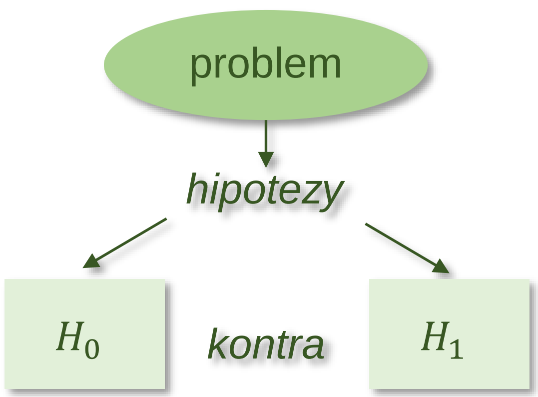
Sterowanie jakością

Weryfikacja hipotez statystycznych
Hipotezy parametryczne



Materiały

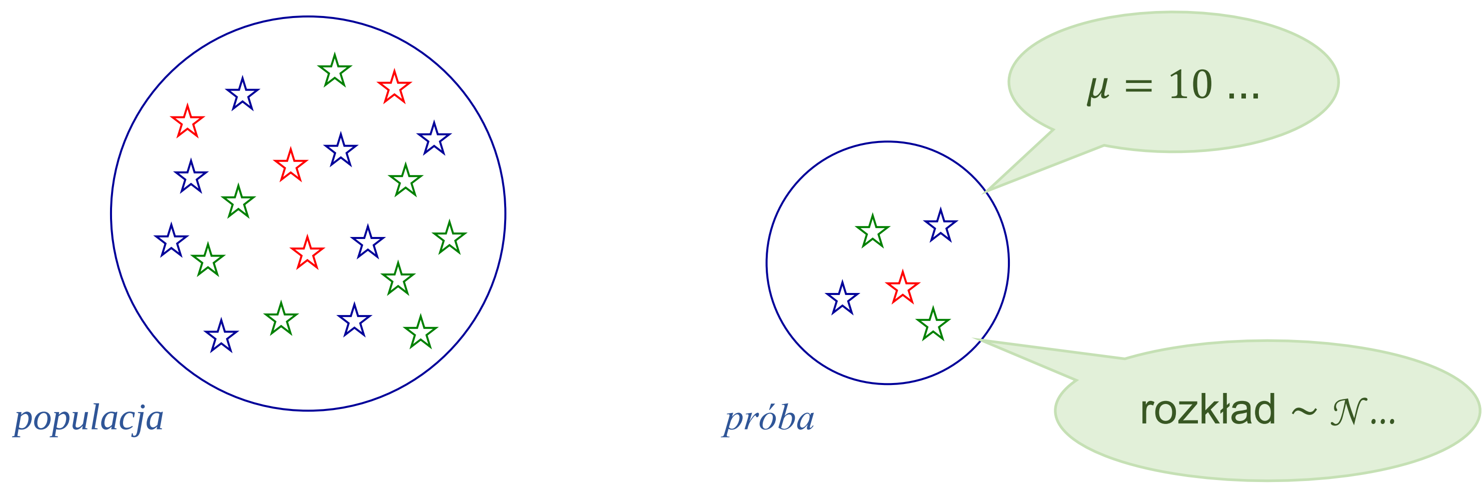
http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/

Weryfikacja hipotez statystycznych

Teoria weryfikacji hipotez statystycznych – zajmuje się tworzeniem reguł umożliwiających rozstrzyganie o słuszności sądów (hipotez statystycznych).

Hipotezy statystyczne są sądami dotyczącymi rozkładu populacji; hipotezy można podzielić na:

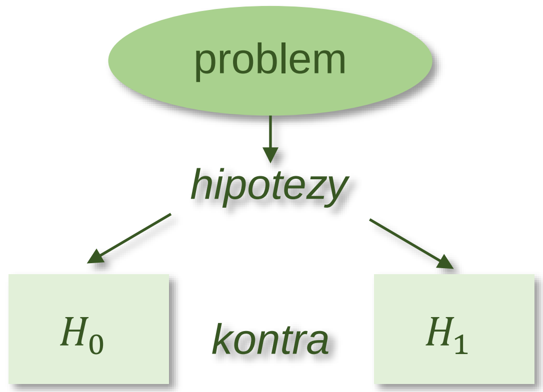
- *parametryczne*, które dotyczą wartości parametrów rozkładu (są najczęściej sprawdzanymi hipotezami statystycznymi),
- *nieparametryczne*, które są np. opiniami dotyczącymi typu rozkładu czy przypuszczeniami o jednakowym rozkładzie dwóch populacji.



Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).



2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

3. Jeśli spełnione są określone warunki podjąć decyzję o odrzuceniu hipotezy H_0 na rzecz hipotezy H_1.

Weryfikacja hipotez parametrycznych

W przypadku *hipotez parametrycznych*, sprawdzających wartość nieznanego parametru rozkładu:

- *hipoteza* H_0 zakłada, że wartość nieznanego parametru rozkładu θ wynosi θ_0, czyli:

$$H_0: \ \theta = \theta_0$$

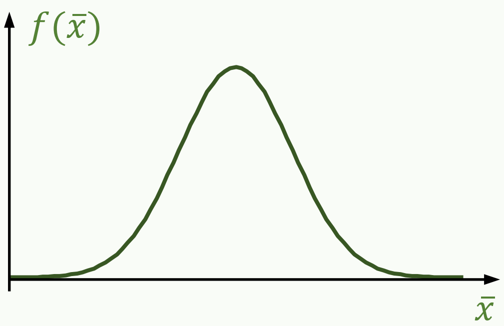
- *hipoteza* H_1 ma najczęściej jedną z postaci:

a) $H_1: \ \theta < \theta_0$, *b)* $H_1: \ \theta \neq \theta_0$, *c)* $H_1: \ \theta > \theta_0$,

- *statystyka testowa* jest estymatorem weryfikowanego parametru rozkładu.

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- $H_0: \ \mu = 10$
- $H_1: \ \mu < 10$
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$



Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej (wersja 1)

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).

2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

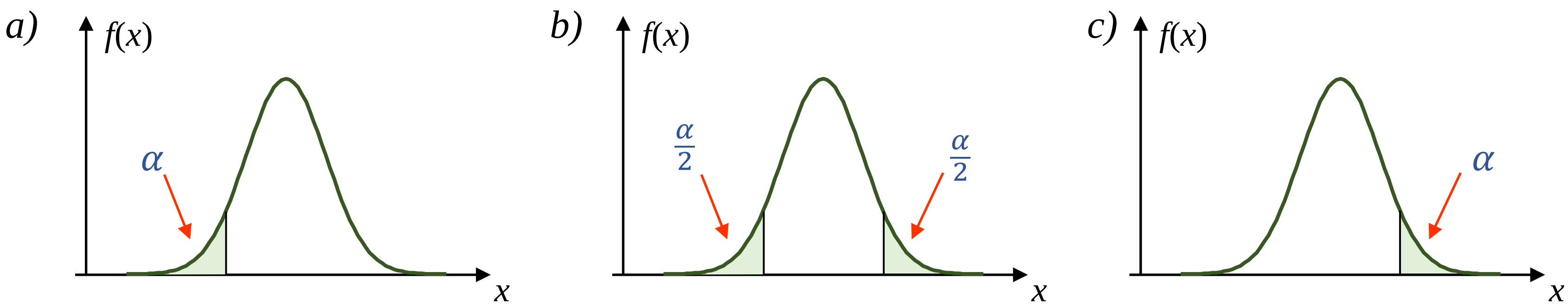
3. Wyznaczyć w oparciu o przyjęty *poziom istotności* α tzw. *obszar krytyczny* (obszar odrzucenia hipotezy H_0) i w przypadku gdy:

   - wartość *statystyki testowej* **należy** do *obszaru krytycznego* **odrzucić** hipotezę H_0 i przyjąć hipotezę H_1,
   - wartość *statystyki testowej* **nie należy** do *obszaru krytycznego* to nie odrzucać hipotezy H_0.

Obszar krytyczny

Obszar krytyczny jest wyznaczany w oparciu o rozkład przyjętej statystyki testowej, założony *poziom istotności* α i postać *hipotezy alternatywnej*.

Poziom istotności α jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu polegającego na **odrzuceniu prawdziwej** hipotezy H_0, jest to tzw. *błąd pierwszego rodzaju*.

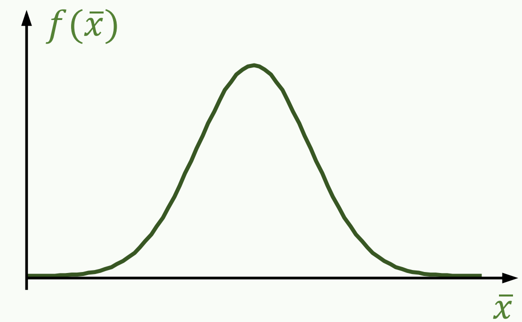


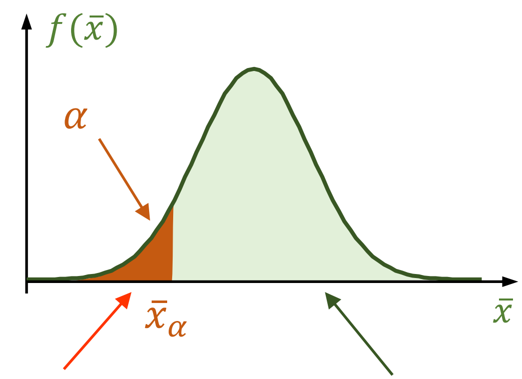
Obszar krytyczny a) lewostronny $H_1\colon \theta < \theta_0$, *b) obustronny* $H_1\colon\ \theta \neq \theta_0$, *c) prawostronny* $H_1\colon\ \theta > \theta_0$

Weryfikacja hipotez statystycznych

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- H_0: $\mu = 10$
- H_1: $\mu < 10$
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$





odrzucić H_0 *i przyjąć* H_1
(obszar krytyczny)

nie można odrzucić H_0

$$P(\bar{x} < \bar{x}_\alpha) = \alpha$$

Etapy weryfikacji hipotezy statystycznej (wersja 2)

1. Postawić hipotezy:

   hipotezę zerową H_0 (poddawaną weryfikacji) i
   hipotezę alternatywną H_1 (przeciwstawną weryfikowanej hipotezie H_0).

2. Wyznaczyć *statystykę testową* (zależną od postawionych hipotez).

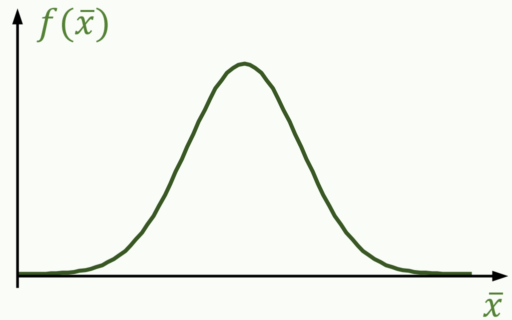
3. Wyznaczyć *graniczny poziom istotności* (ang. $p-value$, pol. $p-wartość$) tzn. najmniejszy *poziom istotności* przy którym hipoteza H_0 może zostać odrzucona i w przypadku gdy:

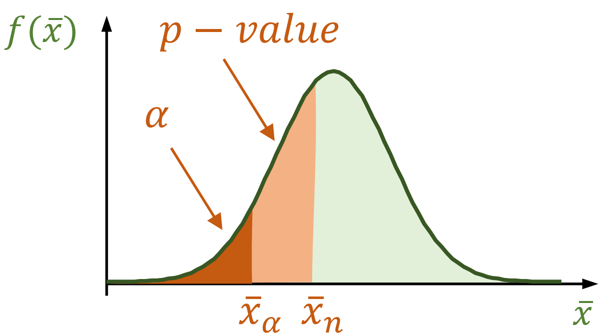
   - *poziom istotności* α jest **większy** od *poziomu granicznego* $p-value$ to **odrzucić** hipotezę H_0 i przyjąć hipotezę H_1,

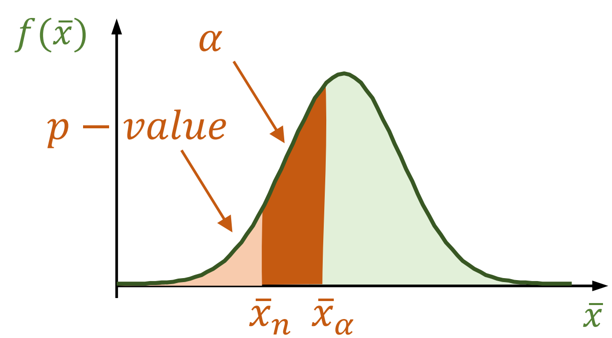
   - *poziom istotności* α jest **mniejszy** od *poziomu granicznego* $p-value$ to to nie odrzucać hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotezy o średniej w populacji

- H_0: $\mu = 10$
- H_1: $\mu < 10$
- *statystyka testowa*: $\bar{x}$







$P(\bar{x} < \bar{x}_\alpha) = \alpha$

$P(\bar{x} < \bar{x}_n) = p - value,$ $\bar{x}_n$ *– wartość statystyki testowej*

odrzucić H_0 *i przyjąć* H_1 *jeśli* $\alpha > p - value$

Weryfikacja hipotez dla średniej

Statystyką testową wykorzystywaną podczas weryfikacji hipotez o wartości średniej w populacji μ jest średnia z próby $\bar{x}$. Rozkład statystyki testowej, czyli w tym przypadku średniej z próby, jest zależny od posiadanej wiedzy o populacji:

- jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym **znane** jest odchylenie standardowe populacji σ to rozkład średniej z próby jest zbieżny do rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, do weryfikacji hipotezy o średniej wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n},$$

- jeżeli populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ przy czym **nie jest znane** odchylenie standardowe populacji σ (i nie można przyjąć, że $\sigma \approx s$ ponieważ n jest małe, tzn. $n < 30$) to po podstawieniu odchylenia z próby do statystyki testowej otrzymuje się jej nową postać (patrz: przedział ufności dla μ):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n - 1},$$

statystyka ta ma rozkład *t – Studenta* o $(n - 1)$ stopniach swobody.

Weryfikacja hipotez dla średniej

Rozkład pomiarów długości detalu jest rozkładem normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 1{,}5$. Na podstawie 10 niezależnych pomiarów długości detalu wyznaczono jego średnią długość równą ok. $20{,}34$. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że rzeczywista długość detalu wynosi 20.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0 : \mu = 20$, wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1 : \mu \neq 20$.

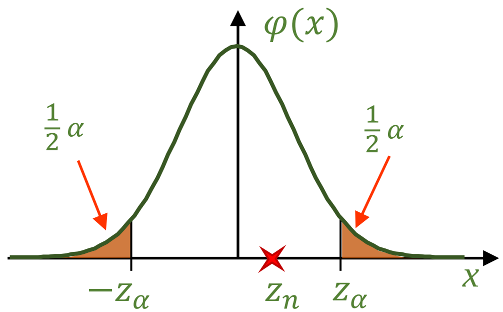
2. Znane jest odchylenie standardowe więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}.$$

   Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (zakładając, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$$z_n = \frac{20{,}34 - 20}{1{,}5}\sqrt{10} \approx 0{,}72.$$

3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:

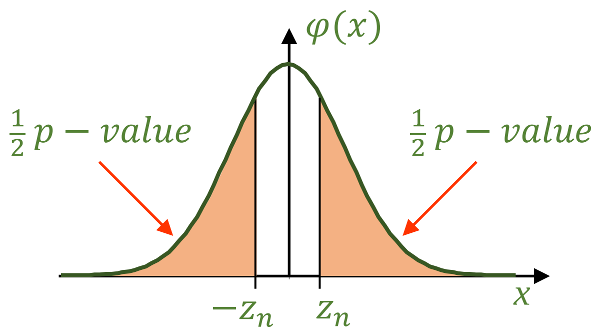


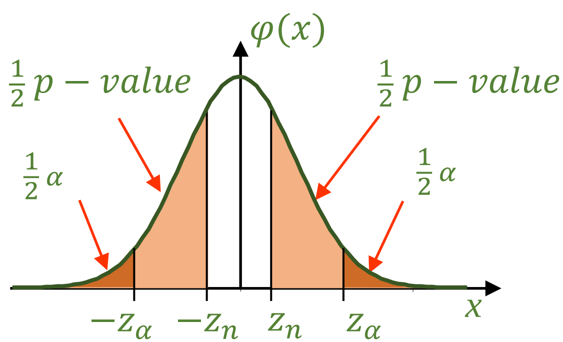
$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}58.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje **poza** *obszarem krytycznym* $(|z_n| < |z_\alpha|)$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\frac{1}{2}\, p\text{-}value = \Phi(-z_n) = \Phi(-0{,}72) \approx 0{,}24 \quad \to p\text{-}value \approx 0{,}48.$$





Ponieważ założony *poziom istotności* α **jest mniejszy** od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez dla średniej

Automat produkuje detale o nominalnej długości 20. Wykonano 10 niezależnych pomiarów długości pewnego detalu otrzymując wyniki: 20, 21, $22{,}4$, 23, $21{,}3$, $21{,}9$, $20{,}6$, 21, $19{,}8$, $20{,}4$. Czy obliczona średnia długość detalu równa $21{,}14$ pozwala na stwierdzenie, że rzeczywista długość jest większa od nominalnej. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu = 20$, wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1\colon \mu > 20$.

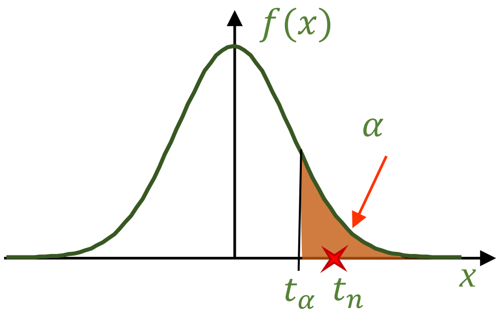
2. W przypadku gdy odchylenie standardowe populacji nie jest znane, do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testowa:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s}\sqrt{n-1}.$$

Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (zakładając, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$s \approx 0{,}98,$ $\qquad t_n = \frac{21{,}14-20}{0{,}98}\sqrt{9} \approx 3{,}49.$

3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty $F_{t(n-1)}$



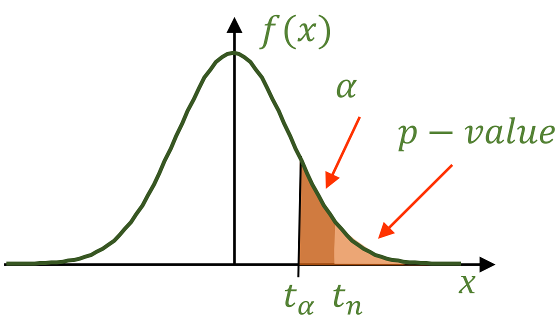
$$t_\alpha = F^{-1}_{t(9)}(1-\alpha) = F^{-1}_{t(9)}(0{,}99) \approx 2{,}82,$$

$$t_\alpha = -F^{-1}_{t(9)}(\alpha) = -F^{-1}_{t(9)}(0{,}01) \approx 2{,}82.$$

Obliczona wartość statystyki testowej znajduje **wewnątrz** *obszaru krytycznego* $(t_n > t_\alpha)$, więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** i przyjąć hipotezę alternatywną H_1.

Z prawdopodobieństwem błędu mniejszym od $0{,}01$ można twierdzić, że długość detalu jest większa od nominalnej.

Graniczny poziom istotności $p-value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $F_{t(n-1)}$:



$$p\text{–}value = F_{t(n-1)}(-t_n) = F_{t(9)}(-3{,}49) \approx 0{,}003.$$

Ponieważ założony *poziom istotności* α jest **większy** od obliczonej wartości $p-value$ więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** i przyjąć hipotezę alternatywną H_1.

STATISTICA – weryfikacja hipotez statystycznych

Wynikiem działania testów statystycznych w STATISTICE są graniczne poziomy istotności $p - value$.

Decyzję o **odrzuceniu** hipotezy H_0 można podjąć, gdy:

założony *poziom istotności* α jest **większy** od *poziomu granicznego* $p - value$.

O **braku podstaw** do odrzucenia hipotezy H_0 świadczy:

poziom istotności α **mniejszy** od *granicznego poziomu istotności* $p - value$.

Uwagi:

- w przypadku kilku testów nie ma możliwości określenia wartości poziomu α (domyślnie $\alpha = 0{,}05$),
- część funkcji dostępnych w programie przeprowadza obliczenia dla testów dwustronnych, oznacza to, że dla statystyki testowej o symetrycznym rozkładzie wartości $p - value$ dla testu jednostronnego można wyznaczyć z zależności:

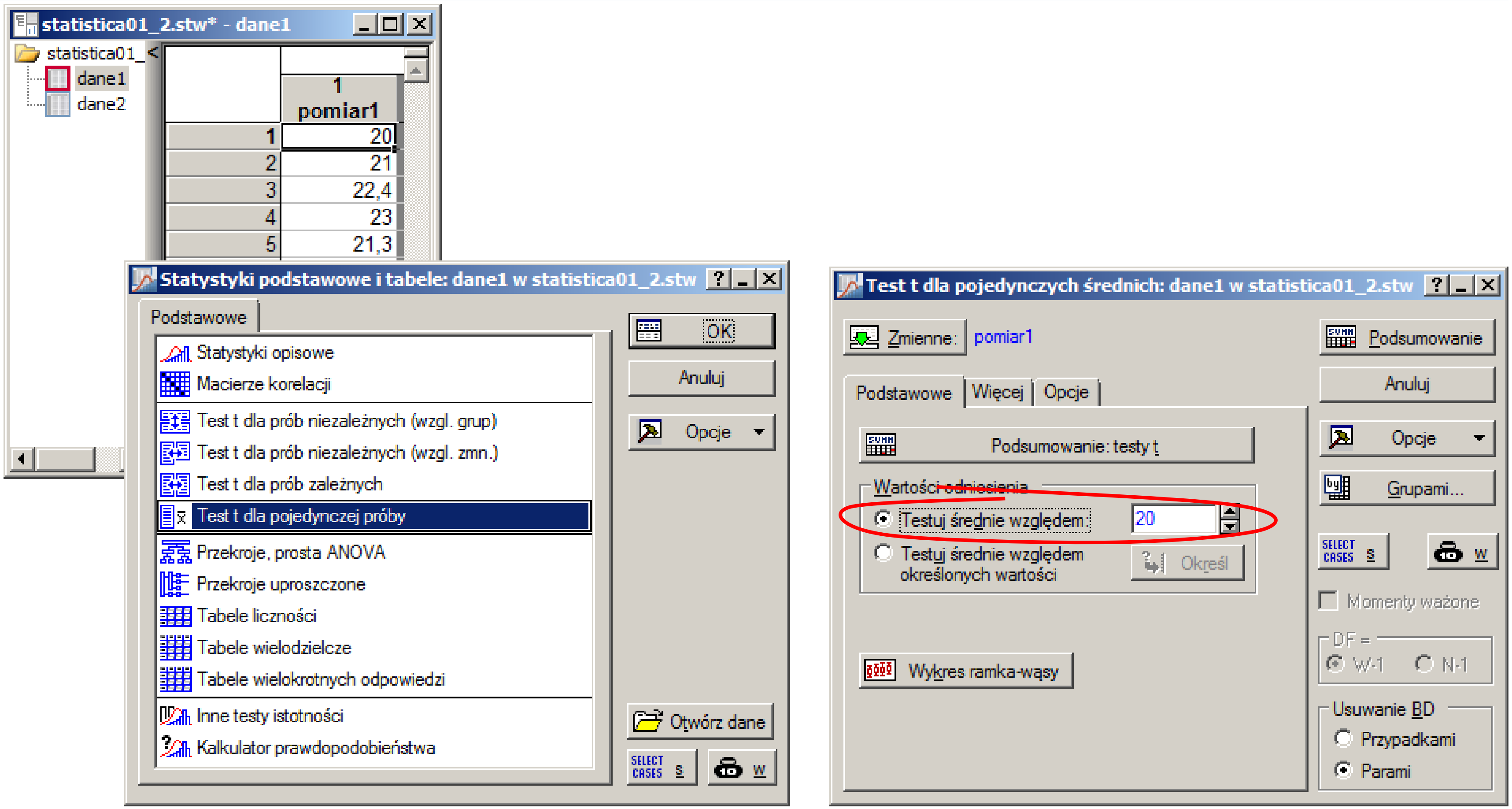
$$p_1 = \frac{1}{2} p_{12} \qquad \text{i} \qquad p_2 = 1 - \frac{1}{2} p_{12},$$

gdzie: p_1, p_2, p_{12} – $p - value$ dla testów jednostronnych i dla testu dwustronnego,

- dla ułatwienia, wyniki testów, które dla ustalonego poziomu istotności α wymagają odrzucenia hipotezy H_0 zaznaczane są na czerwono.

STATISTICA – weryfikacja hipotez dla średniej

Automat produkuje detale o nominalnej długości 20. Wykonano 10 niezależnych pomiarów długości pewnego detalu i zapisano je w arkuszu *dane1* w zmiennej *pomiar1*. Czy obliczona średnia długość detalu równa $21{,}14$ pozwala na stwierdzenie, że rzeczywista długość jest większa od nominalnej. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.



STATISTICA – weryfikacja hipotez dla średniej

statistica01_2.stw - Test średnich względem stałej wartości odniesienia (dane1 w statistica01_2.stw)

Test średnich względem stałej wartości odniesienia (dane1 w statistica01_2.stw)

Zmienna	Średnia	Odch.st.	Ważnych	Bł. std.	Odniesienie Stała	t	df	p
pomiar1	21,14000	1,034086	10	0,327007	20,00000	3,486168	9	0,006871

- $p - value = 0{,}006871$ jest wartością dla testu dwustronnego, w przykładzie należy przeprowadzić test prawostronny, ze względu na symetrię rozkładu *t – Studenta* $p - value$ dla testów jednostronnych otrzymuje się jako:

$$p_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}006871 = 0{,}0034 \quad \text{i} \quad p_2 = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}006871 = 0{,}9966 ,$$

- **mniejsza** z wartości $p - value$ dotyczy hipotezy H_1 **zgodnej** ze średnią otrzymaną z próby, tzn. w tym przypadku hipotezy $H_1\colon \mu > 20$, ostatecznie więc:

$$p - value = 0{,}0034,$$

założony poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ jest **większy** od poziomu granicznego $p - value$ więc hipotezę H_0 należy **odrzucić** na rzecz hipotezy H_1 o większej od nominalnej średniej długości detalu.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Hipotezy dotyczące równości dwóch średnich sprawdzane są w celu wyjaśnienia przypadkowej lub nieprzypadkowej rozbieżności pewnego parametru populacji. W takim przypadku wykonywane są dwie serie pomiarów, dla każdej z nich obliczana jest średnia. Weryfikacja hipotezy sprowadza się do zbadania różnicy pomiędzy wyznaczonymi średnimi. Rozkład statystyki testowej, jest zależny od posiadanej wiedzy o populacjach. jeżeli populacje generalne mają rozkład odpowiednio: $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ przy czym

- **znane** są odchylenia standardowe populacji σ_1 i σ_2, do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$:

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

- odchylenia standardowe populacji σ_1 i σ_2 **nie są znane ale są równe** $(\sigma_1 = \sigma_2)$, do weryfikacji hipotezy o równości średnich wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie *t – Studenta* o $(n_1 + n_2 - 2)$ stopniach swobody:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

gdzie: $s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}$.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Wykonano 2 serie pomiarów długości detalu z jednakową dokładnością $\sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}5$. W pierwszej serii przeprowadzono 10 pomiarów: 18, 21, $22{,}4$, 23, $21{,}3$, $21{,}9$, $17{,}6$, 21, $17{,}8$, $19{,}4$ a w drugiej 8 pomiarów: $22{,}1$, $20{,}3$, $21{,}4$, $23{,}1$, $21{,}1$, $21{,}8$, $20{,}6$, $22{,}8$. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że rozbieżność średnich jest nieprzypadkowa.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ wobec *h. alternatywnej* $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Odchylenia standardowe są znane więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

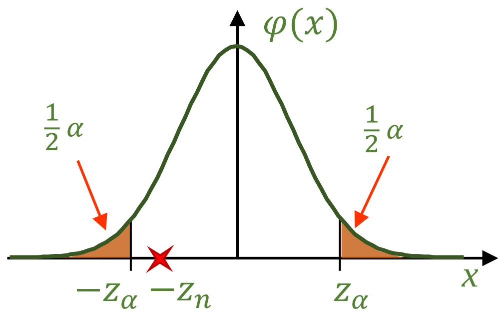
Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$\overline{x}_1 = 20{,}34$, $\overline{x}_2 = 21{,}65$,

$$z_n = \frac{20{,}34 - 21{,}65}{\sqrt{\frac{1,5^2}{10} + \frac{1,5^2}{8}}} = \frac{-1{,}31}{1{,}5\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} \approx -1{,}84.$$

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

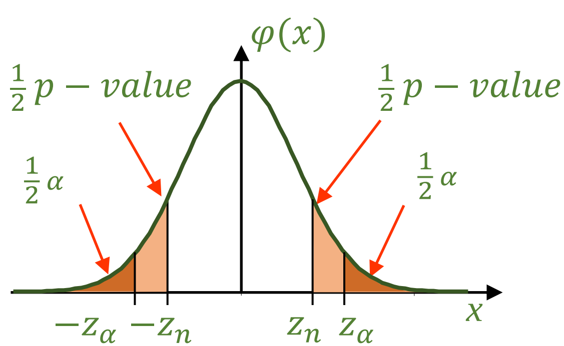
3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$:



$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}58.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje **poza** *obszarem krytycznym* $(|z_n| < |z_\alpha|)$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:



$$\frac{1}{2}\,p\text{-}value = \Phi(-z_n) = \Phi(-1{,}84) \approx 0{,}033,$$

$$p\text{-}value \approx 0{,}066.$$

Ponieważ założony *poziom istotności* α jest **mniejszy** od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Przyjmując założenie, że odchylenia standardowe populacji $\sigma_1 = \sigma_2$ ale **nie są znane** należy zadanie rozwiązać w podobny sposób zmieniając jedynie statystykę testową.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Odchylenia standardowe nie są znane więc do zweryfikowania hipotezy przyjmowana jest statystyka testową:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad \text{gdzie: } s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}.$$

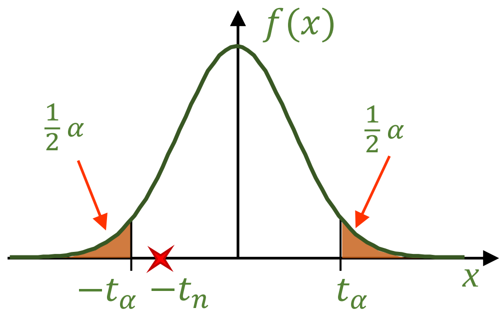
Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$\overline{x}_1 = 20{,}34$, $\overline{x}_2 = 21{,}65$, $s_1 \approx 2{,}00$, $s_2 \approx 1{,}00$, $s \approx 1{,}64$,

$$t_n = \frac{20{,}34 - 21{,}65}{1{,}64\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} \approx -1{,}69.$$

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

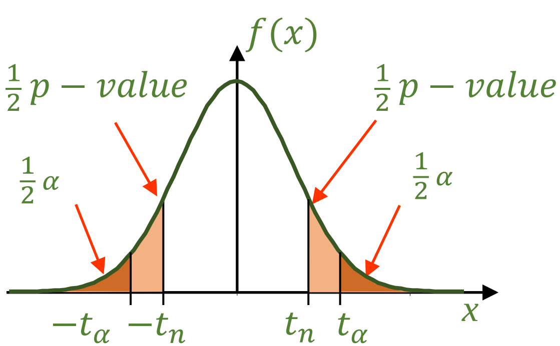
3. *Obszar krytyczny* wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty rozkładu $t(16)$:



$$t_\alpha = -F^{-1}_{t(16)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F^{-1}_{t(16)}\left(\frac{0{,}01}{2}\right) \approx 2{,}92\,.$$

Ponieważ wartość statystyki testowej znajduje poza *obszarem krytycznym* $(|t_n| < |t_\alpha|)$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Graniczny poziom istotności $p - value$ wyznacza się korzystając z dystrybuanty $\mathcal{N}(0,1)$:



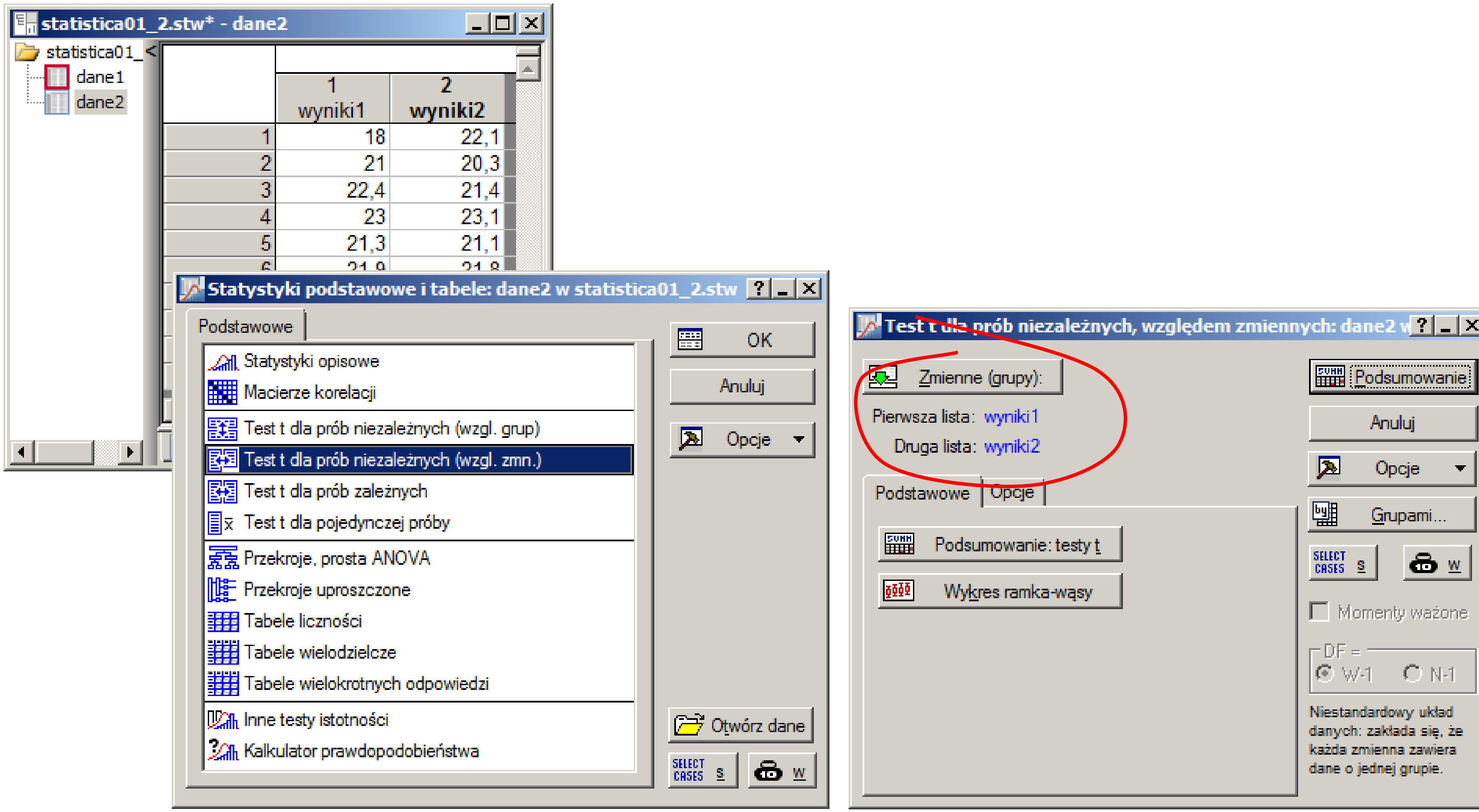
$$\frac{1}{2}p\text{–}\,value = F_{t(16)}(-t_n) = F_{t(16)}(-1{,}69) \approx 0{,}055$$

$$p\text{–}\,value \approx 0{,}11.$$

Ponieważ założony *poziom istotności* α jest mniejszy od obliczonej wartości $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

Wykonano dwie serie pomiarów długości detalu z jednakową dokładnością. Wyniki zapisano w arkuszu *dane2*, w zmiennych *wyniki1* i *wyniki2*. Zweryfikować na poziomie istotności hipotezę, że rozbieżność średnich jest nieprzypadkowa.



Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji

statistica01_2.stw - Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)
Uwaga: Zmienne traktowane są jako niezależne próby.

Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa1	Średnia Grupa2	t	df	p	Nważn. Grupa1	Nważn. Grupa2	**Odch.std Grupa1**	Odch.std Grupa2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
wyniki1 vs. wyniki2	20,34	21,65	-1,6885	16	0,1107	10	8	1,996219	0,995705	4,019340	0,080154

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

wyniki testu o równości średnich

- $p - value = 0{,}1107$ jest wartością dla testu dwustronnego (tzn. testu który należało przeprowadzić),
- poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ jest **mniejszy** od granicznego poziomu istotności $p - value$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 – nie można więc stwierdzić, że średnie różnią się od siebie w sposób istotny.

Weryfikacja hipotez o równości wariancji dwóch populacji

Hipotezy dotyczące równości dwóch wariancji sprawdzane są w celu wyjaśnienia przypadkowej lub nieprzypadkowej rozbieżności dokładności dwóch serii pomiarów.

Przy założeniu, że populacje generalne mają rozkład: $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ i nie są znane parametry tych rozkładów, do weryfikacji hipotezy o równości wariancji wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie ***F Snedecora (Fishera)*** o $v_1 = n_1 - 1$ i $v_2 = n_2 - 1$ stopniach swobody (n_1, n_2 – liczebności prób losowanych z obydwu populacji):

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

gdzie: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

Uwagi:

- Oznaczenia populacji przyjmowane są w taki sposób, że:

$$s_1^2 > s_2^2.$$

- Hipoteza alternatywna H_1 (wobec hipotezy zerowej $H_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) formułowana jest w postaci:

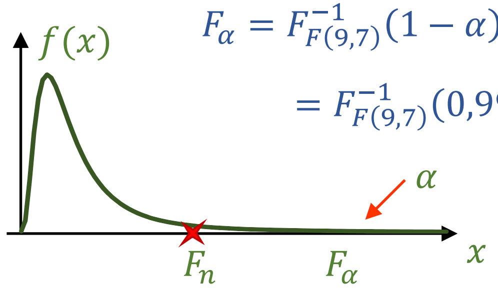
$$H_1\colon\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Weryfikacja hipotez o równości wariancji dwóch populacji

Dla danych ze slajdu 19. zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę o jednakowej wariancji obydwu serii pomiarów.

Wartość statystyki testowej wynosi: $F_n = \frac{s_1^2}{s_2^2} \approx \frac{2^2}{1^2} = 4 \;\; (s_1 \approx 2{,}00,\ s_2 \approx 1{,}00).$

Obszar krytyczny



$$F_\alpha = F^{-1}_{F(9,7)}(1-\alpha) =$$
$$= F^{-1}_{F(9,7)}(0{,}99) \approx 6{,}72.$$

Graniczny poziom istotności

$$p\text{–}value = 1 - F_{F(9,7)}(F_n) \approx 1 - 0{,}96 = 0{,}04.$$

Wartość statystyki testowej **poza** *obszarem krytycznym*, poziom istotności α jest **mniejszy** od $p - value$ więc **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

statistica01_2.stw - Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)
Uwaga: Zmienne traktowane są jako niezależne próby.

Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa1	Średnia Grupa2	t	df	p	Nważn. Grupa1	Nważn. Grupa2	Odch.std Grupa1	Odch.std Grupa2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
wyniki1 vs. wyniki2	20,34	21,65	-1,6885	16	0,1107	10	8	1,996219	0,995705	4,019340	0,080154

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

wyniki testu o równości wariancji

$p - value = 0{,}080154$ jest wartością dla testu dwustronnego,

dla testu jednostronnego $p - value = 0{,}040077.$

Weryfikacja hipotez dla frakcji

Podstawowe badania cech niemierzalnych dotyczą badań frakcji elementów wyróżnionych.

Frakcja (procent, wskaźnik struktury) jest estymowana zależnością:

$$\hat{p} = \frac{m}{n},$$

gdzie m – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n.

W przypadku dużej próby rozkład frakcji z próby jest zbieżny do: $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$. Do weryfikacji hipotezy o frakcji wykorzystywana jest unormowana zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

Weryfikacja hipotez dla frakcji

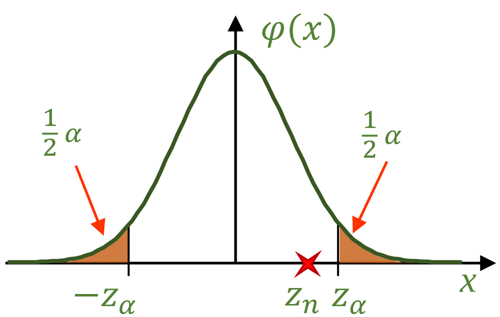
Wysunięto hipotezę, że wadliwość pewnego podzespołu wynosi 10%. W celu sprawdzenia tej hipotezy wylosowano próbkę 100 podzespołów i otrzymano w niej 15 podzespołów wadliwych. Zweryfikować hipotezę na poziomie istotności $0{,}05$.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0 \colon p = 10\%$ wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1 \colon p \neq 10\%$.
2. Obliczona na podstawie wyników z próby wartość statystyki testowej (przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa) wynosi:

$$z_n = \frac{0{,}15 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{100}}} \approx 1{,}67.$$

Obszar krytyczny:

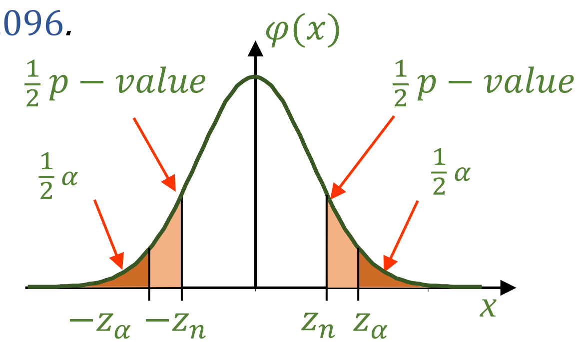
$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}05}{2}\right) \approx 1{,}96.$$



Graniczny poziom istotności

$$\frac{1}{2} p\text{-}value = \Phi(-1{,}67) \approx 0{,}048,$$

$$p\text{-}value \approx 0{,}096.$$



Poziom istotności α jest **mniejszy** od $p - value$ **nie ma podstaw do odrzucenia** hipotezy H_0.

Weryfikacja hipotez o równości frakcji dwóch populacji

Hipotezy dotyczące równości dwóch frakcji sprawdzane są w celu wyjaśnienia przypadkowej lub nieprzypadkowej rozbieżności frakcji elementów wyróżnionych w obu populacjach.

W przypadku gdy liczebności obydwu populacji są duże (≥ 100) do weryfikacji hipotezy o równości frakcji wykorzystywana jest zmienna o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}},$$

gdzie:

m_1 – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n_1,

m_2 – liczba elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n_2,

$p_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $p_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $\overline{p} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, $n = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$.

Weryfikacja hipotez o równości frakcji dwóch populacji

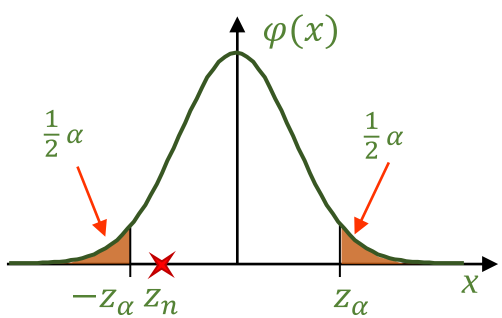
Wysunięto hipotezę, że jakość produkcji pewnego wyrobu po wprowadzeniu nowej technologii nie uległa zmianie. Wylosowano 120 sztuk wyprodukowanych starą technologią i otrzymano 12 sztuk wadliwych, wśród wylosowanych 160 sztuk wyprodukowanych nową technologią i otrzymano 20 sztuk wadliwych. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę o jednakowym wskaźniku braków przy produkcji obydwoma metodami.

1. Należy zweryfikować *hipotezę zerową* $H_0\colon p_1 = p_2$ wobec *hipotezy alternatywnej* $H_1\colon p_1 \neq p_2$.
2. Obliczona wartość statystyki testowej wynosi ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}125$, $\overline{p} \approx 0{,}11$, $n \approx 68{,}57$):

$$z_n = \frac{0{,}1 - 0{,}125}{\sqrt{0{,}11 \cdot 0{,}89/68{,}57}} \approx -0{,}65$$

Obszar krytyczny:

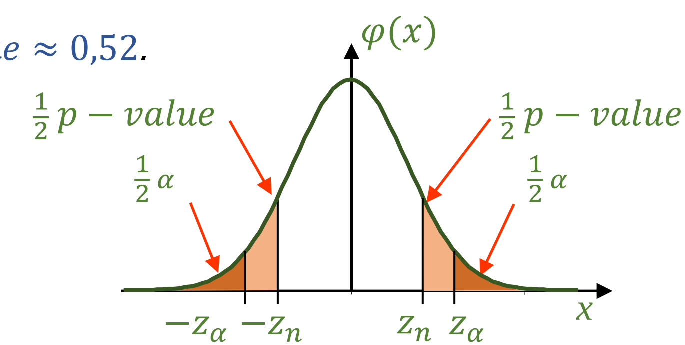
$$z_\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0{,}05}{2}\right) \approx 1{,}96$$



Graniczny poziom istotności

$$\tfrac{1}{2} p\text{-}value = \Phi(-0{,}65) \approx 0{,}26,$$

$$p\text{-}value \approx 0{,}52.$$



Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 (wartość statystyki testowej znajduje **poza** *obszarem krytycznym*, *poziom istotności* α jest **mniejszy** od obliczonej wartości $p - value$).

Weryfikacja hipotez o równości frakcji dwóch populacji