorowany proces jest złożony lub trudno jest wykonać pomiary jego istotnych parametrów)
- o ile jest to możliwe należy stosować karty dla cech ciągłych
- w miarę wdrażania kart kontrolnych liczba karty dla cech dyskretnych a rośnie liczba kart dla cech ciągłych
- w początkowej fazie zadaniem kart kontrolnych jest stabilizacja procesu – na tym etapie wykorzystywane są klasyczne karty kontrolne
- po ustabilizowaniu procesu zadaniem stawianym przed kartami staje się eliminacja zmienności procesu – na tym etapie wykorzystywane są sekwencyjne lub adaptacyjne karty kontrolne