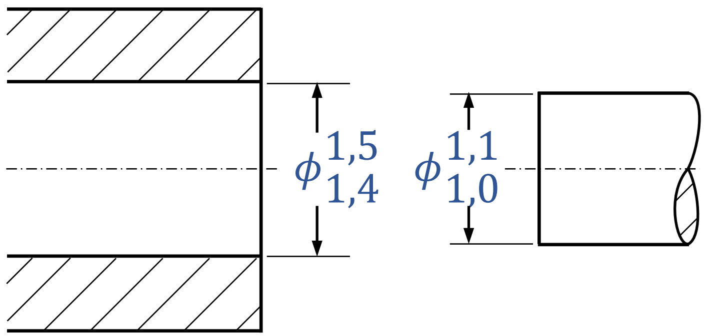
Sterowanie jakością

Zdolność procesu produkcyjnego

Zdolność a stabilność
Wskaźniki zdolności



Materiały

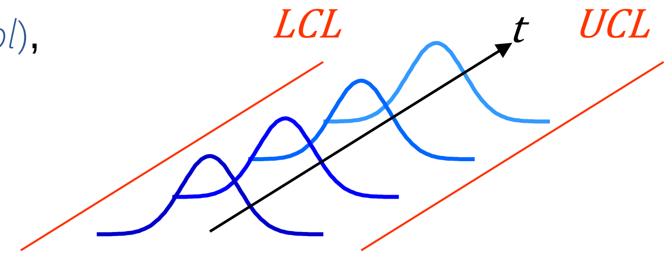
http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/

Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

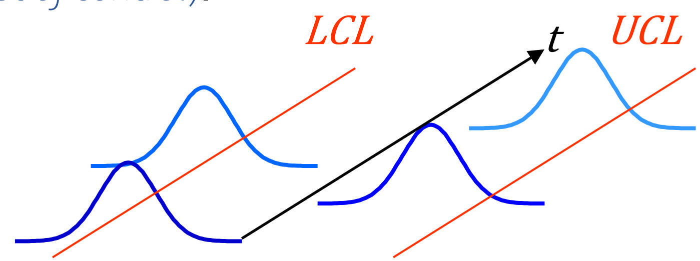
Karty kontrolne pozwalają ocenić czy monitorowany proces jest:

- ***stabilny*** (przebiega pomiędzy granicami kontrolnymi),
- ***wycentrowany*** (wartość średnia odpowiada, z akceptowalną dokładnością, nominalnej).

Proces stabilny to proces „*pod kontrolą*" (*ang. in control*),



proces niestabilny to proces „*poza kontrolą*" (*ang. out of control*).

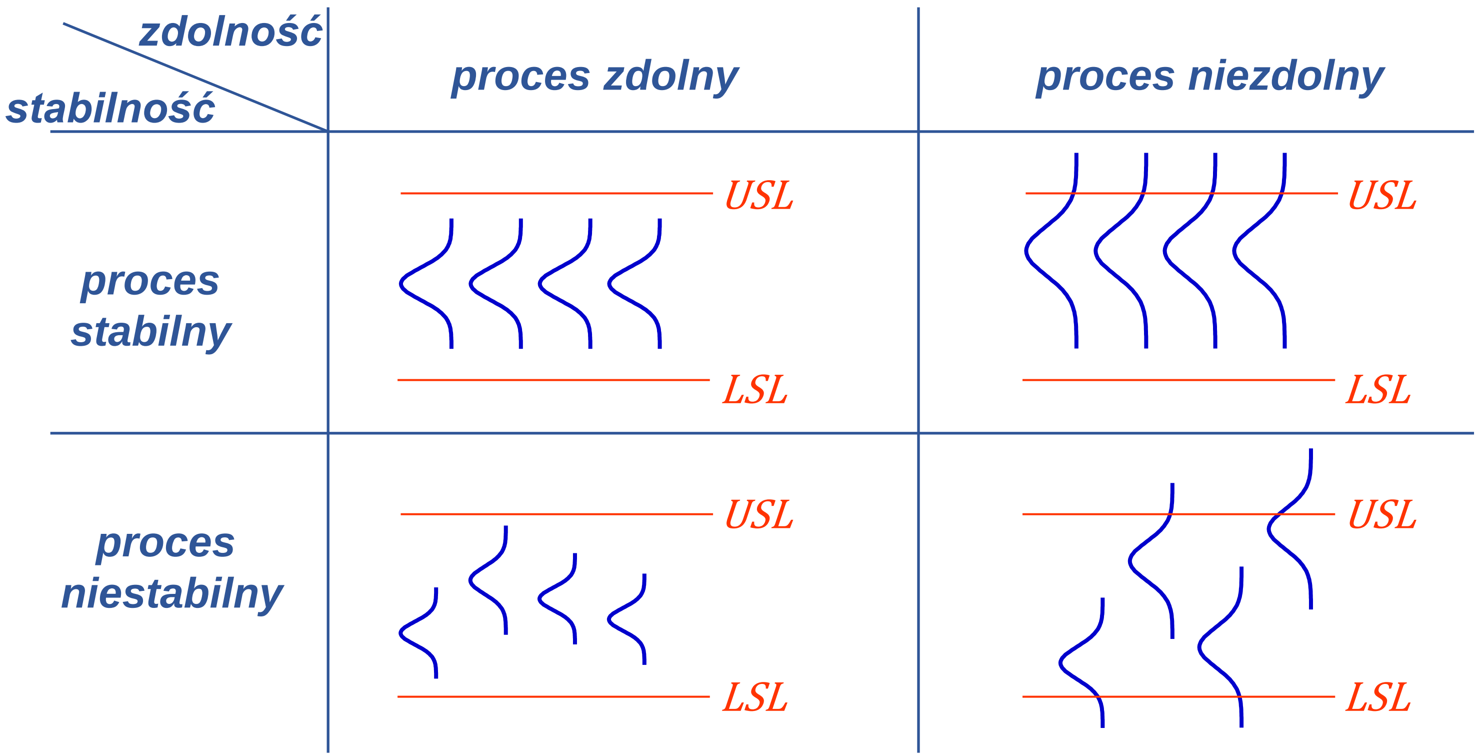


Proces, który jest jednocześnie ***stabilny*** i ***wycentrowany*** nazywany jest procesem ***uregulowanym***.

Karty kontrolne umożliwiają analizę stabilności procesu, są wykorzystywane do monitorowania, diagnozowania i sterowania procesów.

Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

Zdolność procesu jest cechą określającą stopień spełnienia przez proces wymogów specyfikacji. Proces zdolny to proces którego naturalna zmienność mieści się w granicach określonych w specyfikacji. Do oceny zdolności procesu wykorzystywanych jest szereg wskaźników: DPU, PPM, DPO, $DPMO$, C_p, C_{pk}, P_p, P_{pk}, ...



USL, LSL – górna i dolna granica specyfikacji
(ang. *Upper Specification Limit, Lower Specification Limit*)

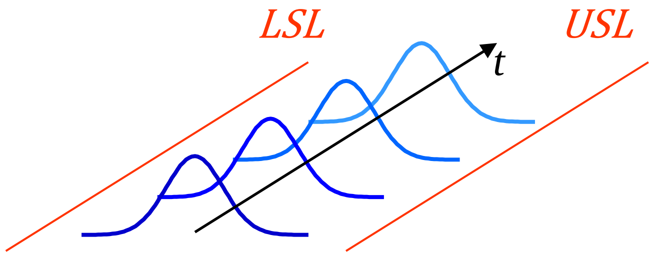
Stabilność a zdolność procesu produkcyjnego

Uwagi

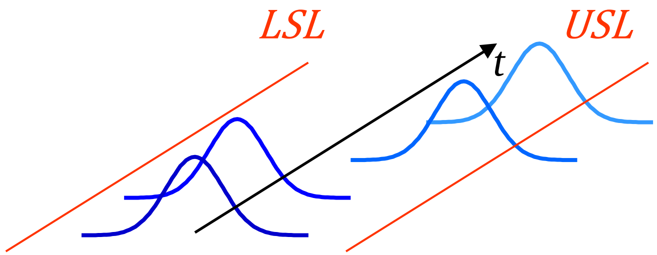
ocena ***zdolności procesu*** powinna być przeprowadzana wyłącznie dla ***procesów stabilnych***,

wskaźniki zdolności procesu oceniają ***aktualną*** zdolność procesu,

stabilność procesu pozwala na przyjęcie założenia, że ***przyszła*** zdolność procesu będzie równa ***aktualnej***,



przy ***braku stabilności*** nie można prognozować ***przyszłej*** zdolności procesu.



Wskaźniki pomiaru niezgodności

Do oceny ***zdolności procesu*** mogą być wykorzystywane wskaźniki wykorzystujące liczbę *niezgodnych* sztuk lub liczbę *niezgodności* (*niezgodność* to niespełnienie wymagań, defekt, wada).

Wadliwość, ***frakcja sztuk wadliwych*** – liczba niezgodnych sztuk w przeliczeniu na sztukę

$$p = D_U / U$$

Wadliwość można wyrażać w:

- %, tzn. w przeliczeniu na 100 sztuk produktu (czasem % zastępowany jest oznaczeniem *pph* (*ang. parts per hundred*),
- ‰, tzn. w przeliczeniu na 1 000 sztuk produktu (czasem ‰ zastępowany jest oznaczeniem *ppt* (*ang. parts per thousand*),
- *ppm*, tzn. w przeliczeniu na 1 000 000 sztuk produktu (*ang. parts per million*)

PPM – liczba niezgodnych sztuk w przeliczeniu na milion sztuk produktu:

$$PPM = p \cdot 1000000 = D_U / U \cdot 1000000$$

D_U – liczba niezgodnych sztuk (*ang. defective units*)
U – liczba sztuk produktu (*ang. units*)

Wskaźniki pomiaru niezgodności

DPU – liczba niezgodności w przeliczaniu na sztukę produktu (*ang. defects per unit*)

$$DPU = D/U$$

DPO – liczba niezgodności na możliwości ich wystąpienia (*ang. defects per opportunities*)

$$DPO = \frac{D}{U \cdot OP} = \frac{DPU}{OP} = \frac{D}{TOP}$$

DPMO – liczba niezgodności na milion możliwości ich wystąpienia (*ang. defects per million opportunities*)

$$DPMO = DPO \cdot 1000000$$

D – liczba niezgodności (*ang. defects*), liczba niezgodności jest równa liczbie wszystkich znalezionych wad, liczba produktów niezgodnych w ogólnym przypadku nie jest równa liczbie niezgodności (pojedynczy produkt może mieć więcej niż jedną wadę)

U – liczba sztuk produktu (*ang. units*)

OP – liczba możliwości wystąpienia niezgodności w sztuce produktu (ang. *opportunities*)

TOP – całkowita liczba możliwości wystąpienia niezgodności (ang. *total opportunities*) $TOP = U \cdot OP$.

Przykład 1.

Przebadano 10 detali kontrolując ich długość, średnice i twardość materiału. Wyznacz *frakcję sztuk wadliwych*, PPM, DPU, DPO, $DPMO$ w oparciu o wyniki przeprowadzonej kontroli.

Detal	Długość	Średnica	Twardość	Wady
1	x			1
2				0
3			x	1
4				0
5	x	x		2
6		x		1
7				0
8				0
9	x	x	x	3
10			x	1
			Razem niezgodnych	6
			Razem niezgodności	9

liczba sztuk produktu $U = 10$

liczba niezgodnych sztuk $D_U = 6$

liczba niezgodności $D = 9$

liczba możliwości wystąpienia niezgodności $OP = 3$

$$p = D_U/U = 6/10 = 0{,}6$$

$$PPM = p \cdot 1000000 = 600000$$

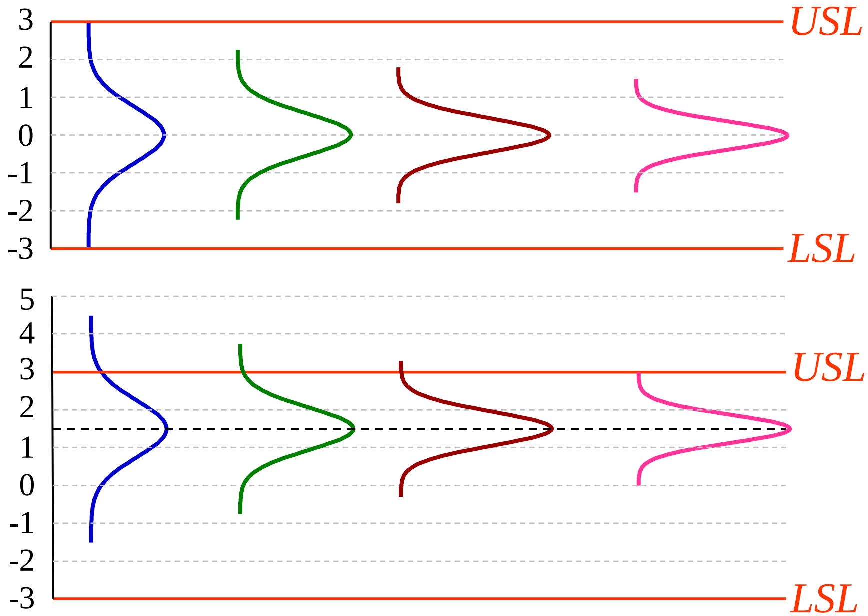
$$DPU = D/U = 9/10 = 0{,}9$$

$$DPO = DPU/OP = 0{,}9/3 = 0{,}3$$

$$DPMO = DPO \cdot 1000000 = 300000$$

Poziom sigma – idea

Poziom sigma (ang. *sigma level*) – opisuje w jakiej odległości (wyrażonej w odchyleniach standardowych) od średniej procesu znajdują się granice specyfikacji, *poziom sigma* oznaczany jest także jako *Z* lub *Z–score*.



Poziom sigma:

- $Z = 3\ (\sigma = 1)$
- $Z = 4\ (\sigma = 0{,}75)$
- $Z = 5\ (\sigma = 0{,}6)$
- $Z = 6\ (\sigma = 0{,}5)$

Poziom sigma:

- $Z = 1{,}5\ (\sigma = 1)$
- $Z = 2{,}0\ (\sigma = 0{,}75)$
- $Z = 2{,}5\ (\sigma = 0{,}6)$
- $Z = 3{,}0\ (\sigma = 0{,}5)$

Przy obliczaniu ***poziomu sigma*** zgodnie z metodologią ***Six Sigma*** brane jest pod uwagę założenie, że z upływem czasu proces najprawdopodobniej ulegnie przesunięciu maksymalnie do $1{,}5\sigma$. Rozróżnia się *dwa poziomy sigma*:

krótkoterminowy (*ang. short term*) Z_{st} – wyznaczany jak powyżej i

długoterminowy (*ang. long term*) Z_{lt} – zmniejszony o współczynnik kompensacji Z_{shift} równy $1{,}5$ (odpowiadający założonemu maksymalnemu przesunięcie procesu)

Poziom sigma

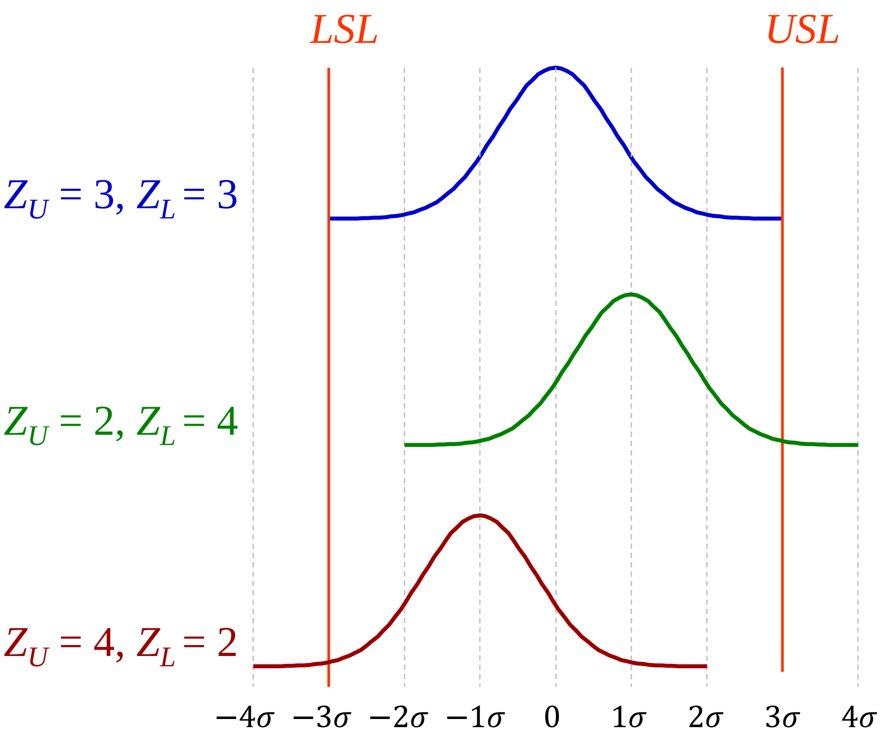
Poziom sigma liczony od:

USL jest oznaczany jako Z_{USL} lub Z_U

$$Z_U = \frac{USL - \mu}{\sigma}$$

LSL jest oznaczany jako Z_{LSL} lub Z_L

$$Z_L = \frac{\mu - LSL}{\sigma}$$



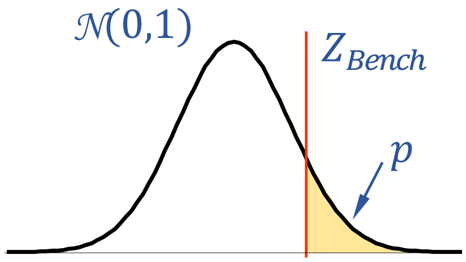
μ, σ – średnia i odchylenie standardowe procesu

Poziom sigma

Z_{Bench} (*ang. benchmark*) – wskaźnik wzorcowy, wskaźnik pozwalający na porównanie zdolności analizowanych procesów, umożliwia ocenę odległości od średniej procesu do linii skonstruowanej w oparciu o prawdopodobieństwo p wystąpienia produktów *niezgodnych* (*wadliwych*, *braków*).

Z_{Bench} to umowna górna granica specyfikacji (określona na podstawie rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$) za którą znalazłyby się wszystkie produkty niezgodne.

$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - p)$$



Prawdopodobieństwo wystąpienia niezgodności

Prawdopodobieństwo wystąpienia *niezgodności* można szacować na podstawie obserwowanej frakcji sztuk wadliwych lub frakcji niezgodności na liczbę możliwości ich wystąpienia:

$$p = \frac{D_U}{U} \qquad\qquad p = DPO = \frac{D}{U \cdot OP}$$

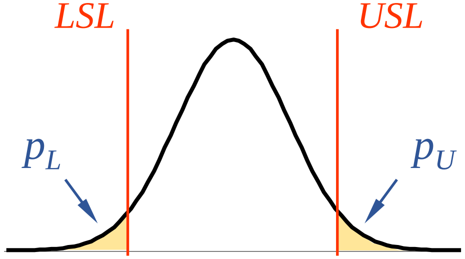
lub można je estymować znając rozkład prawdopodobieństwa analizowanego procesu

$$p = p_L + p_U = P(x < LSL) + P(x > USL) = F(LSL) + 1 - F(USL)$$

Dla procesu o rozkładzie normalnym, prawdopodobieństwo to można oszacować w oparciu o wartości Z_U i Z_L

$$p = P(x < LSL) + P(x > USL) = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = 1 - \Phi(Z_L) + 1 - \Phi(Z_U)$$

F – dystrybuanta rozkładu



Przykład 2. Wyznacz wartość wskaźnika Z_{Bench} dla procesów o:

a) $Z_U = Z_L = 3$ b) $Z_U = 2, Z_L = 4$ c) $DPO = 0{,}01$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia produktów nie spełniających wymogów specyfikacji dla procesów a) i b) można oszacować znając ich rozkład prawdopodobieństwa. Zakładając, że rozkład ten jest zgodny z rozkładem normalnym, prawdopodobieństwa te wynoszą odpowiednio:

a) $p = \Phi(-3) + \Phi(-3) = 0{,}0013 + 0{,}0013 = 0{,}0027$

b) $p = \Phi(-4) + \Phi(-2) = 0{,}00003 + 0{,}02275 = 0{,}02278$

Dla procesu c) prawdopodobieństwo jest równe liczbie niezgodności na liczbę możliwości ich wystąpienia

c) $p = 0{,}01$

Ostatecznie, Z_{Bench} wyznacza się jako:

a) $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0{,}0027) = 2{,}7822$

b) $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0{,}02278) = 1{,}9994$

c) $Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1 - 0{,}01) = 2{,}3263$

Szacowanie odchylenia standardowego procesu

Szacowanie odchylenia standardowego		
symbol	nazwa	wzór
$\sigma_{overall}$	sigma całkowita (ang. sigma overall)	$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
σ_{within}	sigma wewnątrzpróbkowa (ang. sigma within)	$\hat{\sigma}_{\bar{R}/d_2} = \frac{\overline{R}}{d_2}$ $\hat{\sigma}_{\bar{s}/c_4} = \frac{\overline{s}}{c_4}$

Odchylenie standardowe przedstawia zmienność procesu, szacowanie przy pomocy:

$\sigma_{overall}$ przedstawia całkowitą zmienność analizowanych danych

σ_{within} przedstawia średnią zmienność wewnątrz analizowanych próbek (przybliżenie wykorzystywane przy badaniu stabilności procesu z użyciem kart kontrolnych)

$$\textit{Zmienność całkowita} = \textit{Zmienność wewnątrzpróbkowa} + \textit{Zmienność międzypróbkowa}$$

Zmienność ***całkowita*** odpowiada ***wewnątrzpróbkowej*** gdy ***międzypróbkowa*** jest mała.

x_i – wynik i–*tego* pomiaru, $i = 1, \ldots, n$, n – liczba wszystkich pomiarów

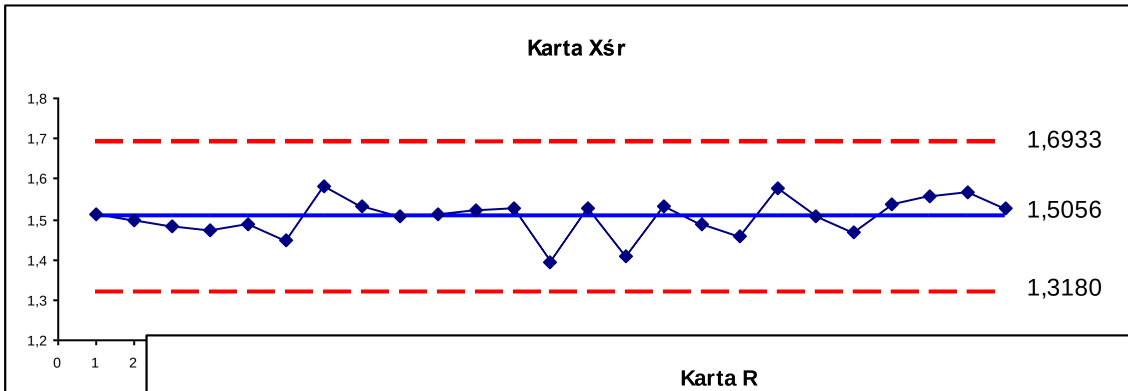
$\overline{R}$, $\overline{s}$ – wartość średnia z rozstępów i odchyleń standardowych w próbkach

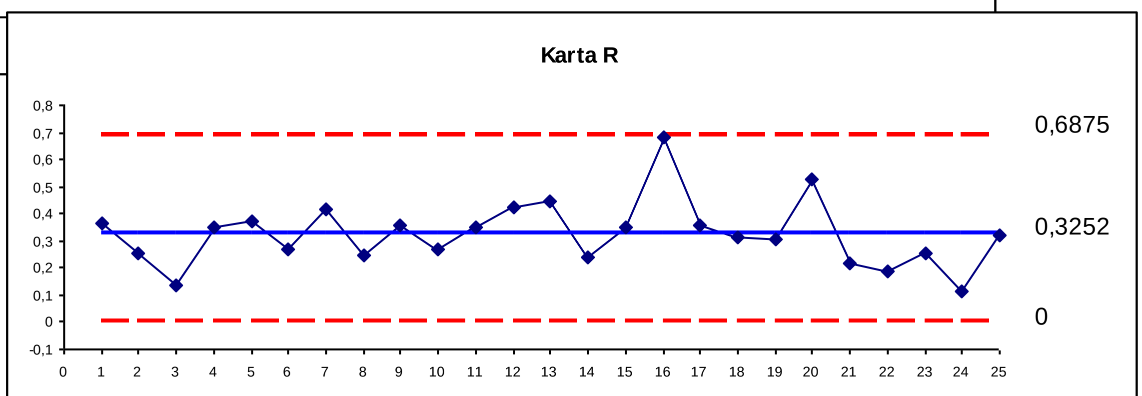
d_2, c_4 – współczynniki statystyczne zależne od rozmiaru próbki

Ocena zdolności procesu

Przykład 3.[*] W procesie fotolitografii co godzinę pobierano po 5 płytek do kontroli grubości warstwy fotorezystu. Wyniki 25 kolejnych kontroli zostały zebrane w tabeli. Biorąc pod uwagę specyfikację według której grubość warstwy fotorezystu powinna wynosić $1{,}5 \pm 0{,}5$ mikronów, należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów.

nr	1	2	3	4	5
1	1,32	1,41	1,67	1,46	1,69
2	1,43	1,36	1,61	1,47	1,61
3	1,43	1,49	1,49	1,43	1,57
4	1,5	1,64	1,38	1,28	1,55
5	1,56	1,27	1,53	1,44	1,64
6	1,6	1,55	1,36	1,33	1,42
7	1,63	1,51	1,84	1,42	1,51
8	1,42	1,43	1,66	1,61	1,55
9	1,39	1,73	1,54	1,52	1,37
10	1,4	1,67	1,51	1,46	1,52
11	1,42	1,77	1,43	1,59	1,42
12	1,58	1,34	1,58	1,39	1,76
13	1,29	1,41	1,44	1,64	1,19
14	1,5	1,4	1,59	1,65	1,5
15	1,36	1,29	1,6	1,25	1,55
16	1,57	1,53	1,52	1,28	1,77
17	1,37	1,73	1,4	1,5	1,44
18	1,42	1,39	1,31	1,62	1,56
19	1,58	1,42	1,65	1,51	1,72
20	1,71	1,44	1,24	1,38	1,76
21	1,44	1,51	1,35	1,57	1,49
22	1,47	1,59	1,66	1,5	1,47
23	1,59	1,43	1,56	1,53	1,69
24	1,64	1,52	1,57	1,56	1,55
25	1,58	1,37	1,62	1,37	1,69





[*]Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control*

Przykład 3. cd.

Kontrola stabilności procesu z pomocą karty $\overline{X} - R$ wykazała, że proces jest statystycznie ***stabilny***. Dodatkowo, z analizy karty $\overline{X}$ wynika, że proces jest ***zdolny***:

obliczona średnia procesu: $1{,}5056$ odpowiada, z akceptowalną dokładnością nominalnej $T = 1{,}5$,

grubość mierzonej warstwy mieści się w granicach: $[1{,}318, 1{,}6933]$,
a więc tym bardziej w granicach wynikających ze specyfikacji: $[1{,}0, 2{,}0]$.

Zdolność procesu można ocenić wyznaczając wskaźniki Z_U, Z_L, Z_{Bench} lub estymując prawdopodobieństwo wystąpienia produktów niezgodnych. W każdym z wymienionym przypadków należy najpierw oszacować odchylenie standardowe procesu:

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{2{,}0896/124} \approx 0{,}1298,$$

$$\hat{\sigma}_{within} = 0{,}3184/2{,}326 \approx 0{,}1369.$$

Zmienność całkowita jest w tym przypadku zbliżona do *zmienności wewnątrzpróbkowej* (*zmienność międzypróbkowa* jest niewielka).

Przykład 3. cd.

Wskaźniki Z_U , Z_L , Z_{Bench} oraz *wadliwość* w oparciu o *sigmę całkowitą* albo o *sigmę wewnątrzpróbkową*.

Dla *sigmy całkowitej* ($\hat{\sigma}_{overall} \approx 0{,}1298$) otrzymuje się odpowiednio:

$$Z_U = \frac{USL-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}5056}{0{,}1298} \approx 3{,}80485 \qquad Z_L = \frac{\hat{\mu}-LSL}{\hat{\sigma}} = \frac{1{,}5056-1}{0{,}1298} \approx 3{,}89853$$

$$p = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = \Phi(-3{,}89853) + \Phi(-3{,}80485) \approx 0{,}00011933354$$

$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1-p) = \Phi^{-1}(1-0{,}00011933354) \approx 3{,}67412$$

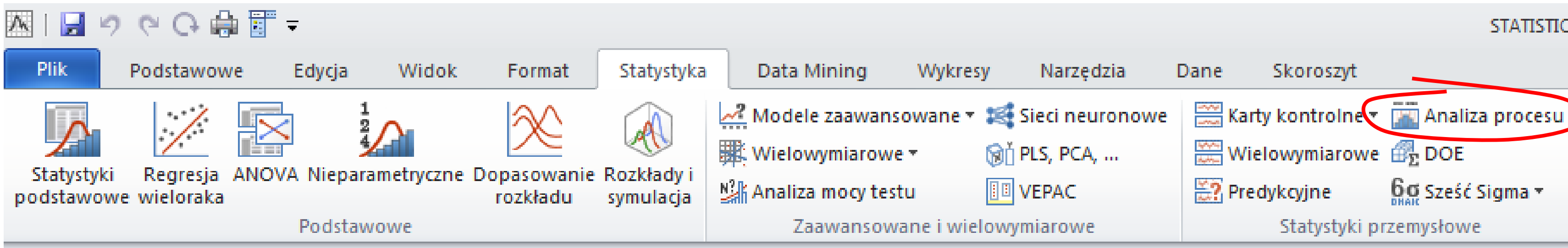
dla *sigmy wewnątrzpróbkowej* ($\hat{\sigma}_{within} \approx 0{,}1369$)

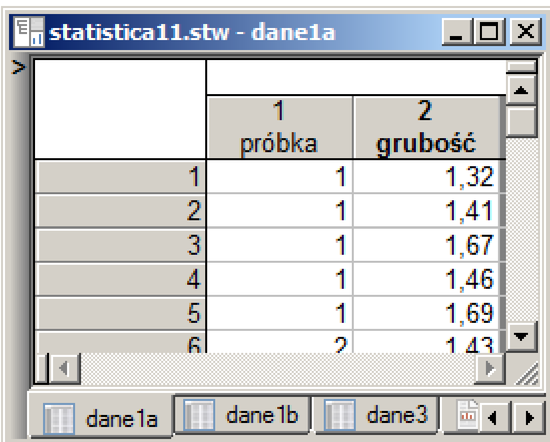
$$Z_U = \frac{USL-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}5056}{0{,}1369} \approx 3{,}60811 \qquad Z_L = \frac{\hat{\mu}-LSL}{\hat{\sigma}} = \frac{1{,}5056-1}{0{,}1369} \approx 3{,}69694$$

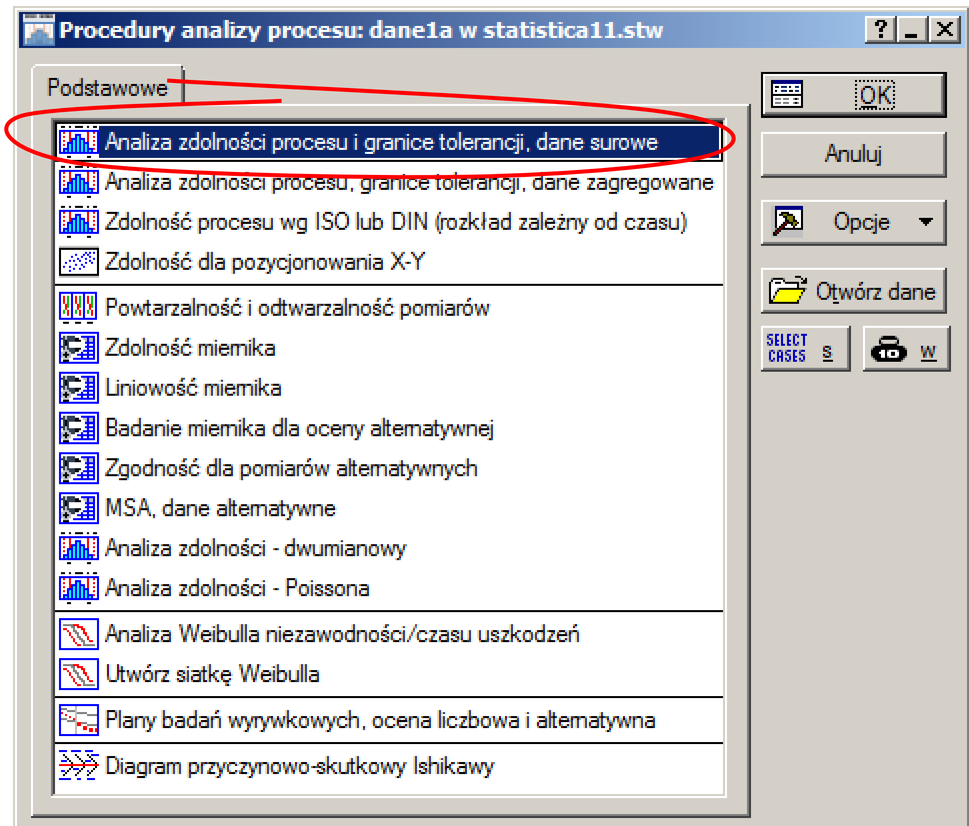
$$p = \Phi(-Z_L) + \Phi(-Z_U) = \Phi(-3{,}69694) + \Phi(-3{,}60811) \approx 0{,}00026332311$$

$$Z_{Bench} = \Phi^{-1}(1-p) = \Phi^{-1}(1-0{,}00026332311) \approx 3{,}46682$$

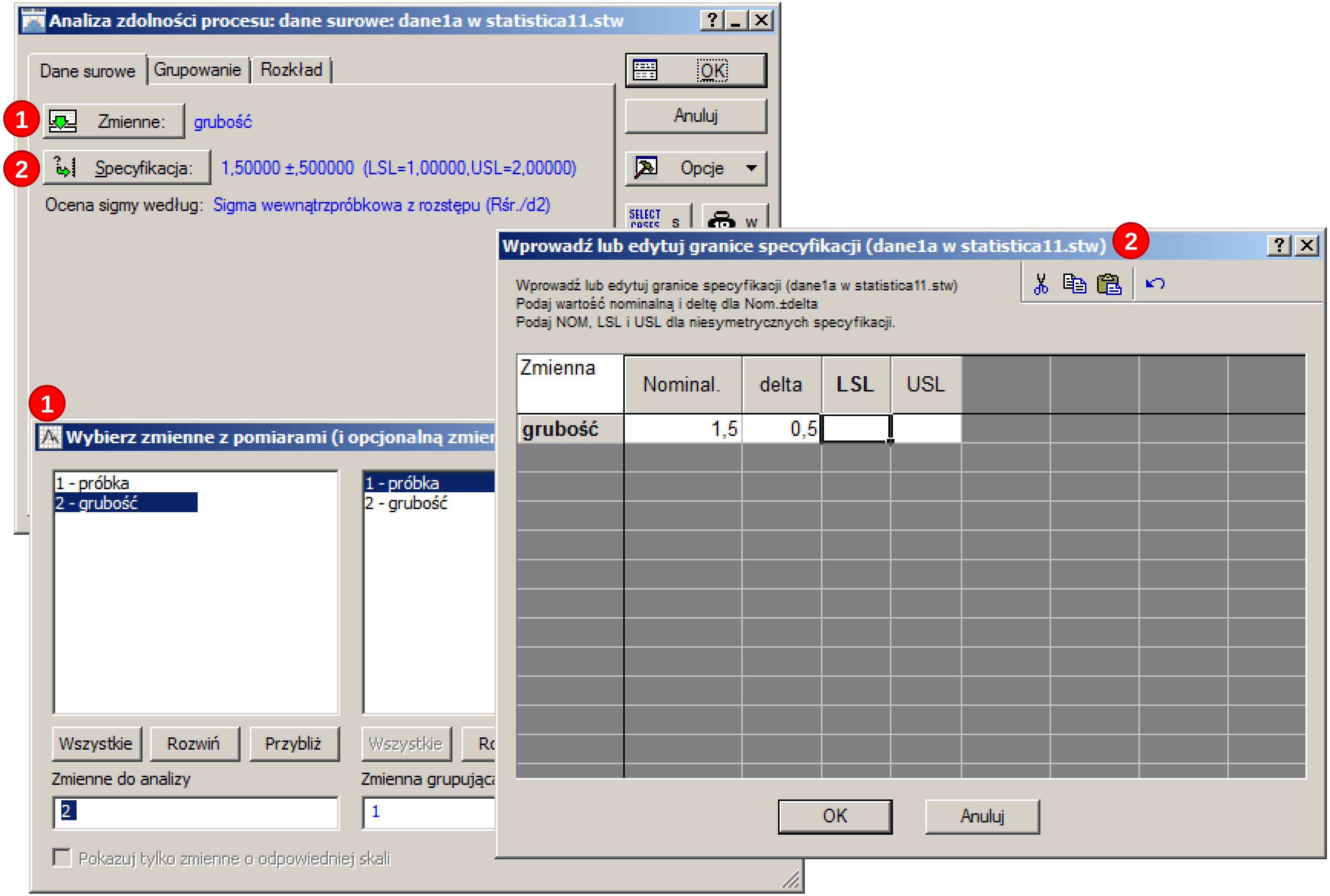
STATISTICA – Ocena zdolności procesu



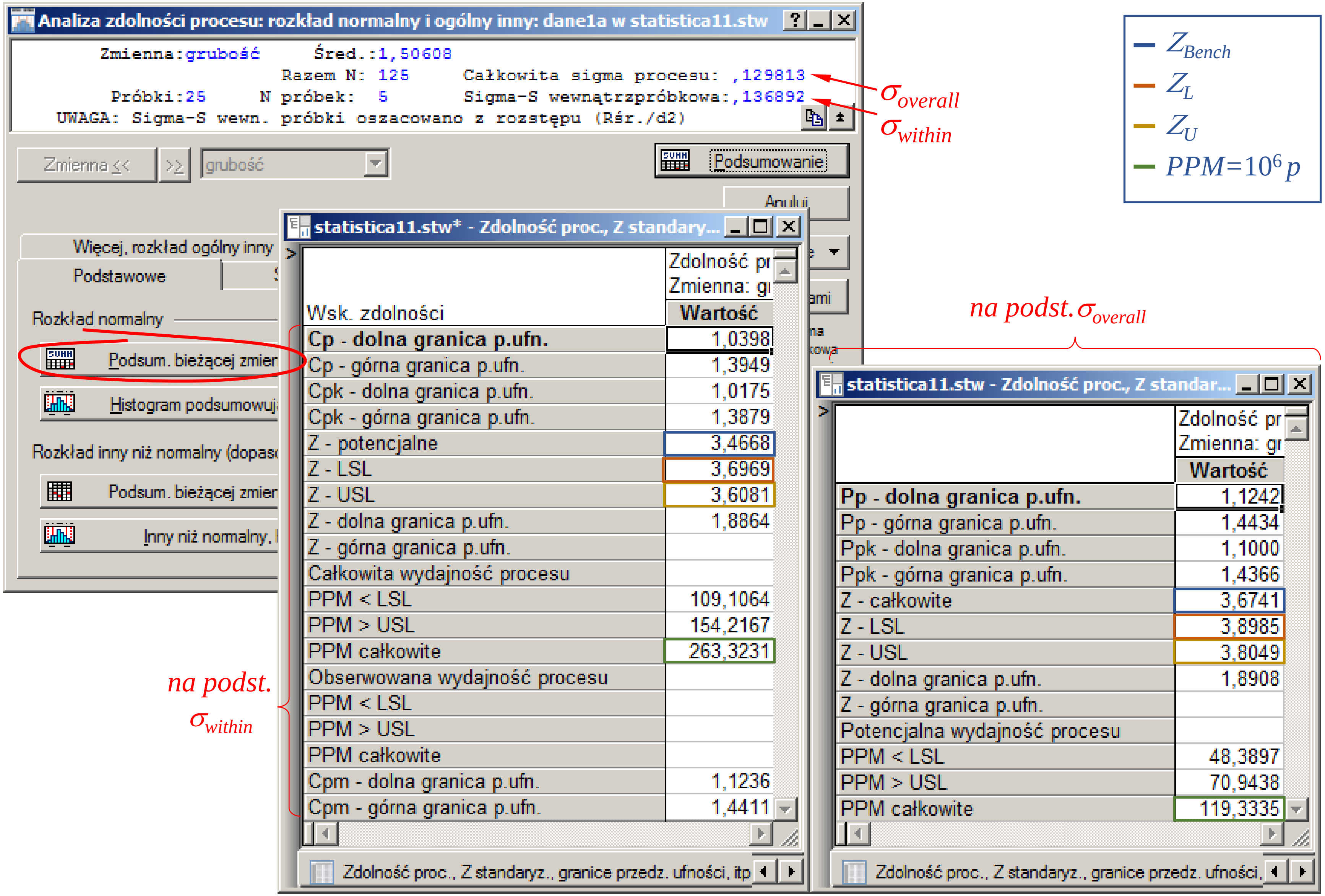




STATISTICA – Ocena zdolności procesu



STATISTICA – Ocena zdolności procesu



Analiza zdolności procesu: rozkład normalny i ogólny inny: dane1a w statistica11.stw

```
      Zmienna:grubość      Śred.:1,50608
                   Razem N: 125     Całkowita sigma procesu: ,129813
       Próbki:25     N próbek:  5     Sigma-S wewnątrzpróbkowa:,136892
  UWAGA: Sigma-S wewn. próbki oszacowano z rozstępu (Rśr./d2)
```

$\sigma_{overall}$

σ_{within}

Zmienna << | >> | grubość | Podsumowanie | Anuluj

Więcej, rozkład ogólny inny | Podstawowe

Rozkład normalny

Podsum. bieżącej zmien

Histogram podsumowuj

Rozkład inny niż normalny (dopas

Podsum. bieżącej zmien

Inny niż normalny, l

Z_{Bench}

Z_L

Z_U

$PPM = 10^6 p$

statistica11.stw* - Zdolność proc., Z standary...

Wsk. zdolności	Zdolność pr / Zmienna: gr / Wartość
Cp - dolna granica p.ufn.	1,0398
Cp - górna granica p.ufn.	1,3949
Cpk - dolna granica p.ufn.	1,0175
Cpk - górna granica p.ufn.	1,3879
Z - potencjalne	3,4668
Z - LSL	3,6969
Z - USL	3,6081
Z - dolna granica p.ufn.	1,8864
Z - górna granica p.ufn.	
Całkowita wydajność procesu	
PPM < LSL	109,1064
PPM > USL	154,2167
PPM całkowite	263,3231
Obserwowana wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	
PPM całkowite	
Cpm - dolna granica p.ufn.	1,1236
Cpm - górna granica p.ufn.	1,4411

Zdolność proc., Z standaryz., granice przedz. ufności, itp

na podst. σ_{within}

na podst. $\sigma_{overall}$

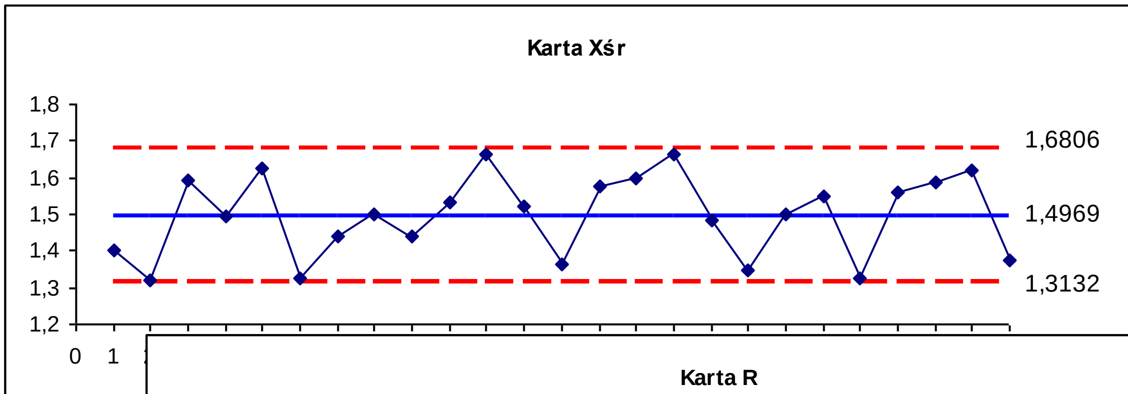
statistica11.stw - Zdolność proc., Z standar...

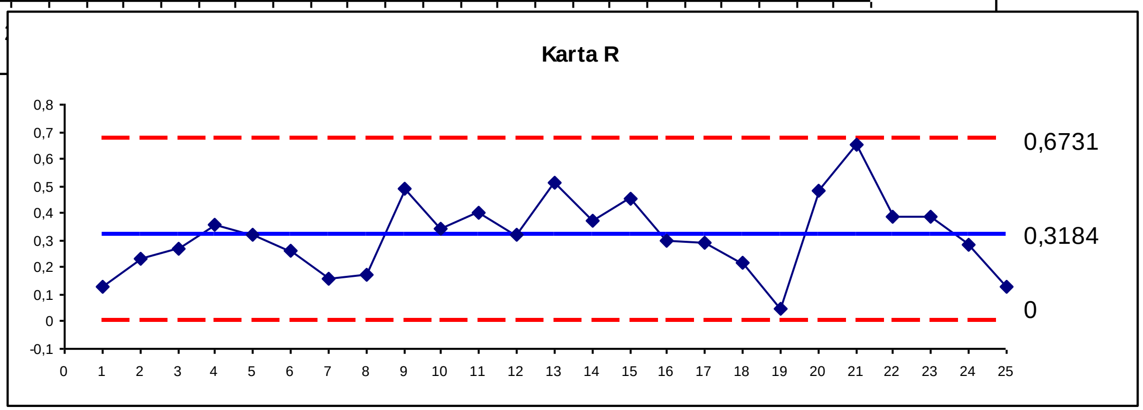
	Zdolność pr / Zmienna: gr / Wartość
Pp - dolna granica p.ufn.	1,1242
Pp - górna granica p.ufn.	1,4434
Ppk - dolna granica p.ufn.	1,1000
Ppk - górna granica p.ufn.	1,4366
Z - całkowite	3,6741
Z - LSL	3,8985
Z - USL	3,8049
Z - dolna granica p.ufn.	1,8908
Z - górna granica p.ufn.	
Potencjalna wydajność procesu	
PPM < LSL	48,3897
PPM > USL	70,9438
PPM całkowite	119,3335

Zdolność proc., Z standaryz., granice przedz. ufności,

Ocena zdolności procesu

Przykład 3. cd. Załóżmy, że w przykładzie 3. zebrane zostały dane zebrane w tabeli obok. Należy zbadać zdolność procesu do produkowania wyrobów spełniających wymagania klientów, przy założeniu, że specyfikacja techniczna jest taka sama jak poprzednio.





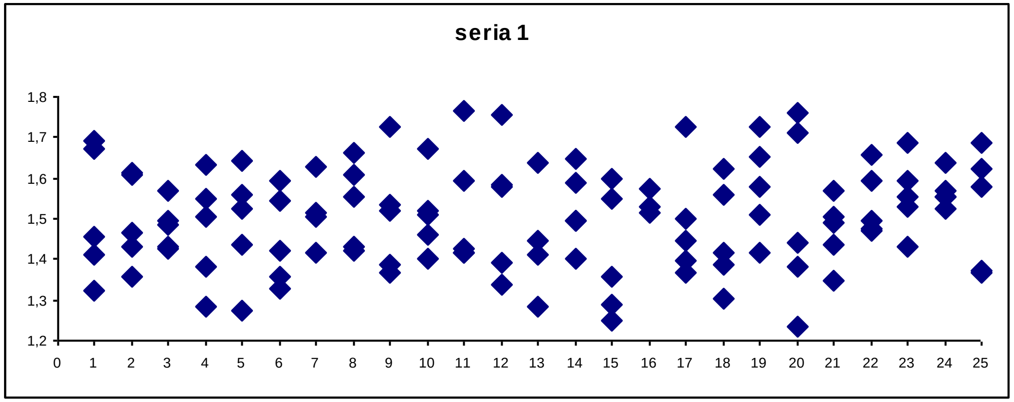
nr	1	2	3	4	5
1	1,35	1,42	1,37	1,4	1,48
2	1,22	1,33	1,33	1,45	1,26
3	1,6	1,59	1,77	1,5	1,51
4	1,44	1,75	1,39	1,51	1,39
5	1,69	1,82	1,57	1,56	1,5
6	1,24	1,21	1,47	1,4	1,32
7	1,49	1,47	1,51	1,38	1,35
8	1,59	1,52	1,53	1,42	1,43
9	1,18	1,51	1,67	1,39	1,45
10	1,39	1,61	1,73	1,44	1,49
11	1,55	1,87	1,81	1,47	1,63
12	1,4	1,72	1,46	1,51	1,53
13	1,04	1,33	1,55	1,52	1,39
14	1,48	1,69	1,4	1,54	1,77
15	1,38	1,8	1,35	1,69	1,78
16	1,7	1,76	1,79	1,49	1,59
17	1,57	1,39	1,66	1,37	1,42
18	1,46	1,25	1,46	1,33	1,24
19	1,48	1,49	1,49	1,5	1,53
20	1,36	1,51	1,84	1,49	1,54
21	1,7	1,3	1,05	1,08	1,5
22	1,44	1,5	1,76	1,73	1,37
23	1,43	1,79	1,4	1,78	1,55
24	1,62	1,75	1,61	1,47	1,65
25	1,43	1,44	1,37	1,31	1,32

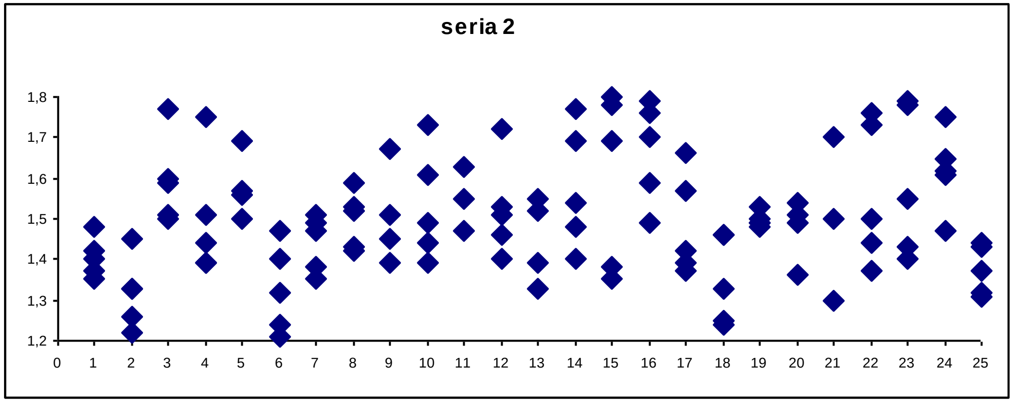
Kontrola stabilności procesu z pomocą karty $\overline{X} - R$ wykazała, tak jak poprzednio, że proces jest statystycznie ***stabilny***.

Przykład 3. cd. Odchylenie standardowe procesu wynosi teraz:

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{3{,}5451/124} \approx 0{,}1691, \qquad \hat{\sigma}_{within} = 0{,}3184/2{,}326 \approx 0{,}1369.$$

Zmienność wewnąrzpróbkowa jest taka sama jak wcześniej, *zmienność całkowita* jest większa. Rozbieżność pomiędzy szacowanymi wartościami odchylenia standardowego wynika z dużej *zmienności międzypróbkowej*.





dla *sigmy całkowitej*:

$$Z_U \approx 2{,}9756 \qquad Z_{Bench} \approx 2{,}7359$$

$$Z_L \approx 2{,}9387 \qquad PPM \approx 3110{,}4339$$

dla *sigmy wewnątrzpróbkowej*:

$$Z_U \approx 3{,}6753 \qquad Z_{Bench} \approx 3{,}4696$$

$$Z_L \approx 3{,}6297 \qquad PPM \approx 260{,}6327$$

W 2. serii danych występują znacznie większe skoki wartości pomiędzy próbkami niż w 1. Rozbieżność wartości odchylenia standardowego wpływa na większe rozbieżności pomiędzy obliczonymi wskaźnikami.

Wskaźnik C_p

C_p – ***wskaźnik zdolności (rozrzutu)***, wyznacza stosunek długości przedziału narzuconego przez specyfikację do naturalnej zmienności procesu równej 6σ (3σ poniżej i 3σ powyżej średniej):

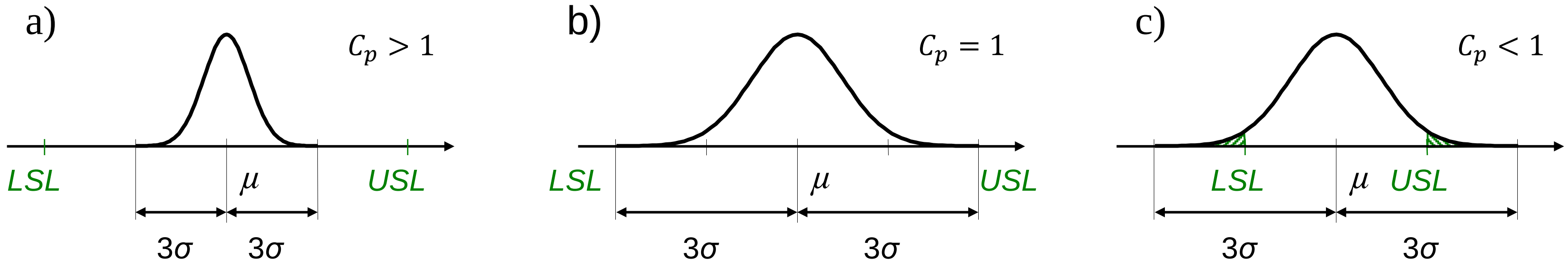
$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{Z_U + Z_L}{6}$$

W zależności od ustalonych granic specyfikacji i naturalnej zmienności procesu możliwe są trzy przypadki. Granice specyfikacji:

a) są szersze od przedziału naturalnej zmienności procesu $C_p > 1$,

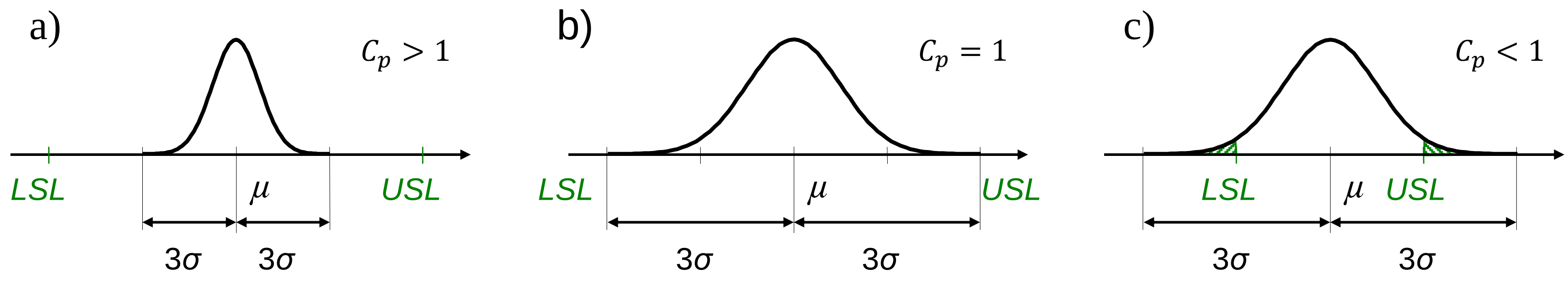
b) pokrywają się z przedziałem naturalnej zmienności procesu $C_p = 1$,

c) znajdują się wewnątrz przedziału wyznaczonego przez naturalną zmienność procesu $C_p < 1$.

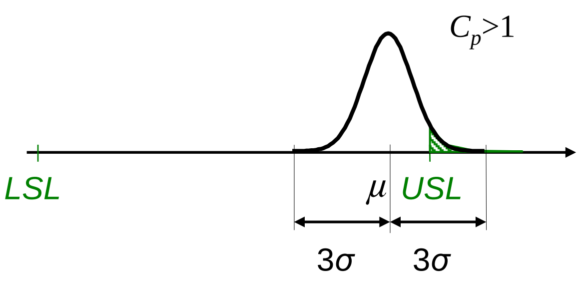


Uwagi wskaźnik C_p

1. Żeby zapewnić małą liczbę elementów niezgodnych wartość wskaźnika powinna być większa od 1, na ogół wymaga się aby była większa od 1,33.



2. W przypadku procesu *niewycentrowanego* nawet duża wartość wskaźnika C_p nie zapewnia małej liczby elementów niezgodnych.



Wskaźniki C_r, C_{pu}, C_{pl}

C_r – ***frakcja zdolności***, wyznacza stopień wykorzystania przedziału specyfikacji przez naturalną zmienność procesu:

$$C_r = \frac{1}{C_p}$$

Do wyznaczenia wartości wskaźnika C_p niezbędna jest dolna i górna granica specyfikacji, w przypadku procesów dla których tylko jedna z tych wartości jest określona stosowane są odpowiednio wskaźniki:

C_{pu} – ***górna zdolność procesu***, dla procesów z zadaną górną granicą specyfikacji:

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{1}{3} Z_U$$

C_{pl} – ***dolna zdolność procesu***, dla procesów z zadaną dolną granicą specyfikacji:

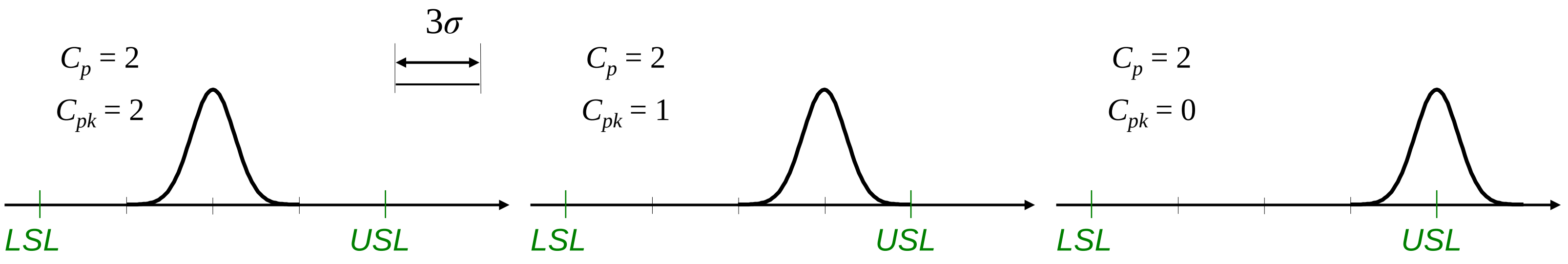
$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{1}{3} Z_L$$

C_{pk} – ***wskaźnik wycentrowania procesu***:

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \frac{1}{3}\min\{Z_U, Z_L\}$$

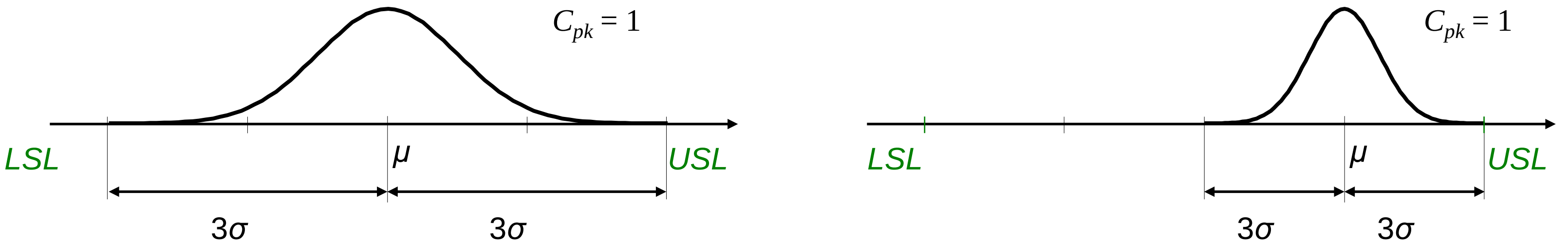
Własności C_{pk}

- proces jest wycentrowany gdy $C_{pk} = C_p$,
- proces nie jest wycentrowany gdy $C_{pk} < C_p$

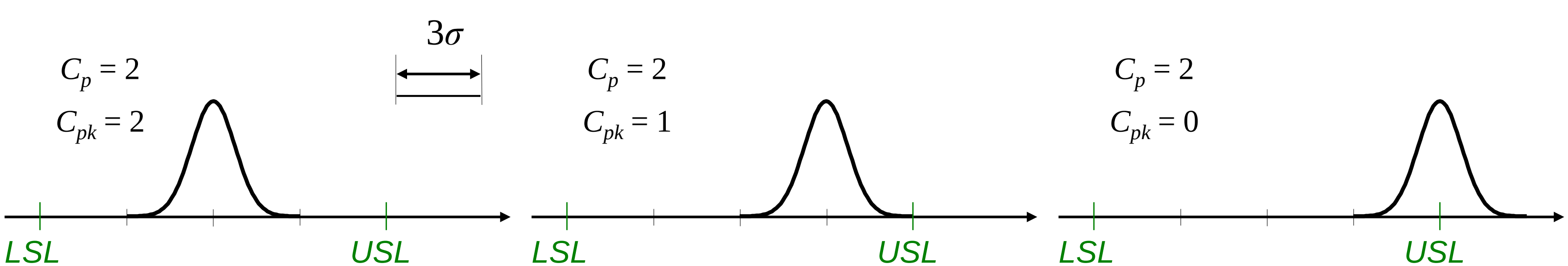


Własności C_{pk}

- wartość liczbowa wskaźnika C_{pk} nie określa położenia średniej wewnątrz przedziału specyfikacji

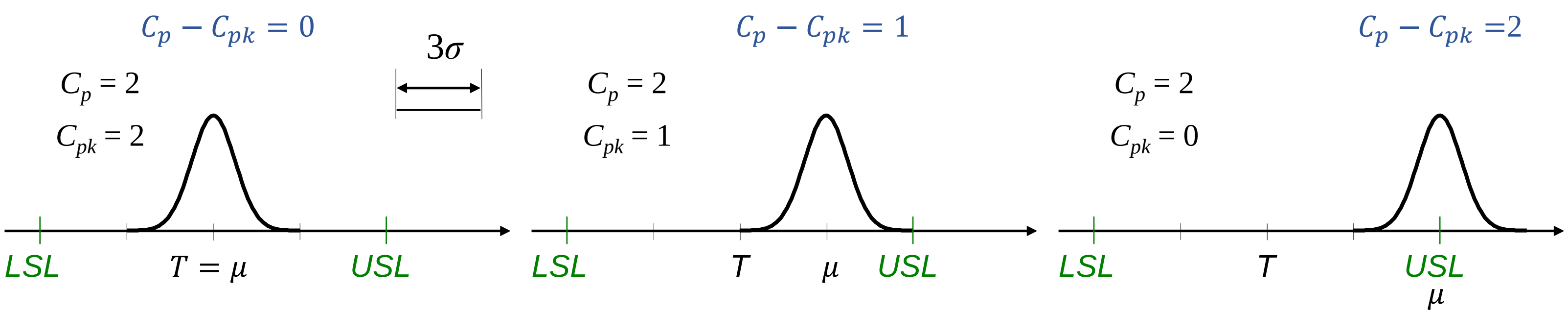


- stopień wycentrowania procesu można określić tylko poprzez porównanie wartości C_{pk} z wartością wskaźnika C_p



Własności C_{pk}

- odchylenie od wartości nominalnej $T = \frac{1}{2}(USL + LSL)$ jest tym większe im większa jest różnica $C_p - C_{pk}$



pokazuje się, że różnica ta wynosi:

$$C_p - C_{pk} = \frac{2|T-\mu|}{6\sigma}$$

Własności C_{pk}

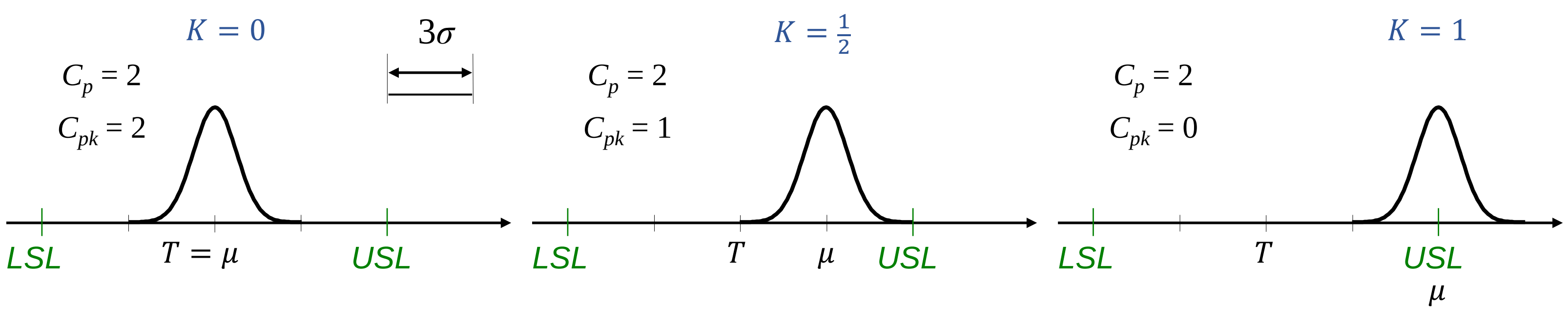
- definiując *współczynnik niewycentrowania* $K = \frac{|T-\mu|}{\frac{1}{2}(USL-LSL)}$

  związek pomiędzy wskaźnikiem C_{pk} i wskaźnikiem C_p można zapisać w postaci:

$$C_{pk} = C_p(1-K)$$

  różnica wartości obydwu wskaźników może być wyrażona w oparciu o wartość K:

$$C_p - C_{pk} = K C_p$$



Wskaźnik C_{pm}

C_{pm} – ***wskaźnik położenia procesu***, jest wyznaczany w oparciu o τ, które jest miarą średniego odchylenia procesu od wartości nominalnej:

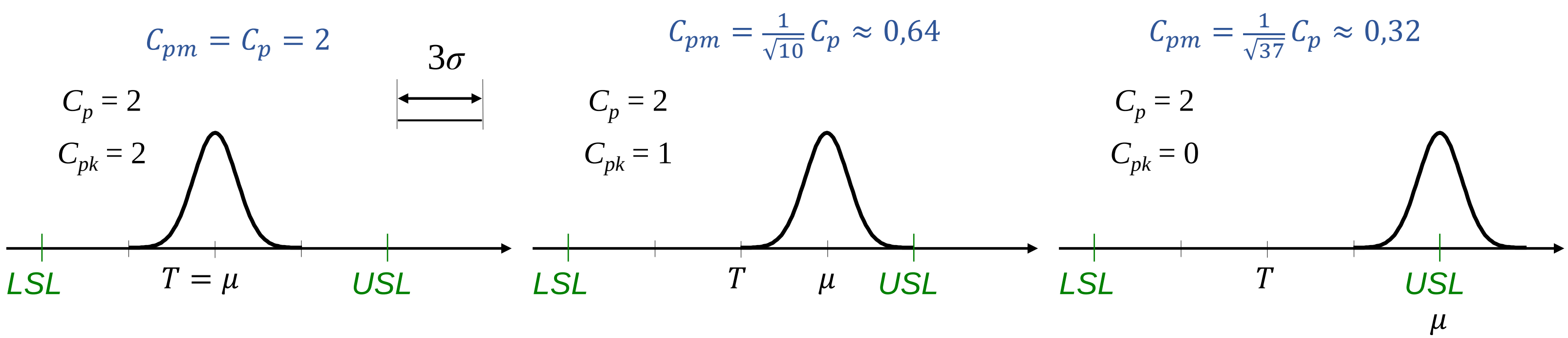
$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau}$$

pokazuje się, że $\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$, więc:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

po wprowadzeniu $\xi = \frac{\mu - T}{\sigma}$, wskaźnik można również zapisać w postaci:

$$C_{pm} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} C_p$$



Własności C_{pk} **i** C_{pm}

dla procesu wycentrowanego

$$C_{pk} = C_{pm} = C_p$$

dla procesu niewycentrowanego

$$C_{pk} < C_p \quad \text{oraz} \quad C_{pm} < C_p$$

jeśli $\mu < LSL$ lub $\mu > USL$

$$C_{pk} < 0 \qquad \text{a} \qquad C_{pm} \xrightarrow[|\mu - T| \to \infty]{} 0$$

dodatkowo pokazuje się, że dla C_{pm} spełniona jest nierówność

$$C_{pm} < \frac{USL - LSL}{6|\mu - T|}$$

można więc podać łatwy do interpretacji warunek konieczny zdolności procesu $(C_{pm} \geq 1)$:

$$|\mu - T| \leq \frac{1}{6}(USL - LSL)$$

Ocena zdolności procesu – nieznane σ

Jeśli σ procesu jest szacowana do oceny zdolności procesu wykorzystuje się:

- ***wskaźniki zdolności*** *wyznaczane na podstawie odchylenia wewnątrzpróbkowego,*
- ***wskaźniki wykonania*** *wyznaczane na podstawie odchylenia całkowitego.*

wskaźniki zdolności		***wskaźniki wykonania***	
$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{C}_r = \frac{1}{\hat{C}_p}$	$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}_{overall}}$	$\hat{P}_r = \frac{1}{\hat{P}_p}$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}_{within}}$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{overall}}$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}_{overall}}$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\}$ $\hat{C}_{pk} = (1-K)\hat{C}_p$	$K = \frac{\lvert T-\mu \rvert}{\frac{1}{2}(USL-LSL)}$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\}$ $\hat{P}_{pk} = (1-K)\hat{P}_p$	
$\hat{C}_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\hat{\sigma}^2_{within}+(\mu-T)^2}}$ $\hat{C}_{pm} = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{\xi}^2}}\hat{C}_p,$	$\hat{\xi} = \frac{\mu-T}{\sigma_{within}}$		

Przykład 3. cd. Wyznacz wskaźniki zdolności i wykonania dla pierwszej serii danych.

wskaźniki zdolności	**wskaźniki wykonania**
$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6\cdot 0{,}1298} \approx 1{,}2839$
$\hat{C}_r = 1/\hat{C}_p \approx 0{,}8213$	$\hat{P}_r = 1/\hat{P}_p \approx 0{,}7789$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}5061}{3\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2027$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}5061}{3\cdot 0{,}1298} \approx 1{,}2683$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1{,}5061-1}{3\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2324$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1{,}5061-1}{3\cdot 0{,}1298} \approx 1{,}2995$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\} \approx 1{,}2027$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\} \approx 1{,}2683$
$\hat{\xi} = \frac{\mu-T}{\hat{\sigma}} = \frac{1{,}5061-1{,}5}{0{,}1369} \approx 0{,}0444$ $\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1+\hat{\xi}^2}} = \frac{1{,}2175}{\sqrt{1+(0{,}0444)^2}} \approx 1{,}2163$	

Przykład 3. cd. Wyznacz wskaźniki zdolności i wykonania dla drugiej serii danych.

wskaźniki zdolności	wskaźniki wykonania
$\hat{C}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2175$	$\hat{P}_p = \frac{USL-LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{2-1}{6\cdot 0{,}1691} \approx 0{,}9857$
$\hat{C}_r = 1/\hat{C}_p \approx 0{,}8213$	$\hat{P}_r = 1/\hat{P}_p \approx 1{,}0145$
$\hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}4969}{3\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2251$	$\hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}} = \frac{2-1{,}4969}{3\cdot 0{,}1691} \approx 0{,}9919$
$\hat{C}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1{,}4969-1}{3\cdot 0{,}1369} \approx 1{,}2099$	$\hat{P}_{pl} = \frac{\mu-LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{1{,}4969-1}{3\cdot 0{,}1691} \approx 0{,}9796$
$\hat{C}_{pk} = \min\{\hat{C}_{pl}, \hat{C}_{pu}\} \approx 1{,}2099$	$\hat{P}_{pk} = \min\{\hat{P}_{pl}, \hat{P}_{pu}\} \approx 0{,}9796$
$\hat{\xi} = \frac{\mu-T}{\hat{\sigma}} = \frac{1{,}4969-1{,}5}{0{,}1369} \approx -0{,}0228$ $\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1+\hat{\xi}^2}} = \frac{1{,}2175}{\sqrt{1+(-0{,}0228)^2}} \approx 1{,}2172$	

Przykład 3. cd. Wnioski

pierwsza seria danych

proces można uznać za *zdolny*: wskaźniki zdolności są większe od 1

naturalna zmienność procesu wypełnia prawie w całości (około 82%, $\hat{C}_r \approx 0{,}8213$) założone przez specyfikację granice – wystąpienie nielosowej przyczyny specjalnej może szybko doprowadzić do przesunięcia procesu i w efekcie przyczynić się do powstania dużej liczby braków, na ogół wymaga się aby wartości wskaźników były większe od $1{,}33$

druga seria danych

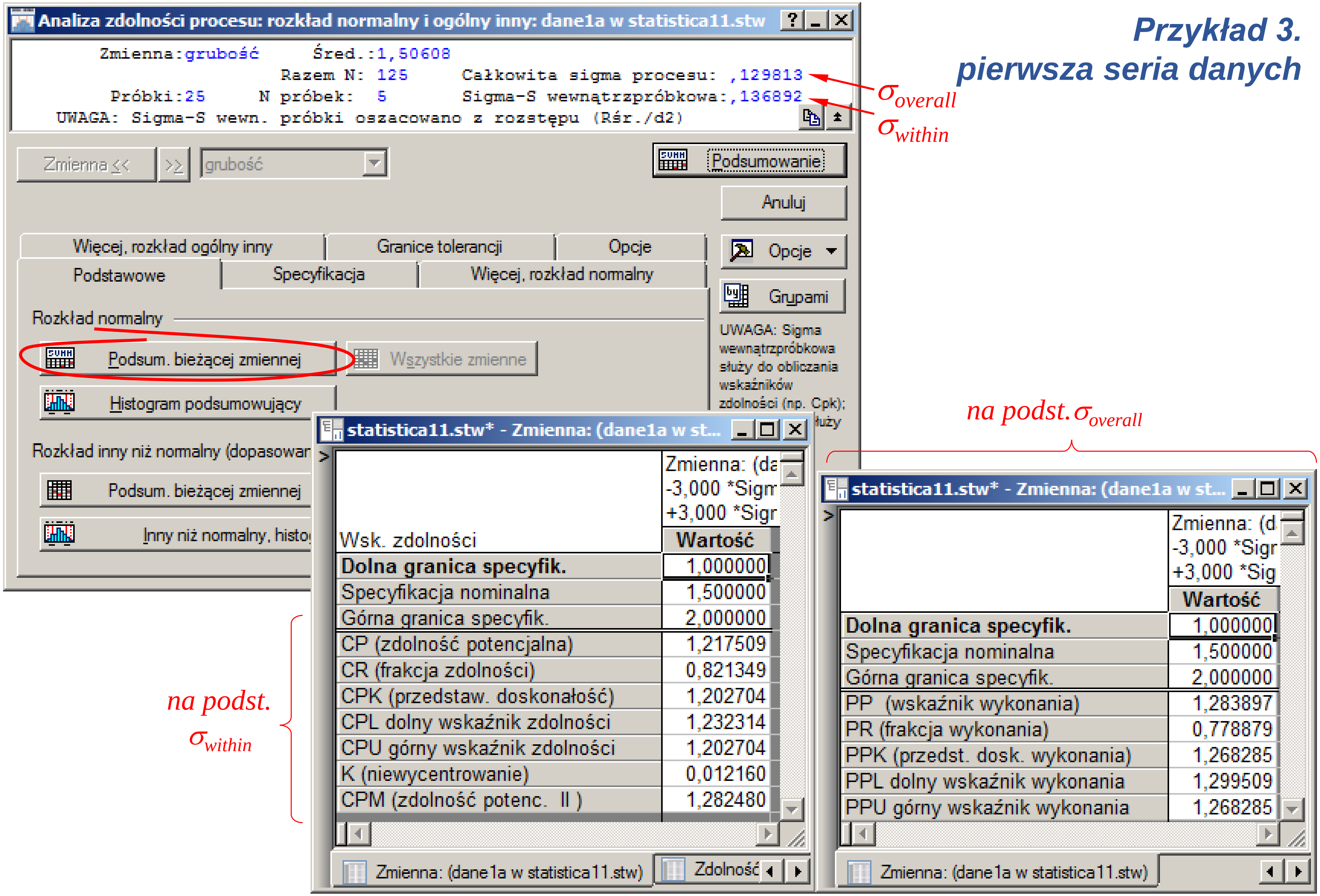
ze względu na większą różnicę pomiędzy *odchyleniem wewnątrzpróbkowym* a *całkowitym*, różnice pomiędzy *wskaźnikami zdolności* i *wykonania* są większe

wskaźniki zdolności są zbliżone do tych z pierwszej serii danych – proces może być więc uznany za *zdolny*

rozbieżność odpowiadających sobie *wskaźników zdolności* i *wykonania* wskazuje jednak, że proces charakteryzuje się dużą *zmiennością międzypróbkową*, która powoduje niestabilność średniej procesu, więc pomimo tego, że *wskaźniki zdolności* mają wartości wyższe od 1 proces wymaga korekty

STATISTICA – Ocena zdolności procesu

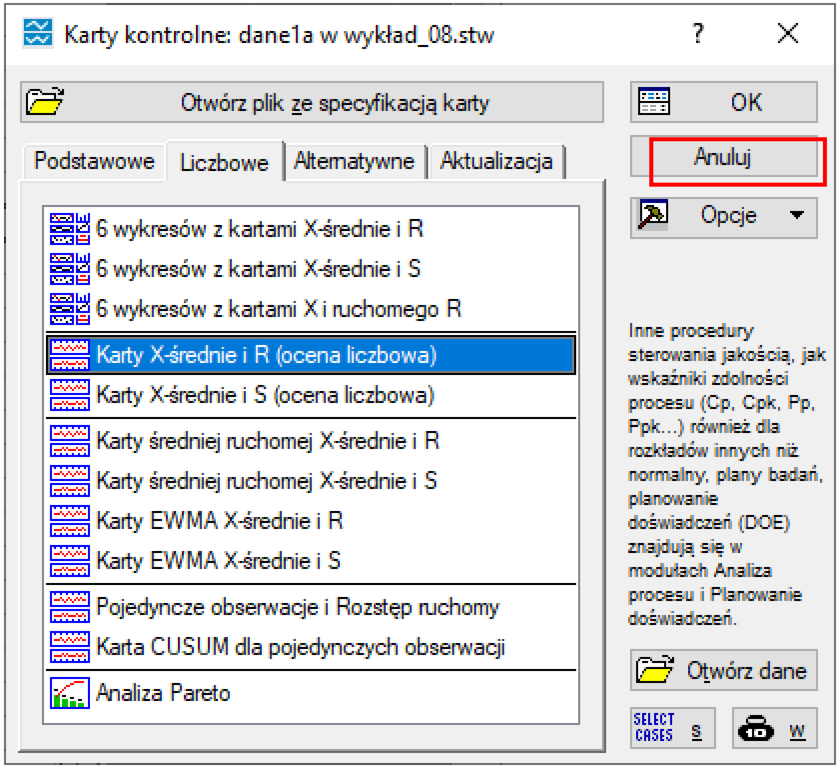
Przykład 3. pierwsza seria danych

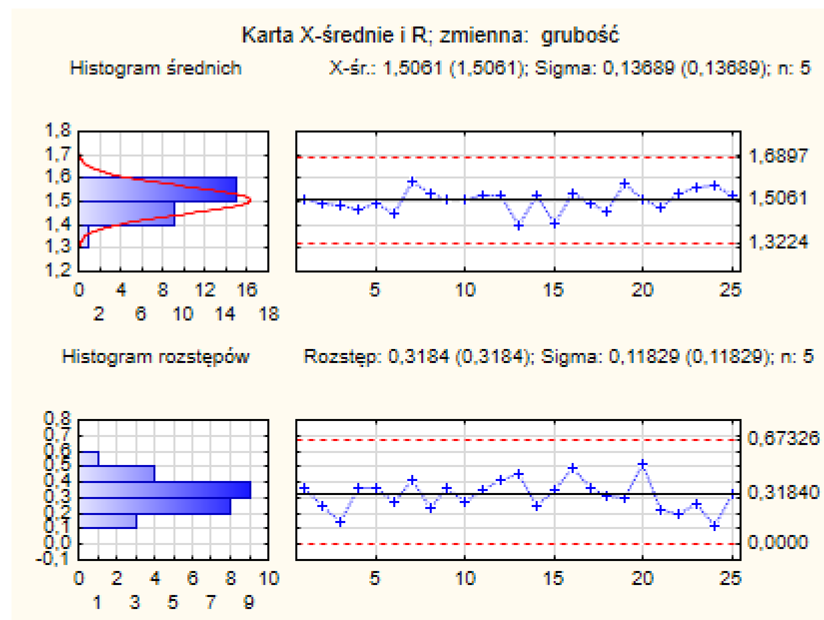


Wsk. zdolności	Wartość
Dolna granica specyfik.	1,000000
Specyfikacja nominalna	1,500000
Górna granica specyfik.	2,000000
CP (zdolność potencjalna)	1,217509
CR (frakcja zdolności)	0,821349
CPK (przedstaw. doskonałość)	1,202704
CPL dolny wskaźnik zdolności	1,232314
CPU górny wskaźnik zdolności	1,202704
K (niewycentrowanie)	0,012160
CPM (zdolność potenc. II)	1,282480

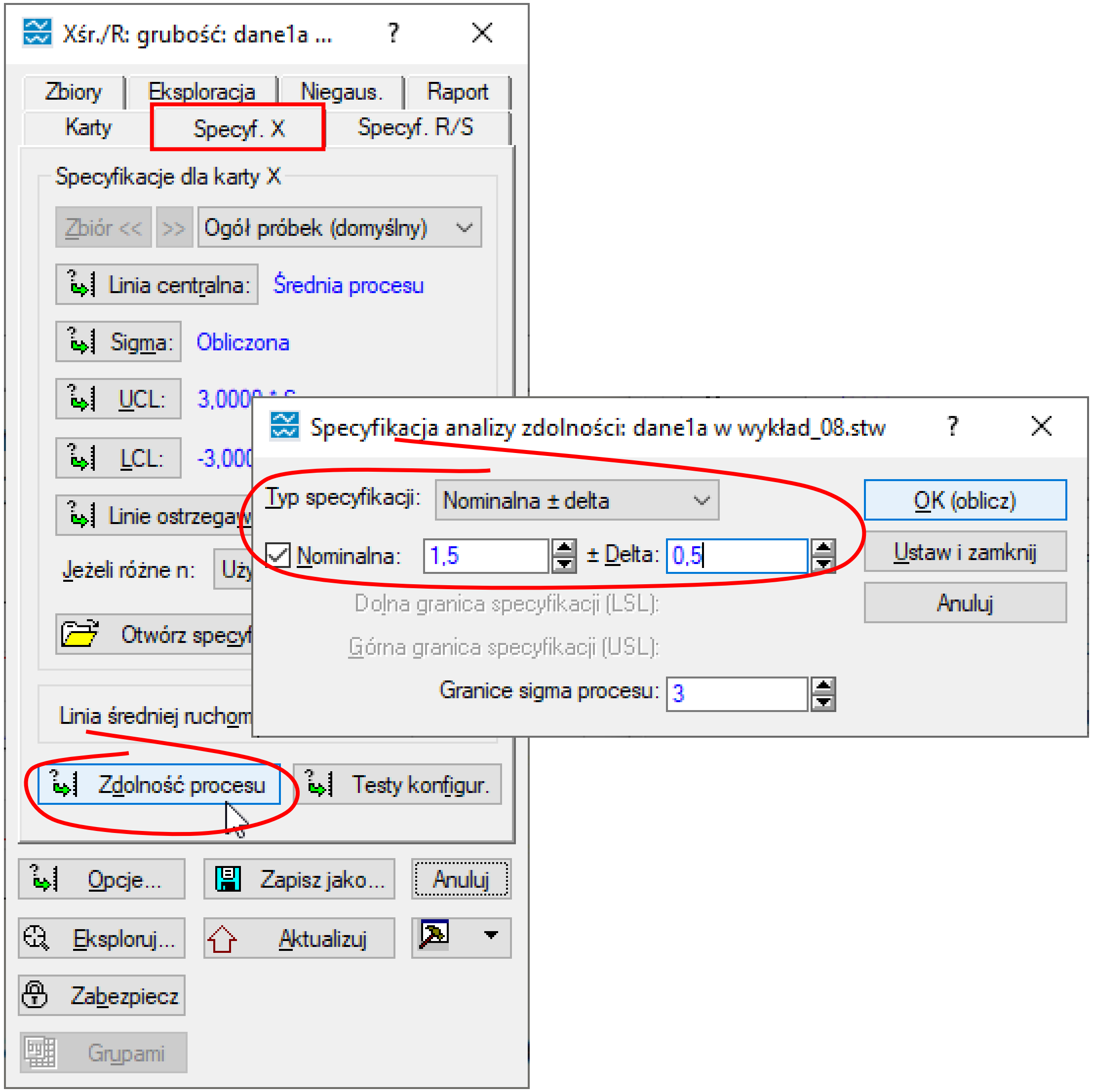
	Wartość
Dolna granica specyfik.	1,000000
Specyfikacja nominalna	1,500000
Górna granica specyfik.	2,000000
PP (wskaźnik wykonania)	1,283897
PR (frakcja wykonania)	0,778879
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,268285
PPL dolny wskaźnik wykonania	1,299509
PPU górny wskaźnik wykonania	1,268285

STATISTICA – Ocena zdolności procesu





STATISTICA – Ocena zdolności procesu



Dane: grubość; Ogół próbek (domyśl...

Wskaźnik zdolności Sigma wewn. próbki=Rśr./d2	grubość; Og -3,000 *Sigı 3,000 *Sign Wartość
Dolna granica specyfikacji	1,000000
Wartość nominalna	1,500000
Górna granica specyfikacji	2,000000
CP potencjalna zdolność	1,217509
CR frakcja zdolności	0,821349
CPK wskaźnik wydajności	1,202704
CPL dolny wskaźnik zdolności	1,232314
CPU górny wskaźnik zdolności	1,202704
K niewycentrowanie	0,012160

Dane: grubość; Ogół próbek (domyśl...

Wskaźnik wykonania	grubość; Ogó -3,000 *Sigm 3,000 *Sigma Wartość
Dolna granica specyfikacji	1,000000
Wartość nominalna	1,500000
Górna granica specyfikacji	2,000000
PP (wskaźnik wykonania)	1,283897
PR (frakcja wykonania)	0,778879
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,268285
PPL dolny wskaźnik wykonania	1,299509
PPU górny wskaźnik wykonania	1,268285

Przykład 4.[*] Parametry elementu według specyfikacji powinny wynosić: $25{,}8 \pm 0{,}6$. Wyniki kontroli z wykorzystaniem karty $\overline{X} - R$ wykazały, że proces produkcji jest stabilny. Wyznacz wskaźniki zdolności procesu przyjmując, że: $\bar{\bar{x}} = 25{,}6$, $\overline{R} = 0{,}2059$, $n = 4$.

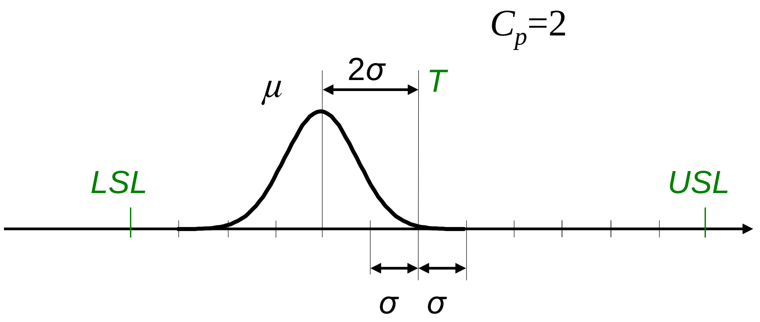
Zmienność procesu szacuje się jako: $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2(4)} = \frac{0{,}2059}{2{,}059} = 0{,}1$.

Wskaźniki zdolności:

$\hat{C}_p = 2 \quad \hat{C}_r = 0{,}5 \qquad \hat{C}_{pu} \approx 2{,}6667$

$\hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pl} \approx 1{,}3333 \, \hat{C}_{pm} \approx 0{,}8944$

$\hat{\xi} = \frac{25{,}6 - 25{,}8}{0{,}1} = -2$



Wnioski:

wskaźniki $\hat{C}_p, \hat{C}_{pk}$ osiągają zalecaną (wyższą od 1) wartość

proces nie jest wycentrowany $\hat{C}_p \neq \hat{C}_{pk}$

średnia procesu znajduje się w odległości 2σ od wartości nominalnej $\left(\hat{\xi} = -2\right)$, co daje małą wartość $\hat{C}_{pm}$ i powoduje, że elementy odległe o 1σ od nominalnej pojawiają się tylko z prawdopodobieństwem $0{,}16$ $(p = \Phi(3) - \Phi(1) \approx 0{,}16)$

[*]Montgomery D., *Introduction to Statistical Quality Control*

Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

W przypadku wyznaczania *zdolności* procesu wprowadzono również specjalne *wskaźniki zdolności dla rozkładów innych niż normalny*. We wskaźnikach tych zamiast parametrów rozkładu normalnego μ i σ wykorzystywane są kwantyle: $q_{0,5}$, $q_{0,00135}$ i $q_{0,99865}$.

W rozkładzie normalnym kwantyle $q_{0,5}$, $q_{0,00135}$ i $q_{0,99865}$ wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
q_{0,00135} &= \mu - 3\sigma \\
q_{0,5} &= \mu \\
q_{0,99865} &= \mu + 3\sigma
\end{aligned}
$$

Dowód

$$P(x < \mu - 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(-3) = 0{,}00135$$

$$P(x < \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 0{,}99865$$

$$P(x < \mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0}{\sigma}\right) = \Phi(0) = 0{,}5 \qquad \blacksquare$$

Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

Korzystając z zależności:

$$6\sigma = (\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma) = q_{0,99865} - q_{0,00135}$$

$$3\sigma = (\mu + 3\sigma) - \mu = q_{0,99865} - q_{0,5}$$

$$3\sigma = \mu - (\mu - 3\sigma) = q_{0,5} - q_{0,99865}$$

wskaźniki zdolności można zapisać w bardziej uniwersalnej postaci:

$$C_p(q) = \frac{USL - LSL}{q_{0,99865} - q_{0,00135}}$$

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}}$$

$$C_{pl}(q) = \frac{q_{0,5} - LSL}{q_{0,5} - q_{0,00135}}$$

$$C_{pm}(q) = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{q_{0,99865} - q_{0,00135}}{6}\right)^2 + \left(q_{0,5} - T\right)^2}}$$

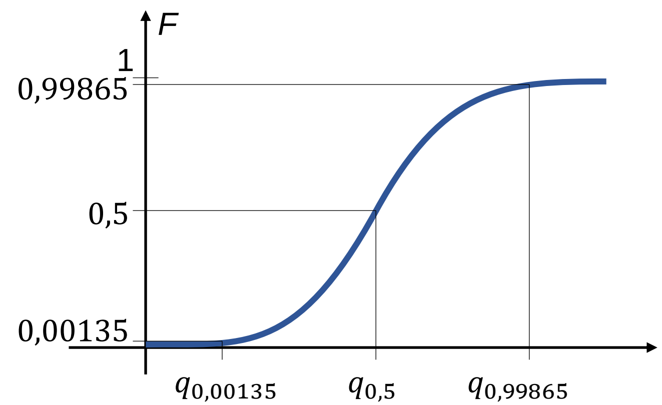
lub

$$C_{pm}(q) = \frac{C_p(q)}{\sqrt{1 + \xi(q)^2}} \qquad \xi(q) = 6\,\frac{q_{0,5} - T}{q_{0,99865} - q_{0,00135}}$$

Wskaźniki dla procesów o rozkładzie innym niż normalny

Uwagi

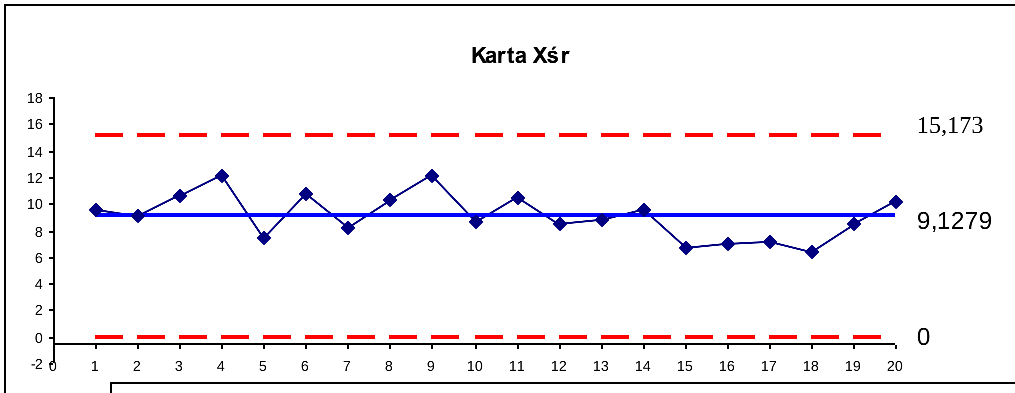
- dla rozkładu normalnego wskaźniki wyznaczone na podstawie kwantyli mają takie same wartości jak te wyznaczone na podstawie μ i σ
- kwantyle rozkładów innych niż normalny wyznacza się korzystając z odwrotności dystrybuanty
  - tego rozkładu jeśli rozkład jest znany
  - rozkładu najlepiej dopasowanego jeśli rozkład jest nieznany,
    mogą być wykorzystywane:
    - konkretne rozkłady (wykładniczy, gamma, logarytmiczno-normalny, ...),
    - ogólne rodzin rozkładów takich jak krzywe Johnsona czy Pearsona

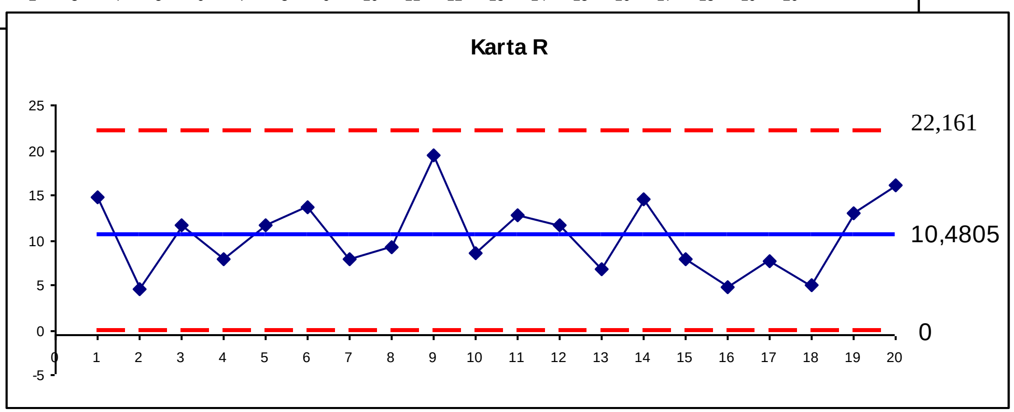


Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. Wylosowano 100 liczb z rozkładu *logarytmiczno normalnego* o parametrach $\mu = 2, \quad \sigma = 0{,}5.$ Dane zostały podzielone na 20 5– elementowych grup. Założono normalność rozkładu i zbadano stabilność procesu.

nr	1	2	3	4	5
1	7,33	6,11	6,15	20,87	7,26
2	7,32	8,55	10,49	7,22	11,7
3	8,59	11,2	14,92	3,35	14,95
4	13,12	8,01	15,97	9,35	14,22
5	13,64	10,44	2	4,38	6,91
6	9,34	5,64	10,58	8,65	19,36
7	5,51	8,37	5,63	8,47	13,29
8	9,17	14,22	5,89	15,21	6,91
9	7,49	$\boxed{25{,}42}$	7,87	5,89	14,15
10	5,96	9,89	14,01	7,92	5,46
11	15,54	10,9	4,21	16,97	4,68
12	4,31	15,99	10,09	4,47	7,65
13	10,98	6,78	11,28	10,47	4,51
14	7,63	18,63	8,63	9,18	4,08
15	3,74	3,72	4,63	11,56	10,15
16	6,8	4,97	5,94	8,02	9,73
17	5,98	4,97	12,69	6,13	6,47
18	4,21	7,86	7,11	8,93	3,86
19	2,3	15,28	5,68	10,12	9,43
20	12,17	2,08	14,05	4,66	18,22





Karta $\overline{X} - R$ pokazała, że proces jest statystycznie ***stabilny***.

Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. cd. Zakładając, że zadana została górna granica specyfikacji $USL = 25^*$, wyznaczono wartości współczynników $\hat{C}_{pu}$ i $\hat{P}_{pu}$:

$$\hat{\sigma}_{within} = \frac{\overline{R}}{d_2(5)} = \frac{10,4805}{2,326} \approx 4,5059 \qquad \hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{within}} = \frac{25-9,1279}{3 \cdot 4,5059} \approx 1,1742$$

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \approx 4,4795 \qquad \hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{overall}} = \frac{25-9,1279}{3 \cdot 4,4795} \approx 1,1811$$

Proces można uznać za ***zdolny*** – wartości *wskaźników zdolności* i *wykonania* są > 1. W celu sprawdzenia poprawności analizy porównano *wadliwość obserwowaną* z *szacowaną* dla rozkładu normalnego o $\sigma = \hat{\sigma}_{within}$ i $\sigma = \hat{\sigma}_{overall}$:

$p = 0,01$ *(1 sztuka* ze 100 nie spełnia wymogów specyfikacji)*

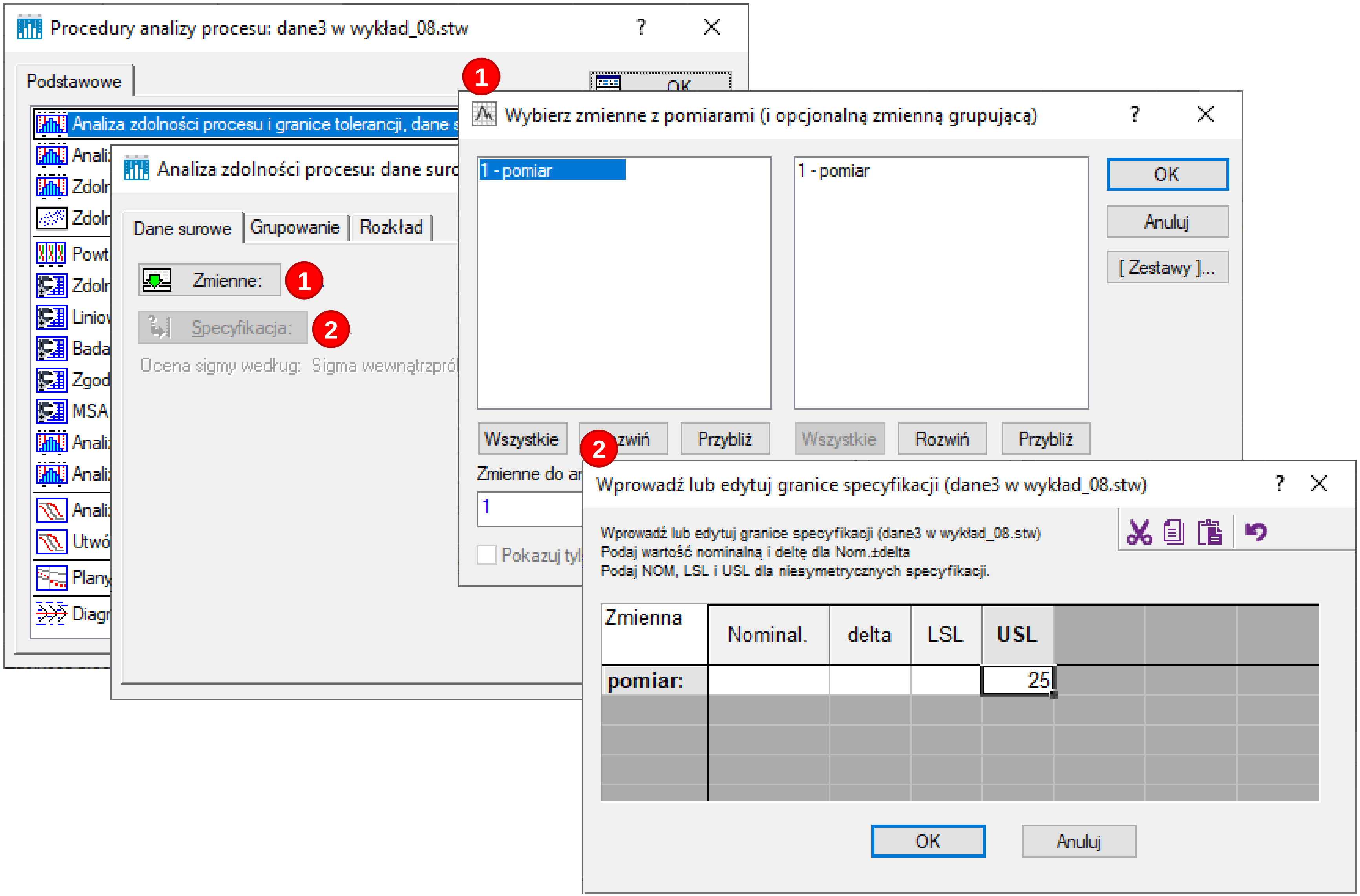
$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma_{within})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25-9,1279}{4,5059}\right) \approx 0,00021376$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma_{overall})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{25-9,1279}{4,4795}\right) \approx 0,00019761$$

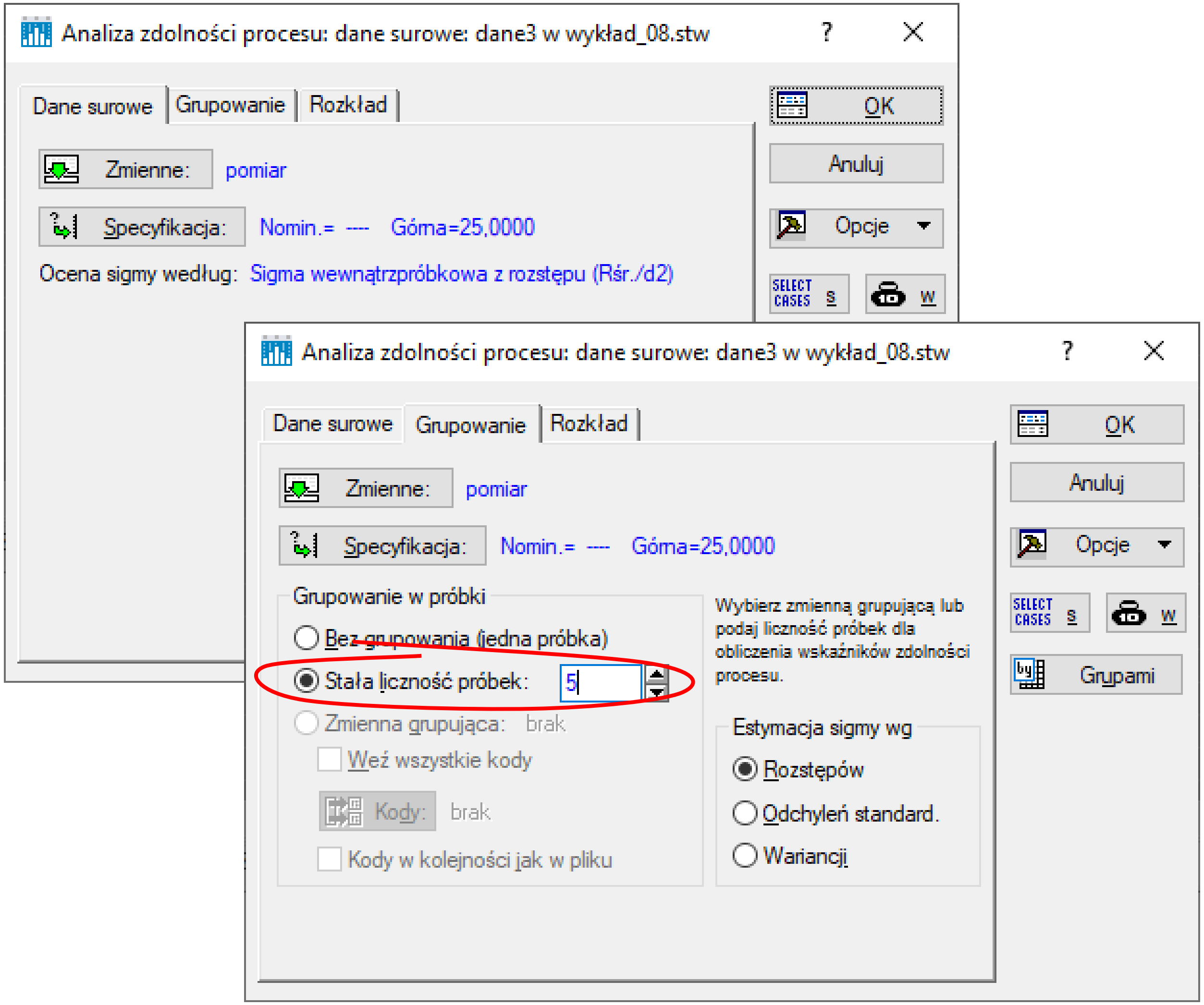
Rozbieżność pomiędzy obserwowaną a szacowaną wadliwością jest duża.

* *w tabeli zaznaczona na czerwono*

STATISTICA – Ocena zdolności procesu



STATISTICA – Ocena zdolności procesu



STATISTICA – Ocena zdolności procesu

Analiza zdolności procesu: rozkład no

```
        Zmienna:pomiar        Śred
                       Razem I
         Próbki:20     N próbek
    UWAGA: Sigma-S wewn. próbki
```

Zmienna << | >> | pomiar

Więcej, rozkład ogólny inny

Podstawowe | Specyfikac

Rozkład normalny

Podsum. bieżącej zmiennej

Histogram podsumowujący

Dane: Zdolność proc., Z standaryz., gr...

Wsk. zdolności	Zdolność pr Zmienna: po Wartość
Cp - dolna granica p.ufn.	
Cp - górna granica p.ufn.	
Cpk - dolna granica p.ufn.	0,97
Cpk - górna granica p.ufn.	1,38
Z - potencjalne	3,52
Z - LSL	
Z - USL	3,52
Z - dolna granica p.ufn.	1,79
Z - górna granica p.ufn.	
Całkowita wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	213,76
PPM całkowite	213,76
Obserwowana wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	10000,00
PPM całkowite	10000,00
Cpm - dolna granica p.ufn.	
Cpm - górna granica p.ufn.	

Dane: Zdolność proc., Z standaryz., gran...

	Zdolność pr Zmienna: po Wartość
Pp - dolna granica p.ufn.	
Pp - górna granica p.ufn.	
Ppk - dolna granica p.ufn.	1,0041
Ppk - górna granica p.ufn.	1,3581
Z - całkowite	3,5433
Z - LSL	
Z - USL	3,5433
Z - dolna granica p.ufn.	1,7913
Z - górna granica p.ufn.	
Potencjalna wydajność procesu	
PPM < LSL	
PPM > USL	197,6110
PPM całkowite	197,6110

Dane: Zmienna: (dane3 w wykład_08.s

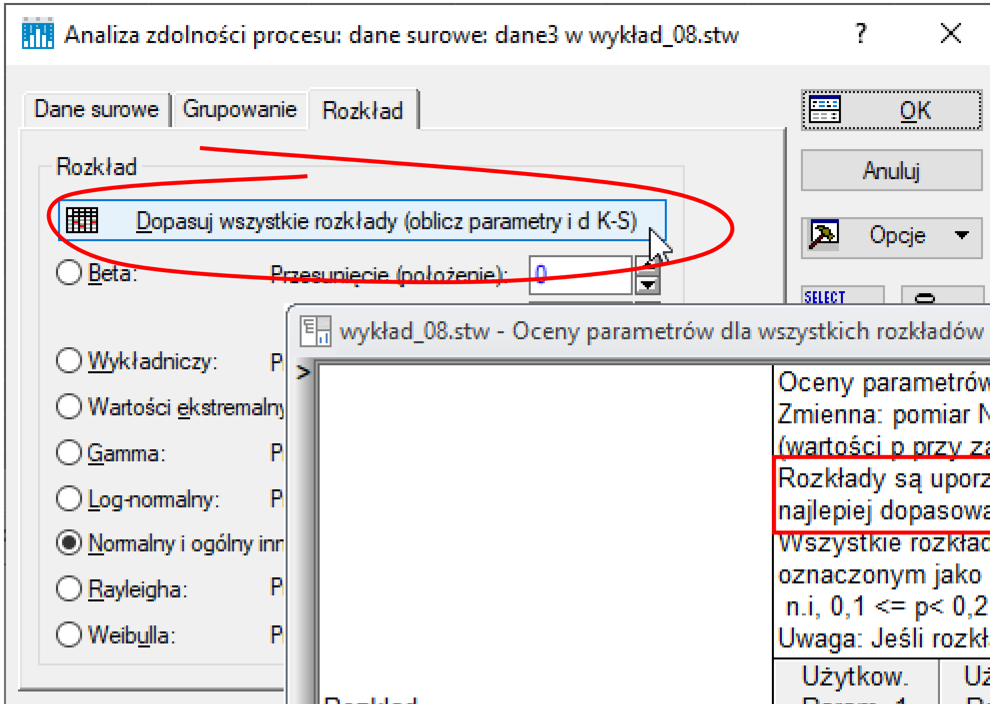
Wsk. zdolności	
Dolna granica specyfik.	
Specyfikacja nominalna	
Górna granica specyfik.	
CP (zdolność potencjalna)	
CR (frakcja zdolności)	
CPK (przedstaw. doskonałość)	1,17416
CPL dolny wskaźnik zdolności	
CPU górny wskaźnik zdolności	1,17416
K (niewycentrowanie)	
CPM (zdolność potenc. II)	

Dane: Zmienna: (dane3 w wykład_08.stw...

	Zmienna: (c +3,000 *Sig Wartość
Dolna granica specyfik.	
Specyfikacja nominalna	
Górna granica specyfik.	25,00000
PP (wskaźnik wykonania)	
PR (frakcja wykonania)	
PPK (przedst. dosk. wykonania)	1,18109
PPL dolny wskaźnik wykonania	
PPU górny wskaźnik wykonania	1,18109

*Zakładając, że rozkład cechy jest normalny, proces może być uznany za **zdolny** ale założeniu o normalności przeczy **rozbieżność** między wydajnością obserwowaną a szacowaną*

STATISTICA – Ocena zdolności procesu



znacznie lepsze dopasowanie otrzymano dla:
- *rozkładu logarytmiczno-normalnego*
- *odpowiednio dopasowanych krzywych Johnsona*

wykład_08.stw - Oceny parametrów dla wszystkich rozkładów (dane3 w wykład_08.stw)

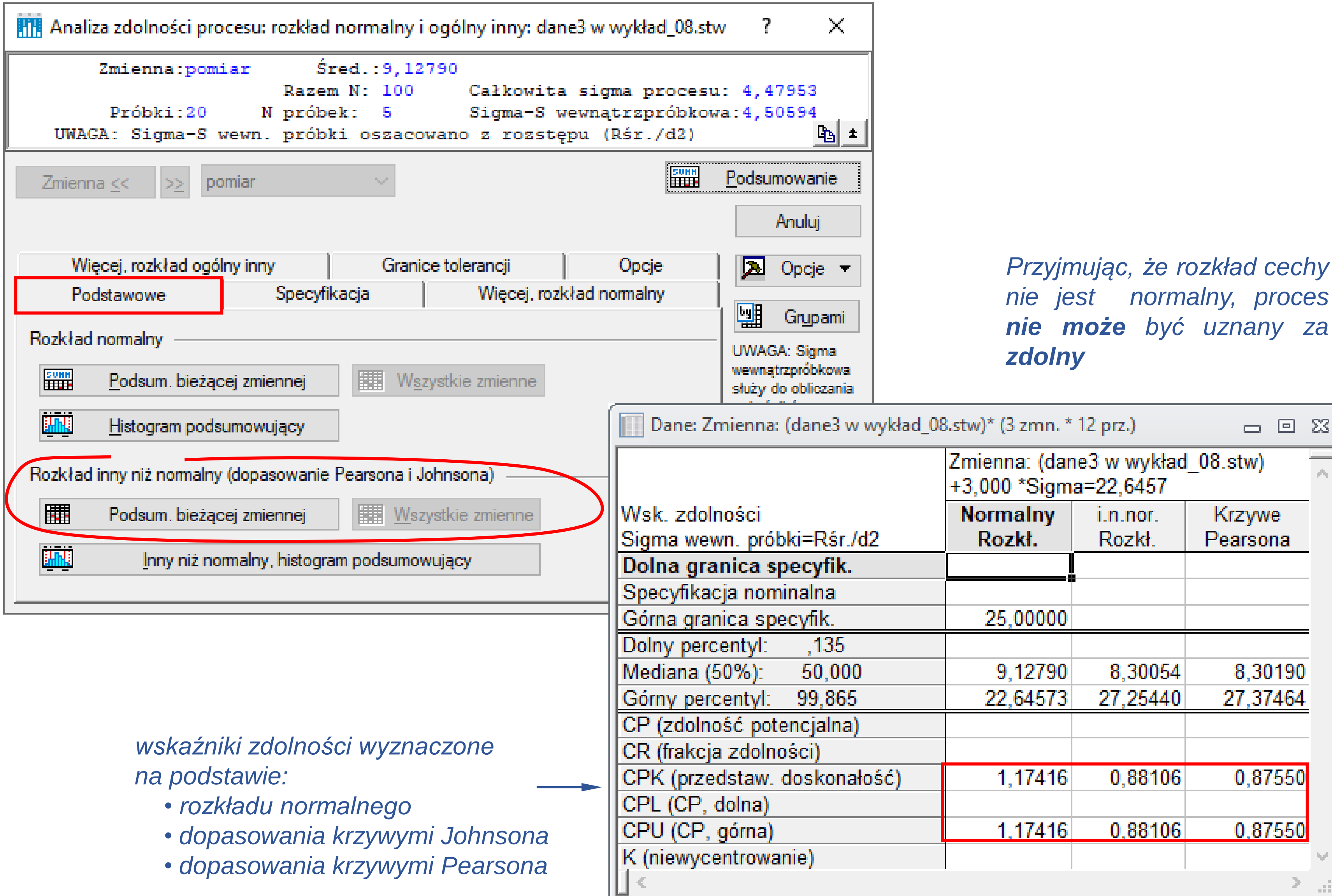
Oceny parametrów dla wszystkich rozkładów (dane3 w wykład_08.stw)
Zmienna: pomiar N = 100
(wartości p przy założeniu znajomości parametrów a priori)
Rozkłady są uporządkowane wg dobroci dopasowania do danych (u góry są najlepiej dopasowane).
Wszystkie rozkłady z poziomem p testu Kołmogorowa-Smirnowa oznaczonym jako (w kolejności od najlepszej do najgorszej)
n.i, 0,1 <= p< 0,2 lub 0,5<=p<0,1 są dobrymi modelami danych.
Uwaga: Jeśli rozkład normalny pasuje do danych, to należy go użyć.

Rozkład	Użytkow. Param. 1	Użytkow. Param. 2	**Param. 1**	Param. 2	d K-S	K-S p
Inny niż normalny (skośność, kurtoza)			0,96298	0,986958	0,039228	n.i.
Log-normalny (próg, skala, kształt)	0,00		2,09084	0,507140	0,040462	n.i.
Gamma(próg, skala, kształt)	0,00		2,11817	4,309330	0,047150	n.i.
Wartości ekstrem.(położenie, skala)			7,10492	3,432991	0,054763	n.i.
Weibulla (próg, skala, kształt)	0,00		10,34115	2,180504	0,067895	n.i.
Rayleigha (próg, skala)	0,00		7,18276		0,085509	n.i.
Normalny (położenie, skala)			9,12790	4,479527	0,102481	n.i.
Wykładniczy (próg, skala)	0,00		9,12790		0,294716	p<,01
Beta (próg, sigma, kształt, kształt)	0,00	1,000000				--

Oceny parametrów dla wszystkich rozkładów (dane3 w wykład_08....

rozkład dopasowany krzywymi Johnsona

STATISTICA – Ocena zdolności procesu



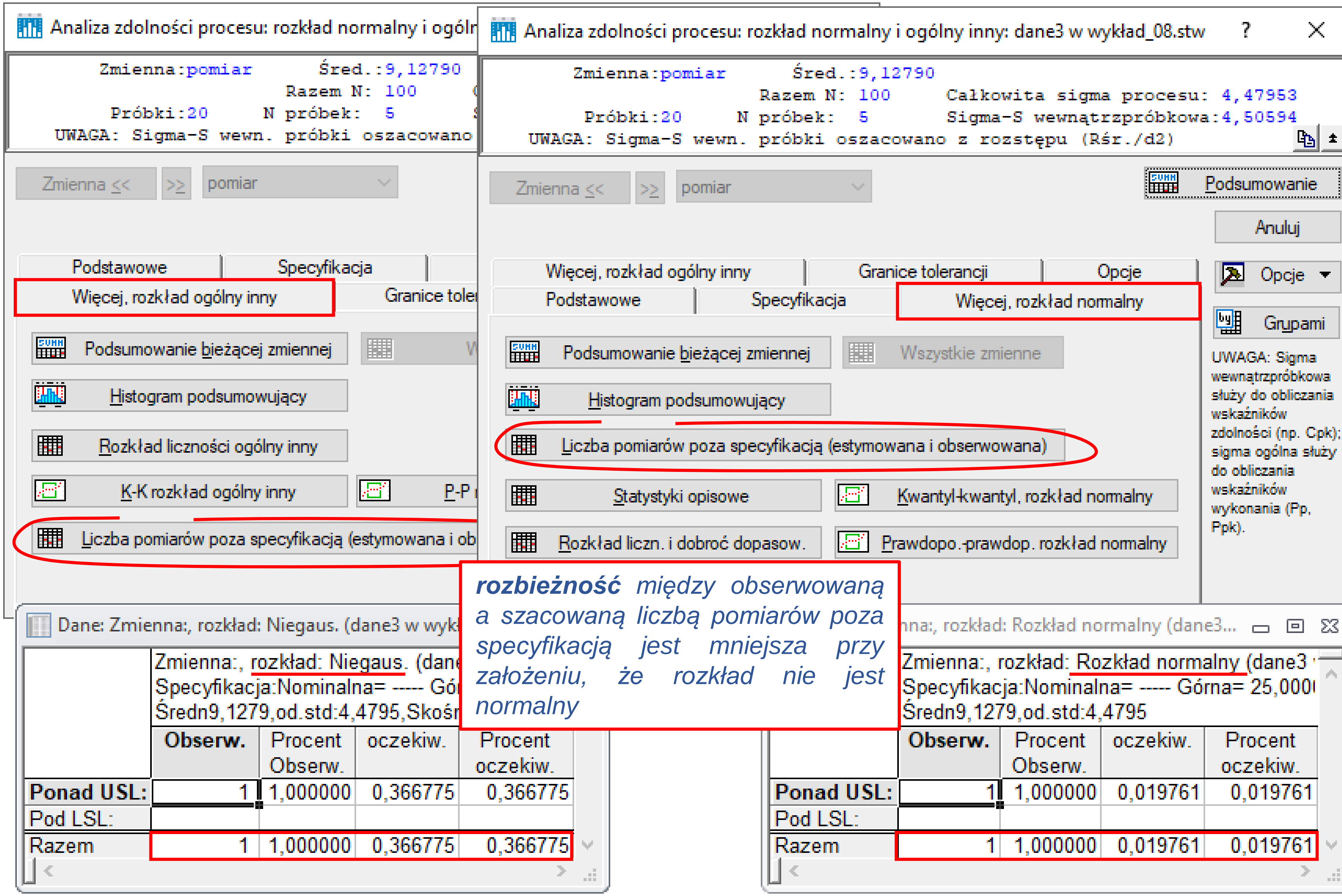
Wsk. zdolności Sigma wewn. próbki=Rśr./d2	Zmienna: (dane3 w wykład_08.stw) +3,000 *Sigma=22,6457 Normalny Rozkł.	i.n.nor. Rozkł.	Krzywe Pearsona
Dolna granica specyfik.			
Specyfikacja nominalna			
Górna granica specyfik.	25,00000		
Dolny percentyl: ,135			
Mediana (50%): 50,000	9,12790	8,30054	8,30190
Górny percentyl: 99,865	22,64573	27,25440	27,37464
CP (zdolność potencjalna)			
CR (frakcja zdolności)			
CPK (przedstaw. doskonałość)	1,17416	0,88106	0,87550
CPL (CP, dolna)			
CPU (CP, górna)	1,17416	0,88106	0,87550
K (niewycentrowanie)			

*Przyjmując, że rozkład cechy nie jest normalny, proces **nie może** być uznany za **zdolny***

wskaźniki zdolności wyznaczone na podstawie:

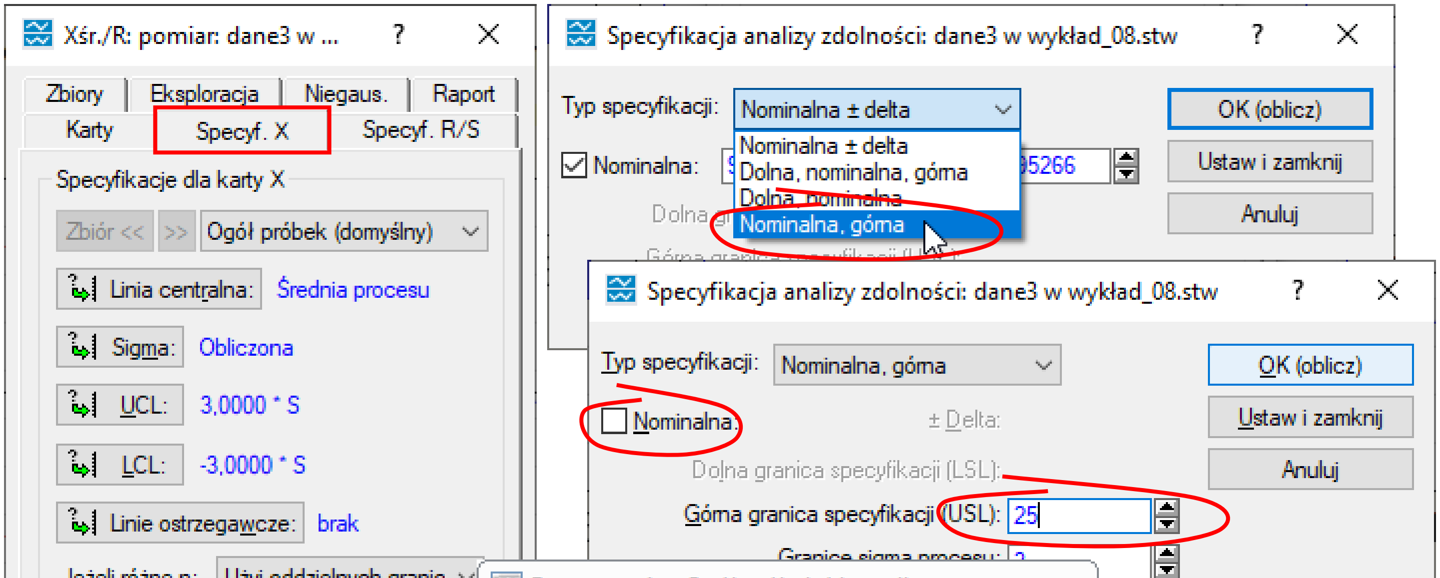
- *rozkładu normalnego*
- *dopasowania krzywymi Johnsona*
- *dopasowania krzywymi Pearsona*

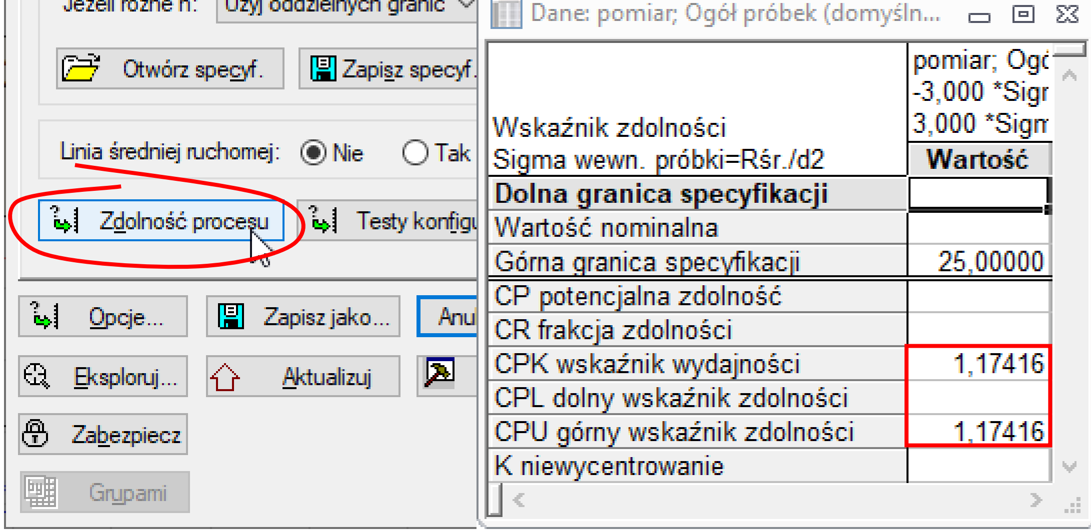
STATISTICA – Ocena zdolności procesu



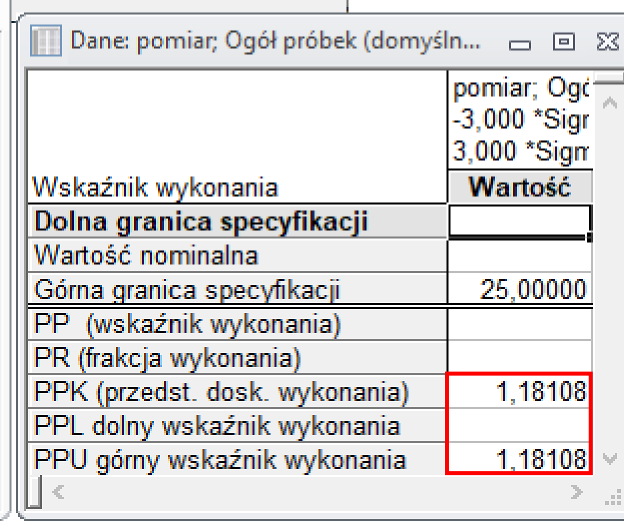
rozbieżność *między obserwowaną a szacowaną liczbą pomiarów poza specyfikacją jest mniejsza przy założeniu, że rozkład nie jest normalny*

STATISTICA – Ocena zdolności procesu

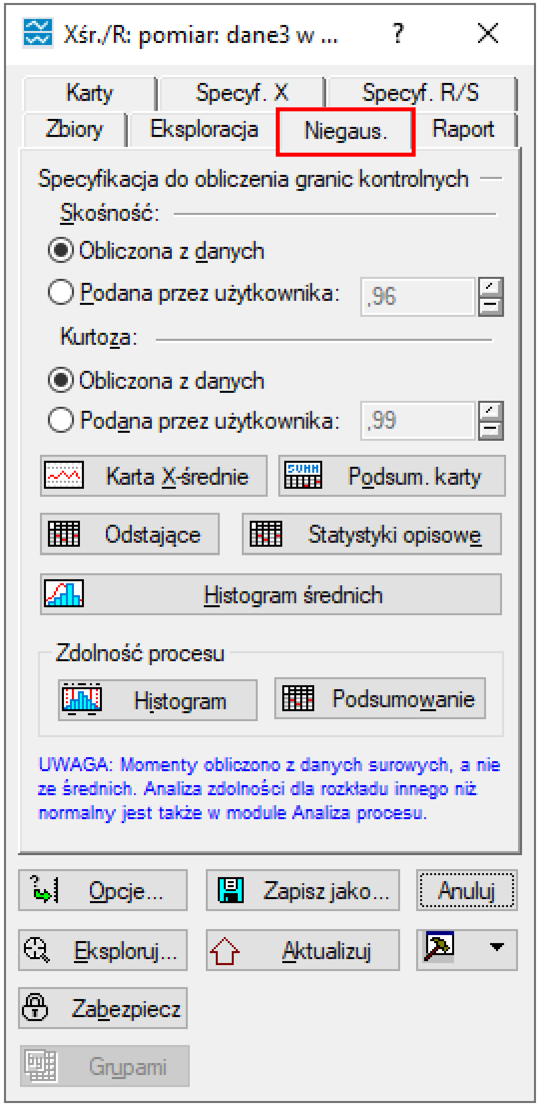




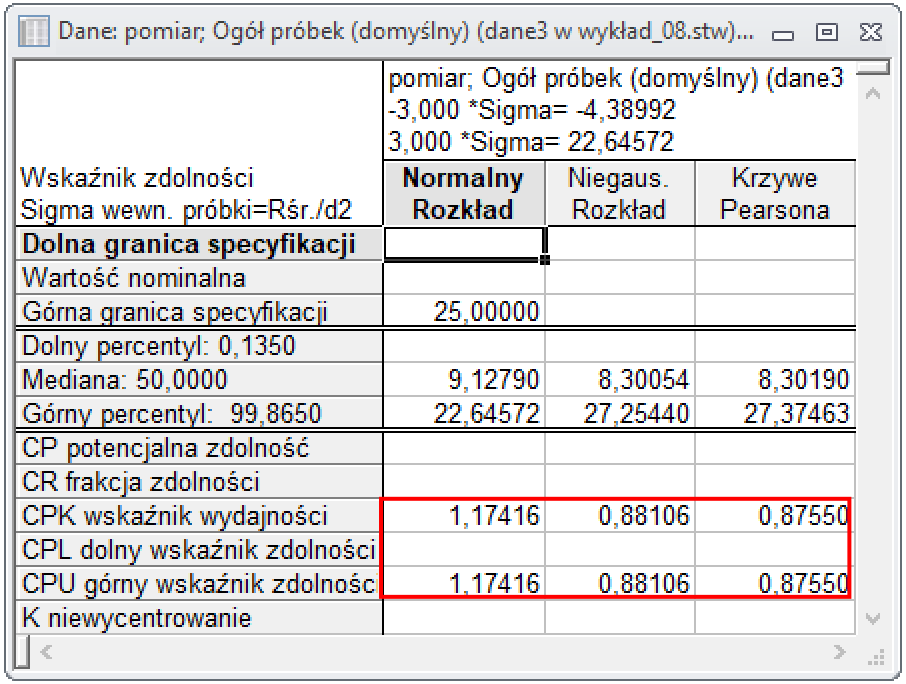
*przy założeniu o normalności proces można uznać za **zdolny***



STATISTICA – Ocena zdolności procesu



*Przyjmując, że rozkład cechy nie jest normalny, proces **nie może** być uznany za **zdolny***

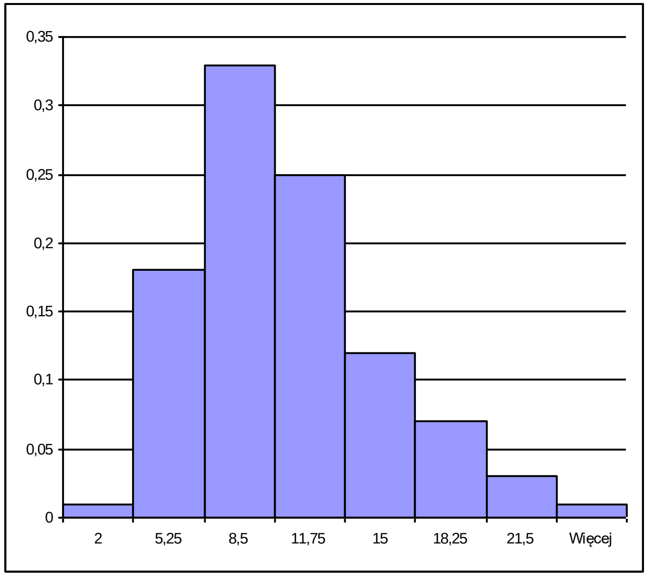


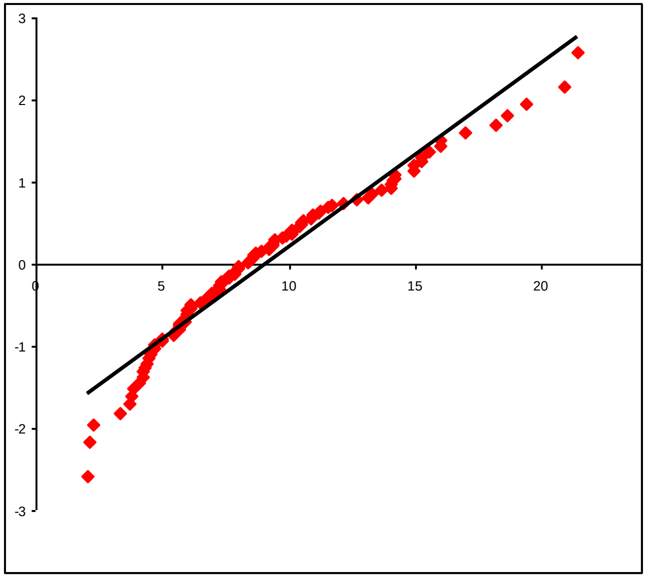
Wskaźnik zdolności Sigma wewn. próbki=Rśr./d2	pomiar; Ogół próbek (domyślny) (dane3 -3,000 *Sigma= -4,38992 3,000 *Sigma= 22,64572 **Normalny Rozkład**	Niegaus. Rozkład	Krzywe Pearsona
Dolna granica specyfikacji			
Wartość nominalna			
Górna granica specyfikacji	25,00000		
Dolny percentyl: 0,1350			
Mediana: 50,0000	9,12790	8,30054	8,30190
Górny percentyl: 99,8650	22,64572	27,25440	27,37463
CP potencjalna zdolność			
CR frakcja zdolności			
CPK wskaźnik wydajności	1,17416	0,88106	0,87550
CPL dolny wskaźnik zdolności			
CPU górny wskaźnik zdolnośc	1,17416	0,88106	0,87550
K niewycentrowanie			

Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. cd.

Histogram i wykres *Q*–*Q* wskazują, że dane nie mają rozkładu normalnego.

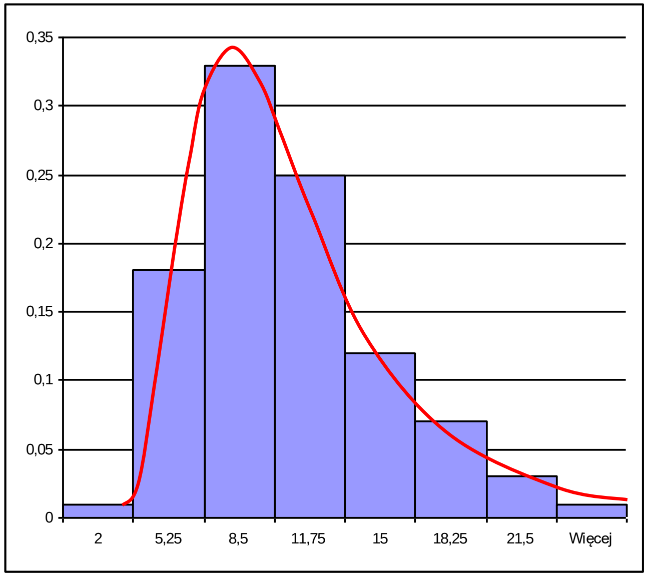


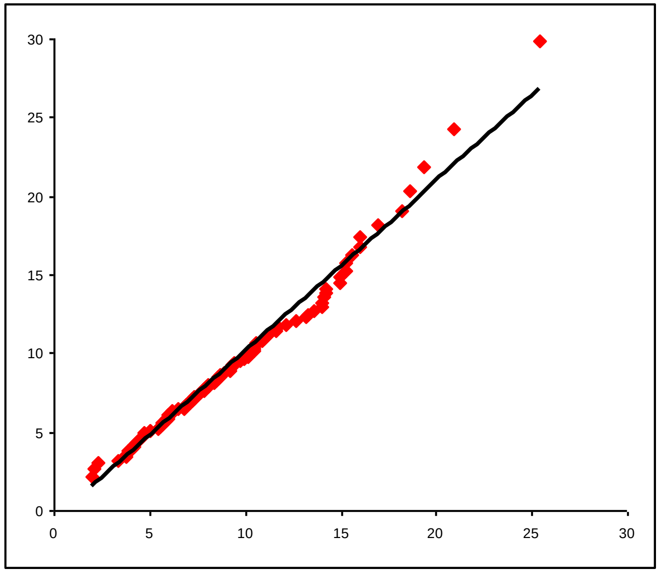


Dotychczasowa analiza (karta i współczynniki $\hat{C}_{pu}$ i $\hat{P}_{pu}$) była oparta na założeniu, że rozkład danych jest rozkładem normalnym. Wnioski dotyczące stabilności i zdolności procesu były więc niewłaściwe, wyznaczone wskaźniki sugerowały zbyt małą liczbę elementów niezgodnych.

Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. cd. Dopasowując rozkłady teoretyczne do danych najlepsze dopasowanie otrzymano dla *r. logarytmiczno – normalnego* o parametrach: $\mu = 2{,}0908$ i $\sigma = 0{,}5071$.





Wykorzystując znaleziony rozkład obliczono:

$$C_{pu}(q) = \frac{USL - q_{0,5}}{q_{0,99865} - q_{0,5}} = \frac{25 - 8{,}0917}{38{,}2084 - 8{,}0917} \approx 0{,}5839$$

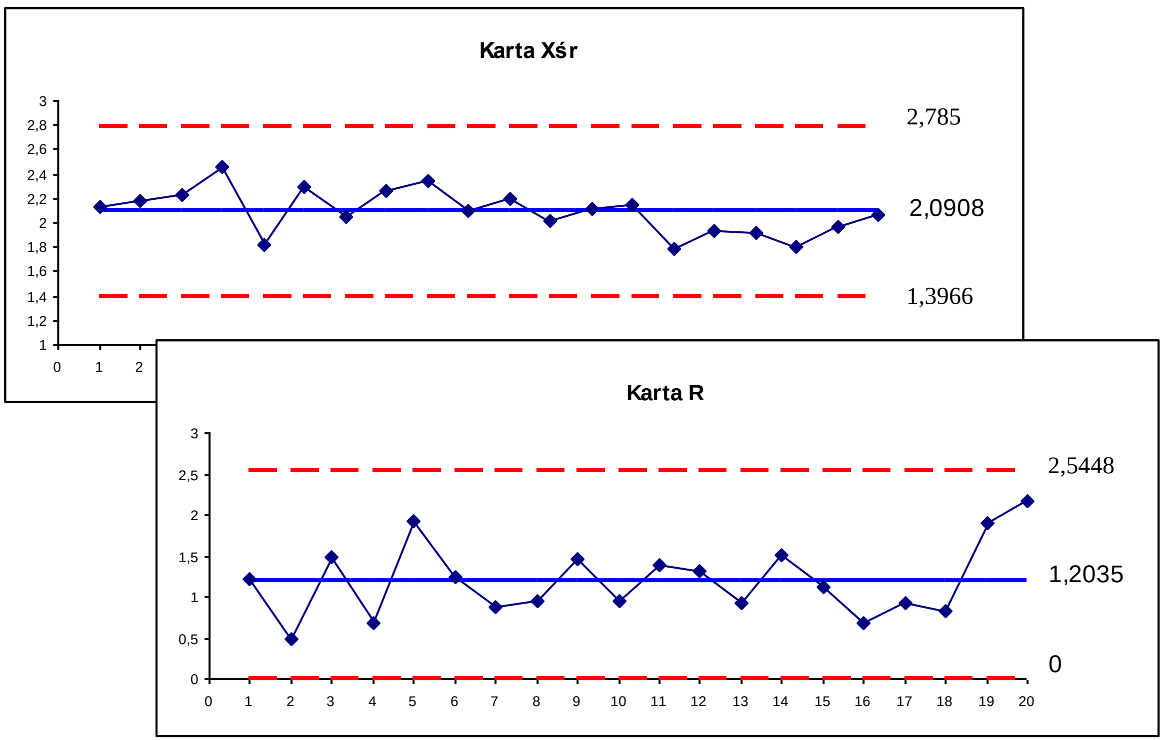
$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{LN}(\mu,\sigma)}(USL) \approx 0{,}0131$$

Otrzymana wartość wskaźnika $\hat{C}_{pu}$ wskazuje, że proces *nie jest zdolny* a *szacowana wadliwość ma wartość zbliżoną do obserwowanej* co potwierdza poprawność analizy.

Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. Identyczne wyniki daje analiza przeprowadzona na danych przekształconych do rozkładu normalnego (np. z wykorzystaniem transformacji Boxa-Coxa). W rozważanym przypadku wystarczy dane przekształcić wykorzystując transformację logarytmiczną.

nr	1	2	3	4	5
1	1,99	1,81	1,82	3,04	1,98
2	1,99	2,15	2,35	1,98	2,46
3	2,15	2,42	2,70	1,21	2,70
4	2,57	2,08	2,77	2,24	2,65
5	2,61	2,35	0,69	1,48	1,93
6	2,23	1,73	2,36	2,16	2,96
7	1,71	2,12	1,73	2,14	2,59
8	2,22	2,65	1,77	2,72	1,93
9	2,01	3,24	2,06	1,77	2,65
10	1,79	2,29	2,64	2,07	1,70
11	2,74	2,39	1,44	2,83	1,54
12	1,46	2,77	2,31	1,50	2,03
13	2,40	1,91	2,42	2,35	1,51
14	2,03	2,92	2,16	2,22	1,41
15	1,32	1,31	1,53	2,45	2,32
16	1,92	1,60	1,78	2,08	2,28
17	1,79	1,60	2,54	1,81	1,87
18	1,44	2,06	1,96	2,19	1,35
19	0,83	2,73	1,74	2,31	2,24
20	2,50	0,73	2,64	1,54	2,90



Karta $\overline{X} - R$ pokazuje, że proces jest statystycznie ***stabilny***.

Ocena zdolności procesu – rozkład inny niż normalny

Przykład 5. cd. Górna granica specyfikacji po przekształceniu logarytmicznym wynosi $USL = 3{,}2189$, wartości współczynników $\hat{C}_{pu}$ i $\hat{P}_{pu}$ wynoszą:

$$\hat{\sigma}_{within} = \frac{\overline{R}}{d_2(5)} = \frac{1{,}2035}{2{,}326} \approx 0{,}5174 \qquad \hat{C}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{within}} = \frac{3{,}2189-2{,}0908}{3\cdot 0{,}5174} \approx 0{,}7267$$

$$\hat{\sigma}_{overall} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \approx 0{,}5071 \qquad \hat{P}_{pu} = \frac{USL-\mu}{3\hat{\sigma}_{overall}} = \frac{3{,}2189-2{,}0908}{3\cdot 0{,}5071} \approx 0{,}7414$$

Wadliwość oszacowana przy założeniu, że rozkład danych (po przekształceniu) jest rozkładem normalnym o $\sigma = \hat{\sigma}_{within}$ i $\sigma = \hat{\sigma}_{overall}$ wynosi:

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma_{within})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{3{,}2189-2{,}0908}{0{,}5174}\right) \approx 0{,}0146$$

$$p = P(x > USL) = 1 - F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma_{overall})}(USL) = 1 - \Phi\left(\frac{3{,}2189-2{,}0908}{0{,}5071}\right) \approx 0{,}0131$$

Wadliwość szacowana i obserwowana ($p = 0{,}01$) są zbliżone, co potwierdza poprawność analizy – proces **nie może** być uznany za ***zdolny*** ponieważ wartości *wskaźników zdolności* i *wykonania* są < 1.

Wykorzystując zależność:

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

C_{pk} można zapisać jako:

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \frac{1}{2}\left(C_{pu} + C_{pl} - \left|C_{pu} - C_{pl}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma} + \frac{\mu-LSL}{3\sigma} - \left|\frac{USL-\mu}{3\sigma} - \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3\sigma}(USL - LSL - |USL + LSL - 2\mu|) = \frac{1}{6\sigma}\left(USL - LSL - 2\left|\frac{USL+LSL}{2} - \mu\right|\right)$$

Przyjmując, że: $T = \frac{USL+LSL}{2}$, otrzymuje się:

$$C_{pk} = \frac{1}{6\sigma}(USL - LSL - 2|T-\mu|) = \frac{USL-LSL}{6\sigma} - \frac{2|T-\mu|}{6\sigma} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{6\sigma}$$

Ostatecznie

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{6\sigma} \qquad \text{lub} \qquad C_p - C_{pk} = \frac{2|T-\mu|}{6\sigma}$$

■

Współczynnik niewycentrowania

Wcześniej pokazano, że:

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{6\sigma}$$

Wyznaczając zakres zmienności 6σ z definicji wskaźnika C_p $\left(C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma}\right)$

$$6\sigma = \frac{USL-LSL}{C_p}$$

Wskaźnik C_{pk} można zapisać jako:

$$C_{pk} = C_p - \frac{2|T-\mu|}{USL-LSL} C_p = C_p \left(1 - \underbrace{\frac{2|T-\mu|}{USL-LSL}}_{K}\right)$$

$$C_{pk} = C_p(1-K)$$

K – *współczynnik niewycentrowania*

$$K = \frac{|T-\mu|}{\frac{1}{2}(USL-LSL)}$$

τ^2 odpowiada średniemu kwadratowi odchylenia od wartości nominalnej T

czyli:

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= E\left((x-T)^2\right) \\
&= E\left((x-\mu+\mu-T)^2\right) \\
&= E\left((x-\mu)^2 + 2(x-\mu)(\mu-T) + (\mu-T)^2\right) \\
&= \underbrace{E\left((x-\mu)^2\right)}_{\sigma^2} + \underbrace{E\left((\mu-T)^2\right)}_{(\mu-T)^2} + \underbrace{E\left(2(x-\mu)(\mu-T)\right)}_{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(2(x-\mu)(\mu-T)\right) &= 2(\mu-T)E(x-\mu) \\
&= 2(\mu-T)(E(x)-\mu) \\
&= 2(\mu-T)(\mu-\mu) \\
&= 0
\end{aligned}$$