

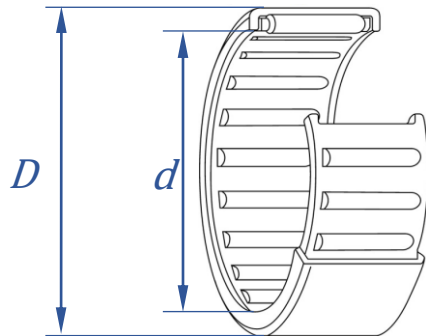
# Sterowanie jakością

Wielowymiarowe karty kontrolne

Elipsa kowariancji

Karta  $\chi^2$

Karta  $T^2$



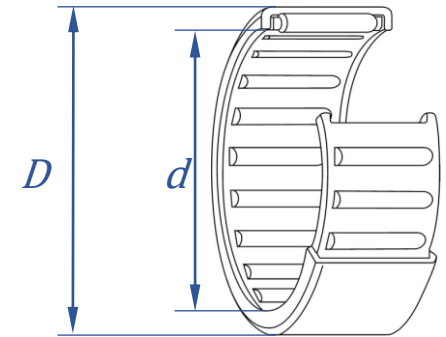
Materiały

<http://pracownicy.uz.zgora.pl/ipajak/>

# Wielowymiarowe karty kontrolne

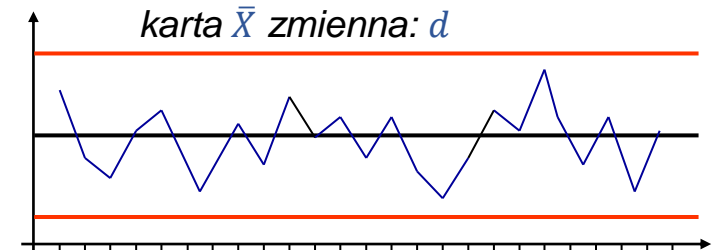
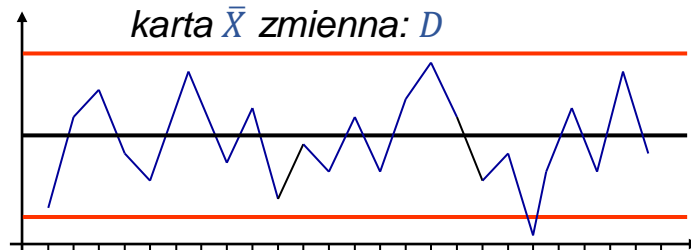
## Monitorowanie pojedynczej cechy procesu

- wykorzystywane są *klasyczne (jednowymiarowe) karty kontrolne*, które pozwalają na analizę jednej własności monitorowanego procesu

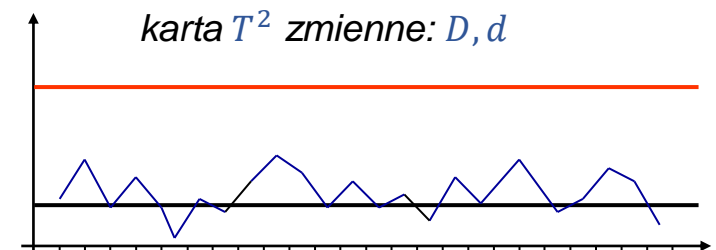


## Monitorowanie kilku cech procesu

- wykorzystanie *zespołu klasycznych (jednowymiarowych) kart kontrolnych* do oddzielnej analizy monitorowanych własności



- wykorzystanie *wielowymiarowych kart kontrolnych* do równoczesnej analizy kilku własności monitorowanego procesu



# Zespół jednowymiarowych kart kontrolnych

Monitorując kilka cech procesu na oddzielnych kartach jednowymiarowych można skorygować granice kontrolne kart tak aby *sumaryczne prawdopodobieństwo generowania fałszywych alarmów (błąd I rodzaju)* pozostało na ustalonym poziomie.

Zakładając, że:

- liczba monitorowanych cech wynosi  $m$
- cechy są od siebie niezależne
- prawdopodobieństwo *błędu I rodzaju* dla pojedynczej karty kontrolnej wynosi  $\alpha$
- proces jest statystycznie uregulowany

prawdopodobieństwo, że żadna karta nie wygeneruje sygnału o rozregulowaniu wynosi:

$$p = (1 - \alpha)^m$$

prawdopodobieństwo wygenerowania fałszywego alarmu wynosi więc:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^m$$

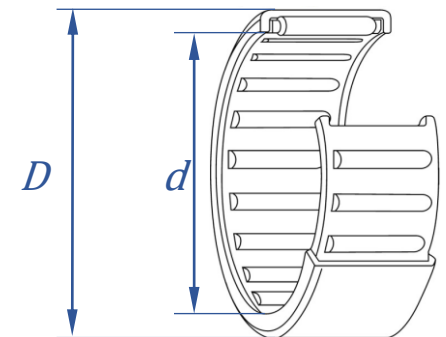
Ustalając wartość  $\alpha'$  można wyznaczyć  $\alpha$  dla pojedynczej karty:  $\alpha = 1 - \sqrt[m]{1 - \alpha'}$ .

(dla cech zależnych – zwykle w przypadku gdy cechy dotyczą tego samego produktu – prawdopodobieństwo *błędu I rodzaju* jest trudne do wyznaczenia i w konsekwencji trudno jest wykonać właściwą poprawkę granic kontrolnych)

# Wielowymiarowe karty kontrolne

**Wielowymiarowe karty kontrolne** pozwalają na równoczesną analizę kilku własności monitorowanego procesu,

- do monitorowania **położenia procesu** wykorzystywane są:
  - karta  $T^2$  *Hottelina* (dla pojedynczych obserwacji i dla próbek),
  - karta **MEWMA** (dla pojedynczych obserwacji i dla próbek),
  - karta **MCUSUM** (dla pojedynczych obserwacji),
- do monitorowania **rozproszenia** procesu:
  - karta uogólnionej wariancji



## Wielowymiarowe karty kontrolne a zespół kart jednowymiarowych

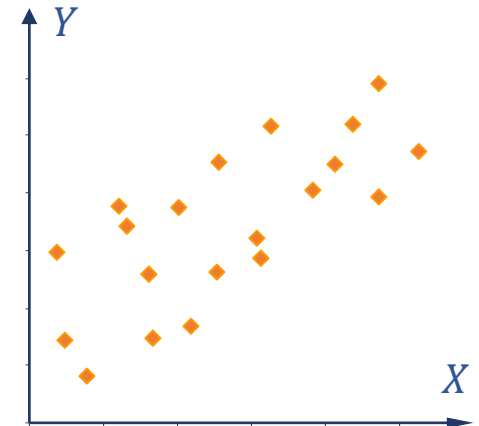
- **karty wielowymiarowe** biorą pod uwagę korelację monitorowanych cech co w konsekwencji (na ogół) prowadzi do ich większej czułości
- w niektórych przypadkach zespół kart  $\bar{X}$  okazuje się bardziej czuły od np., karty  $T^2$  *Hottelina* (pokazano dla 2 zmiennych i przesunięcia procesu wzdłuż kierunku maksymalnej zmienności)

# Statystyka – dwuwymiarowe zmienne losowe

**Dwuwymiarową zmienną losową** jest nazywany układ dwóch zmiennych losowych  $(X, Y)$  jeśli znane są prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia  $(x, y)$  lub prawdopodobieństwa, że  $(x, y)$  przyjmie wartość z określonego dwuwymiarowego przedziału (tzn. z określonego prostokąta).

## Graficzna prezentacja danych

Obserwacje pochodzące z obserwacji rozkładu dwuwymiarowego przedstawiane są na tzw. **wykresach rozrzutu**. Wykres rozrzutu to wykres punktowy, poszczególne punkty wykresu odpowiadają wartościom uzyskanym z kolejnych obserwacji zmiennych  $X$  i  $Y$ .



## Miary zależności

Dla dwuwymiarowych zmiennych losowych, oprócz miar wprowadzonych dla zmiennych jednowymiarowych, definiowane są miary związane z istnieniem (lub nieistnieniem) zależności pomiędzy zmiennymi tworzącymi ten rozkład: **kowariancja** i **współczynnik korelacji**.

# Statystyka – dwuwymiarowe zmienne losowe

---

Dla zmiennych losowych  $X$  i  $Y$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Dodatkowo, jeśli zmienne są **niezależne** spełniona jest zależność:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Różnica  $E(XY) - E(X)E(Y)$  jest miarą zależności zmiennych jest to tzw. *kowariancja*

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

jest ona również definiowana w równoważny sposób jako

$$\sigma_{XY} = E(X - E(X)) E(Y - E(Y))$$

## Własności

- jeżeli zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne to  $\sigma_{XY} = 0$ ,
- jeżeli wartości  $X$  większe od średniej pojawiają się najczęściej z wartościami  $Y$  większymi od średniej to  $\sigma_{XY} > 0$ ,
- jeżeli wartości  $X$  większe od średniej pojawiają się najczęściej z wartościami  $Y$  mniejszymi od średniej to  $\sigma_{XY} < 0$ .

# Statystyka – dwuwymiarowe zmienne losowe

**Współczynnik korelacji liniowej Paersona** to standaryzowana kowariancja, miara została zdefiniowana w celu uniezależnienia *kowariancji* od wariancji zmiennych  $X$  i  $Y$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

## Własności

- przyjmuje wartości

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

- opisuje siłę związku zmiennych

Wartości $ \rho_{XY} $		Siła związku (korelacja)
od	do	
0	0,2	brak
0,2	0,4	słaba
0,4	0,7	średnia
0,7	0,9	silna
0,9	1	bardzo silna

$\sigma_X, \sigma_Y$  to odchylenia standardowe zmiennych  $X$  i  $Y$

# Statystyka – dwuwymiarowe zmienne losowe

Kowariancja i korelacja mogą być szacowane na podstawie próby

kowariancja  $\sigma_{XY}$  jest szacowana jako:

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})) \quad \text{lub} \quad s_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))$$

korelację  $\rho_{XY}$  przybliża się z wzoru:

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

$s_X, s_Y$  to oszacowane z próby odchylenia standardowe  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$ ,  
do szacowania  $\sigma_X$  wykorzystywane są zależności:

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{lub} \quad s_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



# Statystyka – wielowymiarowe zmienne losowe

Rozkład prawdopodobieństwa *wielowymiarowej zmiennej losowej*  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  jest opisany w postaci łącznego rozkładu zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

Zależności pomiędzy zmiennymi tworzącymi ten rozkład opisuje się *macierzami kowariancji i korelacji*, które są uogólnieniami na  $k$  wymiarów kowariancją i korelacją:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}$$
$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} & \cdots & \frac{\sigma_{1k}}{\sigma_1\sigma_k} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \cdots & \frac{\sigma_{2k}}{\sigma_2\sigma_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_k\sigma_1} & \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_k\sigma_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\sigma_i^2$  to wariancja zmiennej  $X_i$

$\sigma_{ij}$  to kowariancja zmiennych  $X_i$  i  $X_j$ , macierz kowariancji jest symetryczna

ponieważ:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

# Statystyka – wielowymiarowy rozkład normalny

**Wielowymiarowy rozkład normalny** jest jednym z najważniejszych rozkładów wielowymiarowych zmiennych losowych, jest on uogólnieniem rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  o funkcji gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

**Wielowymiarowy rozkład normalny**  $k$ -wymiarowej zmiennej losowej  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  jest zapisywany jako  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  a funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem:

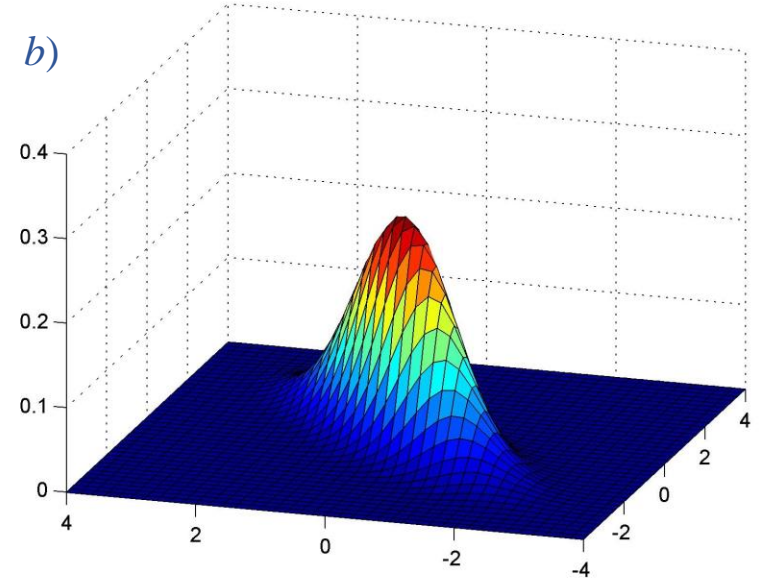
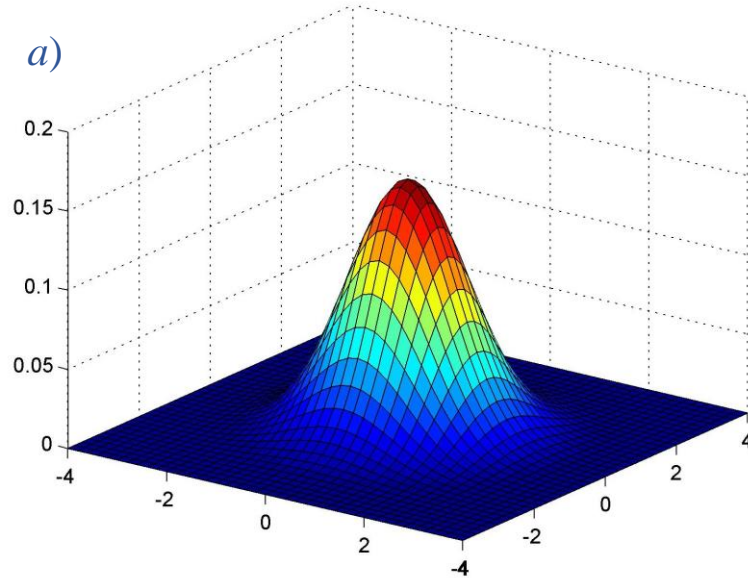
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k} \sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

$\mu$  to wektor średnich  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]^T$

$\Sigma$  to  $(k \times k)$  wymiarowa *macierz kowariancji*

parametry  $\mu$  i  $\Sigma$  mogą być szacowane z próby, oznaczane są jako  $\bar{x}$  i  $S$

# Statystyka – dwuwymiarowy rozkład normalny



Dwuwymiarowy rozkład normalny o średnich  $\mu = [0 \ 0]^T$  i  
macierzy kowariancji: a)  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  b)  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$

# Statystyka – dwuwymiarowe zmienne losowe

**Przykład 1.** W tabeli zebrane zostały wartości cech  $X$  i  $Y$  wylosowane z dwuwymiarowego rozkładu  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  o parametrach:

$$\mu = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć macierze kowariancji i korelacji, narysować wykres rozrzutu.

Lp.	$x_i$	$y_i$
1	99,62	49,49
2	98,57	49,91
3	100,53	49,82
4	100,78	49,59
5	100,34	49,93
6	98,28	47,72
7	102,22	51,62
8	97,19	49,88
9	100,54	51,78
10	98,81	49,10
11	97,85	49,47
12	97,94	49,53
13	100,72	49,60
14	98,48	50,54
15	99,51	49,98
16	97,30	48,47
17	99,04	48,27
18	100,26	49,91
19	98,21	51,55
20	96,65	47,51
$\Sigma$	<b>1982,83</b>	<b>993,66</b>

$$\bar{x} = \frac{1982,8}{20} \approx 99,14$$

$$\bar{y} = \frac{993,66}{20} \approx 49,68$$

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \approx 40,63$$

$$s_x^2 = \frac{40,63}{19} \approx 2,14$$

$$\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 \approx 25,20$$

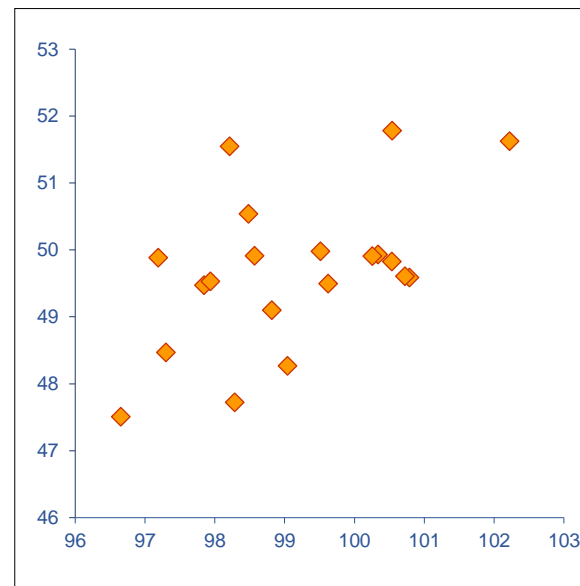
$$s_y^2 = \frac{25,20}{19} \approx 1,33$$

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16,69$$

$$s_{XY} = \frac{16,69}{19} = 0,88,$$

$$r_{XY} = \frac{0,47}{0,91 \cdot 0,66} \approx 0,79$$

$$S = \begin{bmatrix} 2,14 & 0,88 \\ 0,88 & 1,33 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,79 \\ 0,79 & 1 \end{bmatrix}$$



# Karta kontrolna $\bar{X}$ a test istotności średniej

Analiza na karcie  $\bar{X}$  sprowadza się do przeprowadzenia testu istotności dla wartości średniej w próbie:

$H_0: \mu = \mu_0$  (średnia nie uległa zmianie)

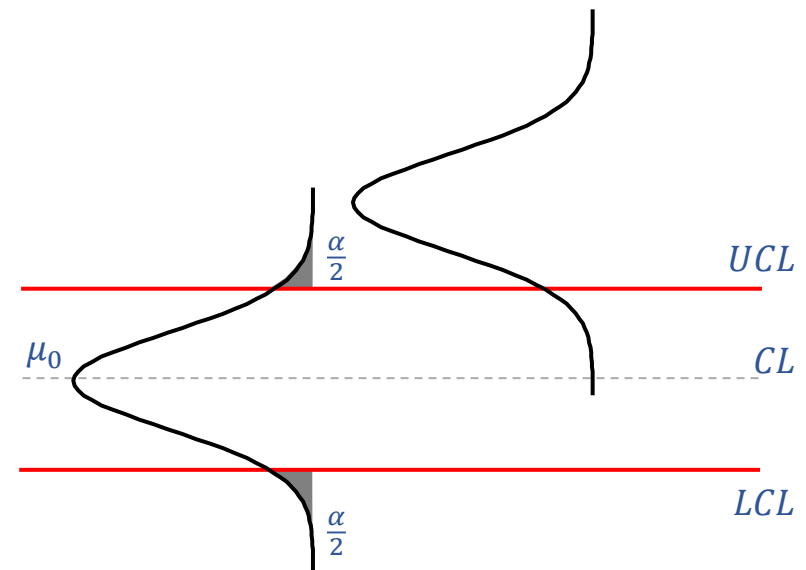
$H_1: \mu \neq \mu_0$  (średnia uległa zmianie)

Do weryfikacji hipotezy wykorzystywana jest statystyka testowa o rozkładzie  $\mathcal{N}(0,1)$ :

$$Z_n = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$



$Z_n$  opisuje odległość pomiędzy średnią  $\bar{x}$  a  $\mu_0$  mierzoną w odchyleniach standardowych średniej.



# Wielowymiarowa karta kontrolna dla średniej – idea

Wprowadzając kwadrat odległości  $Z_n$ :

$$Z_n^2 = (\bar{x} - \mu_0) \left( \frac{\sigma^2}{n} \right)^{-1} (\bar{x} - \mu_0)$$

$$Z_n = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

można łatwo uogólnić rozważania na przypadek wielowymiarowy:

$$\begin{aligned} \chi_n^2 &= (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \left( \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{n} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \\ &= n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \end{aligned}$$

odrzucając hipotezę  $H_0$  gdy wartość statystyki testowej  $\chi_n^2$  znajdzie się wewnątrz prawostronnego obszaru krytycznego.

$\boldsymbol{\mu}$  to wektor średnich  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]^T$

$\chi_n^2$  to statystyka testowa o rozkładzie  $\chi^2$  i  $k$  stopniach swobody

# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

Dla przypadku dwuwymiarowego, przyjmując, że:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

po wyznaczeniu odwrotności *macierzy kowariancji*:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

statystykę

$$\chi_n^2 = n(\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0)$$

można po przekształceniach zapisać jako:

$$\chi_n^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \mu_1 & \bar{x}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \mu_1 \\ \bar{x}_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_n^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left( \sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1) (\bar{x}_2 - \mu_2) \right)$$

$\mu_1, \mu_2$  to średnie zmiennych  $X_1$  i  $X_2$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$  to odchylenia standardowe i kowariancja zmiennych  $X_1$  i  $X_2$

# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

W przypadku dwuwymiarowym granicę *obszaru krytycznego* wyznacza się jako:

$$\chi_{\alpha}^2 = F_{\chi^2(2)}^{-1}(1 - \alpha)$$

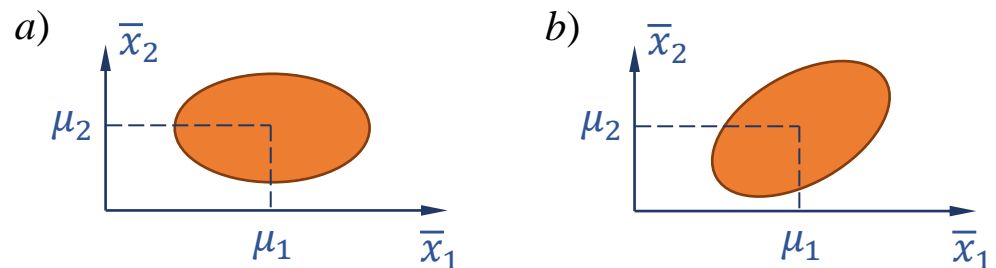
$\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$  nie pozwolą na odrzucenie hipotezy o zmianie średniej procesu gdy  $\chi_n^2 \leq \chi_{\alpha}^2$ , czyli

$$\frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left( \sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2) \right) \leq \chi_{\alpha}^2$$

Zależność ta pozwala na graficzne przedstawienie obszaru, do którego powinny należeć średnie  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$ , obszar ten jest wnętrzem elipsy o środku w punkcie  $(\mu_1, \mu_2)$ , dodatkowo:

- jeżeli zmienne  $X_1$  i  $X_2$  są niezależne (kowariancja  $\sigma_{12} = 0$ ) to półosie elipsy są równoległe do osi układu
- jeżeli zmienne  $X_1$  i  $X_2$  są zależne, elipsa jest skrzyżowana, a kąt skrzyżowania jest uzależniony od *macierzy kowariancji*

Obszar ten jest nazywany *elipsą obszaru ufności* lub *elipsą kowariancji*.





# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

Łatwo zauważyć, że dla zmiennych niezależnych (*kowariancja*  $\sigma_{12} = 0$ ) warunek:

$$\frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left( \sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2) \right) \leq \chi_\alpha^2$$

po przekształceniach

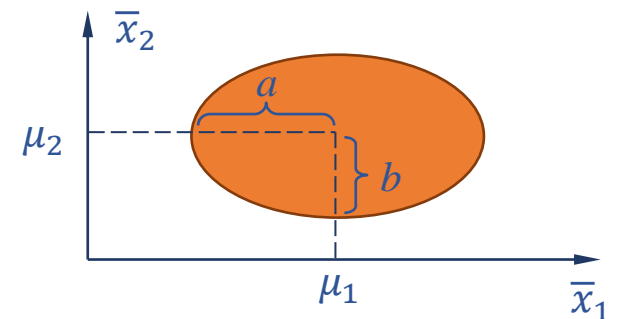
$$\frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} (\sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2) \leq \chi_\alpha^2$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\bar{x}_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\chi_\alpha^2}{n}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2 \chi_\alpha^2 / n} + \frac{(\bar{x}_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2 \chi_\alpha^2 / n} \leq 1$$

przedstawia wnętrze elipsy o półosiach:

$$a = \sigma_1 \sqrt{\chi_\alpha^2 / n} \quad \text{i} \quad b = \sigma_2 \sqrt{\chi_\alpha^2 / n}.$$



# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

Dla zmiennych zależnych (*kowariancja*  $\sigma_{12} \neq 0$ ) warunek:

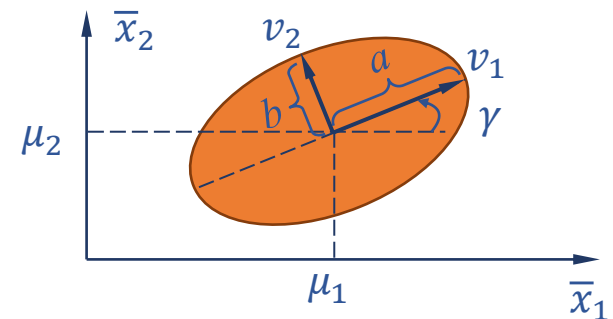
$$\frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left( \sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1)(\bar{x}_2 - \mu_2) \right) \leq \chi_\alpha^2$$

przedstawia wnętrze elipsy o środku  $(\mu_1, \mu_2)$  i półosiach wyrównanych wzdłuż *wektorów własnych macierzy kowariancji*. Długości półosi elipsy i skręcenie elipsy wyznacza się z zależności:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\chi_\alpha^2 / n}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\chi_\alpha^2 / n}$$

$$\gamma = \text{atan}(v_{1y}, v_{1x})$$



$\lambda_1, \lambda_2$  to odpowiednio większa i mniejsza *wartość własna macierzy kowariancji*  $\Sigma$

$v_1, v_2$  to *wektory własne* odpowiadające *wartościom własnym*  $\lambda_1, \lambda_2$

$v_{ix}, v_{iy}$  to *x-owa* i *y-owa* współrzędna *i-tego wektora własnego*

# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

**Przykład 2.** Dane z *przykładu 1.* uzupełniono o 60 wartości z tego samego rozkładu normalnego następnie pogrupowano w 4-elementowe próbki i policzono ich średnie.

Lp.	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$x_{i4}$	$\bar{x}_i$	Lp.	$y_{i1}$	$y_{i2}$	$y_{i3}$	$y_{i4}$	$\bar{y}_i$
1	99,62	98,57	100,53	100,78	99,88	1	49,49	49,91	49,82	49,59	49,70
2	100,34	98,28	102,22	97,19	99,51	2	49,93	47,72	51,62	49,88	49,79
3	100,54	98,81	97,85	97,94	98,78	3	51,78	49,10	49,47	49,53	49,97
4	100,72	98,48	99,51	97,30	99,00	4	49,60	50,54	49,98	48,47	49,65
5	99,04	100,26	98,21	96,65	98,54	5	48,27	49,91	51,55	47,51	49,31
6	101,66	100,44	100,40	100,05	100,64	6	50,67	49,78	49,88	50,43	50,19
7	100,47	99,65	100,33	101,40	100,46	7	51,45	50,12	50,69	50,33	50,65
8	100,24	100,82	97,14	100,55	99,69	8	48,36	50,59	47,86	49,26	49,02
9	100,11	99,57	101,53	100,43	100,41	9	49,63	48,86	50,83	49,71	49,76
10	100,95	102,13	101,95	101,85	101,72	10	51,58	50,74	51,78	50,68	51,19
11	101,04	100,47	98,51	101,30	100,33	11	51,13	50,23	49,13	51,13	50,41
12	100,65	100,51	99,78	99,18	100,03	12	50,50	49,97	50,24	49,65	50,09
13	98,96	97,09	99,84	100,39	99,07	13	50,24	48,13	49,22	50,27	49,46
14	97,77	98,34	97,54	98,28	97,98	14	49,36	48,92	48,80	49,22	49,07
15	98,63	101,55	99,09	99,06	99,58	15	49,23	50,93	49,42	49,19	49,70
16	100,80	99,17	99,77	95,11	98,71	16	50,76	48,61	49,84	48,51	49,43
17	101,00	101,18	102,02	99,09	100,82	17	49,49	50,92	49,92	49,59	49,98
18	101,57	98,92	98,45	100,85	99,95	18	51,41	49,61	47,87	51,68	50,14
19	101,45	102,34	98,32	100,15	100,57	19	52,39	50,14	48,74	50,40	50,42
20	99,89	99,01	102,31	100,24	100,36	20	49,47	49,76	51,17	48,47	49,72

## Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

**Przykład 2. cd.** Czy dane z próby pozwalają na stwierdzenie, że średnia różni się istotnie ( $\alpha = 0,02$ ) od średniej rozkładu z którego wylosowano dane? Analizę przeprowadzić wykreślając *elipsę kowariancji*.

Parametry elipsy (długości półosi  $a$  i  $b$  oraz jej skręcenie  $\gamma$ ) wyznacza się wykorzystując:

- *granice obszaru krytycznego*

$$\chi_{\alpha}^2 = F_{\chi^2(2)}^{-1}(1 - \alpha) = F_{\chi^2(2)}^{-1}(1 - 0,02) \approx 7,824$$

- *wektory i wartości własne macierzy kowariancji*

$$\lambda_1 \approx 2,4434, \quad v_1 \approx \begin{bmatrix} -0,8746 \\ -0,4848 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \approx 0,5566, \quad v_2 \approx \begin{bmatrix} 0,4848 \\ -0,8746 \end{bmatrix}$$

po podstawieniu do wzorów (slajd 18) otrzymuje się:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \sqrt{\chi_{\alpha}^2/n} = \sqrt{2,4434} \sqrt{7,824/4} \approx 2,19$$

$$b = \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\chi_{\alpha}^2/n} = \sqrt{0,5566} \sqrt{7,824/4} \approx 1,04$$

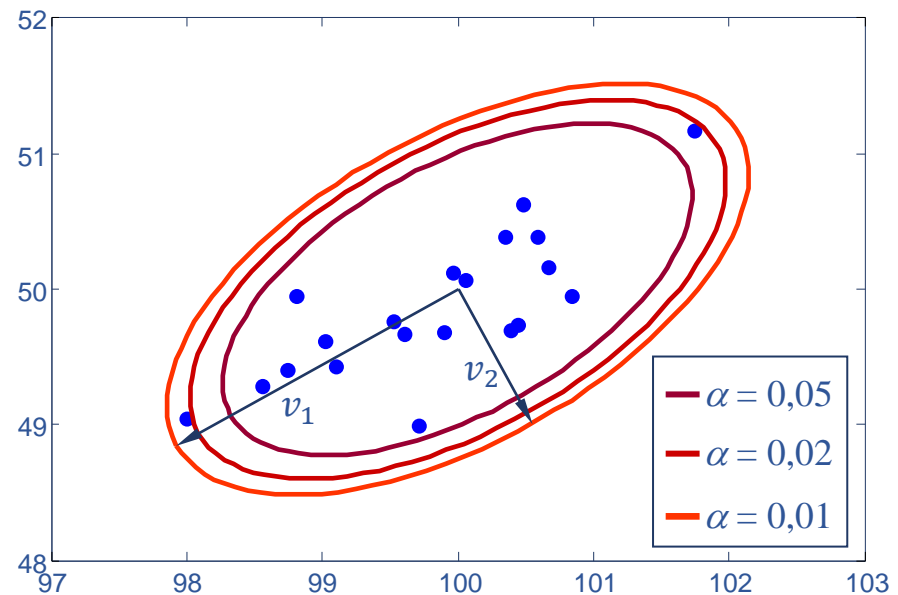
$$\gamma = \text{atan}(v_{1y}, v_{1x}) \approx -151^\circ$$

# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji

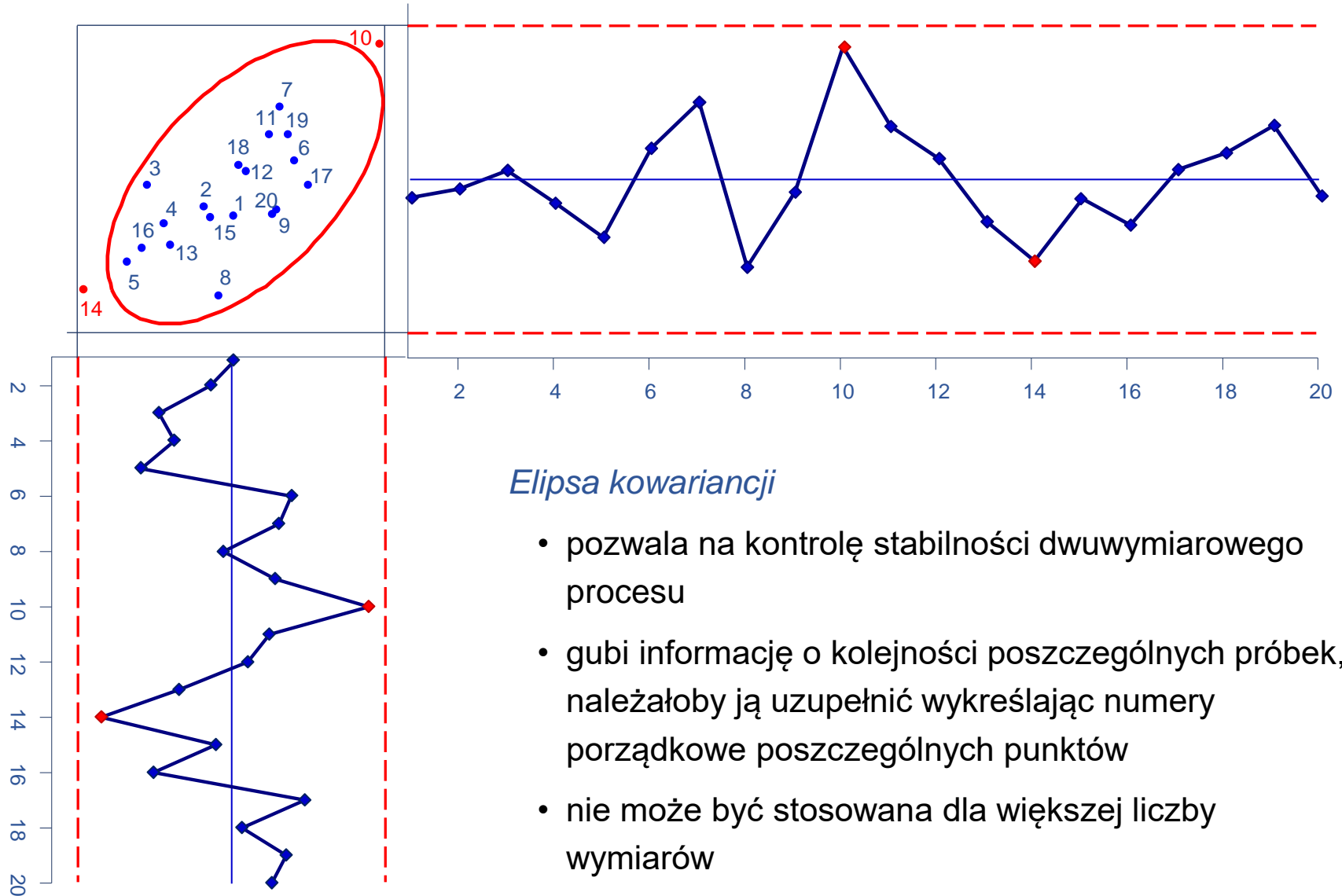
**Przykład 2. cd.** Na wykresie rozrzutu przedstawiającym średnie z kolejnych próbek zostały wykreślone trzy elipsy dla poziomów istotności  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,02$  i  $\alpha = 0,01$ .

- poza obszarem najmniejszej elipsy (dla  $\alpha = 0,05$ ) znajdują się 2 punkty: z lewej strony punkt odpowiadający próbce 14, z prawej próbce 10,
- poza obszarem środkowej elipsy (dla  $\alpha = 0,02$ ) znajduje się już tylko punkt odpowiadający próbce 14,
- największa elipsa (dla  $\alpha = 0,01$ ) ogranicza wszystkie punkty wykresu.

Dla punktów znajdujących się poza obszarem elipsy należy odrzucić hipotezę zerową na rzecz alternatywnej, wskazującej na istotną zmianę średniej procesu (próbka 10. i 14. mogą więc świadczyć o rozregulowaniu procesu).



# Karta dwuwymiarowa – elipsa kowariancji



## *Elipsa kowariancji*

- pozwala na kontrolę stabilności dwuwymiarowego procesu
- gubi informację o kolejności poszczególnych próbek, należałoby ją uzupełnić wykreślając numery porządkowe poszczególnych punktów
- nie może być stosowana dla większej liczby wymiarów

**Karta kontrolna  $\chi^2$**  – pozwala na graficznie przedstawienie testu istotności dla średniej dla procesów wielowymiarowych.

## Wykres postępu

Dla każdej próbki wyznacza się wartość statystyki testowej

$$\chi_n^2 = n(\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0)$$

## Linie kontrolne

$$UCL = \chi_{\alpha}^2$$

Tak skonstruowana karta pozwala na obserwację **zmiany wielkości średniej procesu**, nie umożliwia obserwacji **kierunku zmiany** – statystyka  $\chi_n^2$  przedstawia kwadrat odległości od średniej.

**Przykład 2. cd.** Wykreślenie karty  $\chi^2$  wiąże się z obliczeniem dla każdej próbki:

$$\chi_n^2 = n(\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0).$$

Dla 1. próbki otrzymano średnią (slajd 19)  $\bar{x} \approx \begin{bmatrix} 99,88 \\ 49,70 \end{bmatrix}$ ,  $\chi_n^2$  wynosi więc:

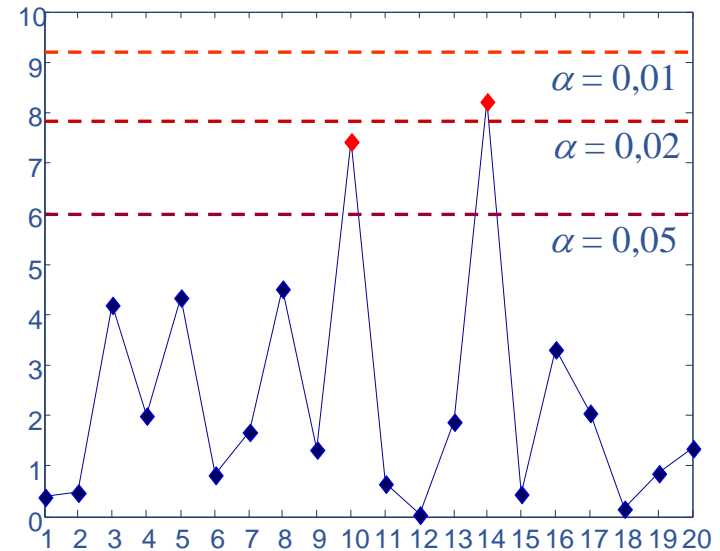
$$\chi_n^2 = 4 \left( \begin{bmatrix} 99,88 \\ 49,70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 2 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 99,88 \\ 49,70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \right) \approx 0,3878.$$

Wartości  $\chi_n^2$  dla wszystkich próbek zostały zebrane w tabeli obok.

Położenie linii kontrolnej zależy od  $\alpha$ :

- dla  $\alpha = 0,05$ :  $UCL = 5,9915$
- dla  $\alpha = 0,02$ :  $UCL = 7,8240$
- dla  $\alpha = 0,01$ :  $UCL = 9,2103$

Wykres przedstawia gotową kartę. Próbki 10. i 14. w zależności od przyjętego poziomu istotności mogą znajdować się poza  $UCL$ .



Lp.	$\chi_n^2$
1	0,3878
2	0,4881
3	4,1853
4	2,0018
5	4,3425
6	0,8421
7	1,6878
8	4,5046
9	1,3193
10	7,4328
11	0,6602
12	0,0374
13	1,8892
14	8,2278
15	0,4596
16	3,3324
17	2,0718
18	0,1618
19	0,8566
20	1,3464



# Karta kontrolna $T^2$ Hottelinga

**Karta kontrolna  $T^2$  Hottelinga** – karta, którą można traktować jak zmodyfikowaną wersję karty  $\chi^2$ , stosowana gdy parametry procesu  $\mu$  i  $\Sigma$  nie są znane i muszą być szacowane na podstawie próby (estymatory parametrów  $\mu$  i  $\Sigma$ , tzn.  $\bar{\bar{x}}$  i  $S$  otrzymuje się po uśrednieniu wyników z prób na podstawie których karta jest konfigurowana).

## Wykres postępu

$$T^2 = n(\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}})^T S^{-1} (\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}})$$

## Linie kontrolne

faza konfiguracji karty

$$UCL = \frac{k(m-1)(n-1)}{mn-m-k+1} F_\alpha$$

faza monitorowania procesu

$$UCL = \frac{k(m+1)(n-1)}{mn-m-k+1} F_\alpha$$

- |            |   |
|------------|---|
| $k$        | to ilość równocześnie monitorowanych cech procesu   |
| $n, m$     | to rozmiar próbki i ilość próbek wykorzystanych do szacowania parametrów $\mu$ i $\Sigma$   |
| $F_\alpha$ | to wartość wyznaczana z odwrotności dystrybuanty rozkładu $F$ o $v_1 = k$ i $v_2 = mn - m - k + 1$ stopniach swobody, tzn. $F_\alpha = F_{F(k, mn-m-k+1)}^{-1}(1 - \alpha)$ , można łatwo zauważyć, że wartości $UCL$ dla <i>fazy monitorowania</i> otrzymuje się z mnożąc $UCL$ z <i>fazy konfiguracji</i> przez $(m + 1)/(m - 1)$ . |

# Karta kontrolna T<sup>2</sup> Hottelinga

**Przykład 2. cd.** Przeprowadź analizę procesu z wykorzystaniem *karty Hotellinga*.

W tabeli obok zebrane zostały wyniki obliczeń dla kolejnych próbek:

- średnie cech  $X$  i  $Y$ , tzn.:  $\bar{x}_i$  i  $\bar{y}_i$
- wariancje cech:  $s_{i1}^2$  i  $s_{i2}^2$  oraz kowariancja:  $s_{i12}$ .

Wyznaczone wartości zostały zsumowane i ostateczne, wartości szacowanych parametrów procesu otrzymano jako:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1996,04 \\ 997,63 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 99,80 \\ 49,88 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 37,93 & 18,67 \\ 18,67 & 22,06 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,90 & 0,93 \\ 0,93 & 1,10 \end{bmatrix}$$

Lp.	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$s_{i1}^2$	$s_{i2}^2$	$s_{i12}$
1	99,88	49,70	1,01	0,04	-0,08
2	99,51	49,79	4,97	2,55	2,47
3	98,78	49,97	1,56	1,50	1,33
4	99,00	49,65	2,14	0,77	0,55
5	98,54	49,31	2,29	3,23	1,06
6	100,64	50,19	0,50	0,18	0,17
7	100,46	50,65	0,52	0,34	0,04
8	99,69	49,02	2,94	1,43	1,52
9	100,41	49,76	0,68	0,66	0,66
10	101,72	51,19	0,27	0,32	-0,14
11	100,33	50,41	1,59	0,90	1,17
12	100,03	50,09	0,46	0,13	0,18
13	99,07	49,46	2,10	1,03	1,14
14	97,98	49,07	0,15	0,07	0,02
15	99,58	49,70	1,76	0,69	1,09
16	98,71	49,43	6,22	1,15	2,05
17	100,82	49,98	1,52	0,43	0,29
18	99,95	50,14	2,26	3,14	2,47
19	100,57	50,42	3,04	2,27	1,68
20	100,36	49,72	1,95	1,24	1,01
Razem	1996,04	997,63	37,93	22,06	18,67

# Karta kontrolna T<sup>2</sup> Hottelinga

**Przykład 2. cd.** Dla wszystkich próbek wyznaczona została wartość statystyki:

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^T S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}}).$$

Dla pierwszej próbki otrzymano np.:

$$T^2 = 4 \left( \begin{bmatrix} 99,88 \\ 49,70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99,80 \\ 49,88 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1,90 & 0,93 \\ 0,93 & 1,10 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 99,88 \\ 49,70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99,80 \\ 49,88 \end{bmatrix} \right) \approx 0,2971.$$

*UCL* wyznaczono dla *fazy konfiguracji* przyjmując, że:  $k = 2$ ,  $n = 4$ ,  $m = 20$ .

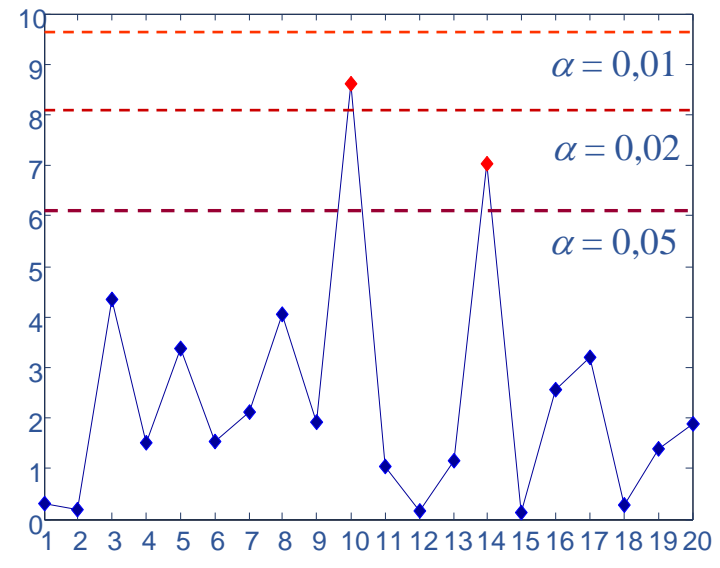
Dla  $\alpha = 0,05$  otrzymano  $F_\alpha = F_{F(k, mn-m-k+1)}^{-1}(1-\alpha) = F_{F(2,59)}^{-1}(0,95) \approx 3,1531$ ,

więc  $UCL = \frac{2 \cdot 19 \cdot 3}{59} \cdot 3,1531 \approx 6,0925$ .

- dla  $\alpha = 0,05$ :  $UCL = 6,0925$
- dla  $\alpha = 0,02$ :  $UCL = 8,0829$
- dla  $\alpha = 0,01$ :  $UCL = 9,6305$

Próbki 10.i 14., podobnie jak poprzednio, w zależności od przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  mogą znajdować się poza *UCL*.

Lp.	T <sup>2</sup>
1	0,2971
2	0,2007
3	4,3436
4	1,5038
5	3,3797
6	1,5451
7	2,1296
8	4,0642
9	1,9091
10	8,6156
11	1,0237
12	0,1680
13	1,1491
14	7,0279
15	0,1394
16	2,5470
17	3,2139
18	0,2654
19	1,3917
20	1,8744



## Interpretacja punktu poza linią kontrolną

wykorzystanie *jednowymiarowych kart kontrolnych* do oceny wkładu poszczególnych cech

(metoda nie pozwala na uwzględnienie wzajemnej korelacji zmiennych),

dekompozycja statystyki  $T^2$  na składniki pozwalające ocenić wkład poszczególnych zmiennych do całkowitego  $T^2$ :

$$d_i = T^2 - T_{(i)}^2$$

$T^2$  to wyznaczona dla wybranej próbki wartość statystyki  $T^2$

$T_{(i)}^2$  to wartość statystyki  $T^2$  wyznaczona dla wybranej próbki bez uwzględniania  $i$ -tej zmiennej

$d_i$  to różnica pozwalająca ocenić wpływ  $i$ -tej zmiennej na wartość statystyki  $T^2$ , za graniczną wartość  $d_i$  pozwalającą ocenić wkład  $i$ -tej zmiennej za znaczący można uznać np.

$$\chi_{\alpha}^2 = F_{\chi^2(1)}^{-1}(1 - \alpha)^*$$

\*G. C. Runger, F. B. Alt, D. C. Montgomery, *Contributors to a multivariate statistical process control chart signal*, Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol. 25(10), pp. 2203–2213

**Przykład 2. cd.** Dla próbki 14. wartość statystyki  $T^2$  została obliczona jako:

$$T^2 = 4 \left( \begin{bmatrix} 97,98 \\ 49,07 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99,80 \\ 49,88 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1,90 & 0,93 \\ 0,93 & 1,10 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 97,98 \\ 49,07 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99,80 \\ 49,88 \end{bmatrix} \right) \approx 7,0279.$$

a statystyki  $T_{(1)}^2$  i  $T_{(2)}^2$ :

$$T_{(1)}^2 = 4(49,07 - 49,88) \cdot 1,10^{-1} \cdot (49,07 - 49,88) \approx 2,3758,$$

$$T_{(2)}^2 = 4(97,98 - 99,80) \cdot 1,90^{-1} \cdot (97,98 - 99,80) \approx 6,9820,$$

więc dla próbki 14.:  $d_1 = T^2 - T_{(1)}^2 \approx 4,6522$ ,  $d_2 = T^2 - T_{(2)}^2 \approx 0,0459$ ,

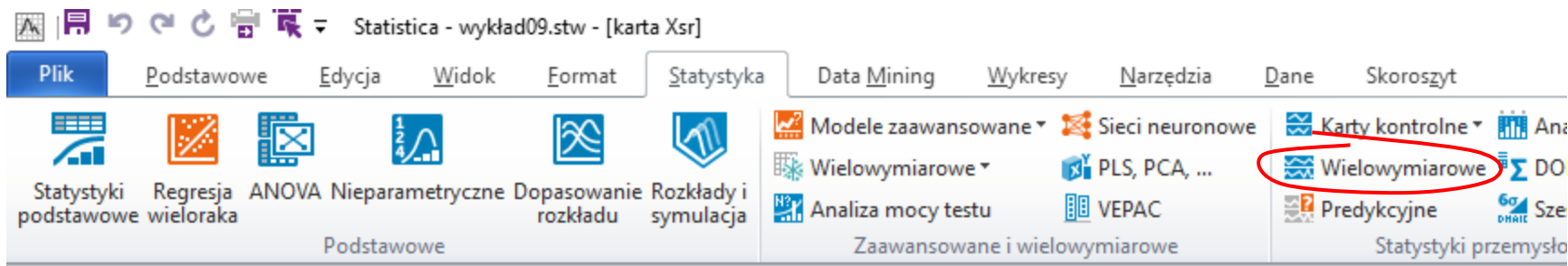
a dla próbki 10.:  $d_1 \approx 2,3672$ ,  $d_2 \approx 0,8405$ .

Po wyznaczeniu wartości granicznej  $\chi_\alpha^2 = F_{\chi^2(1)}^{-1}(1 - \alpha) \approx 3,8415$ , można już ocenić wkład poszczególnych zmiennych na wartość statystyki  $T^2$ :

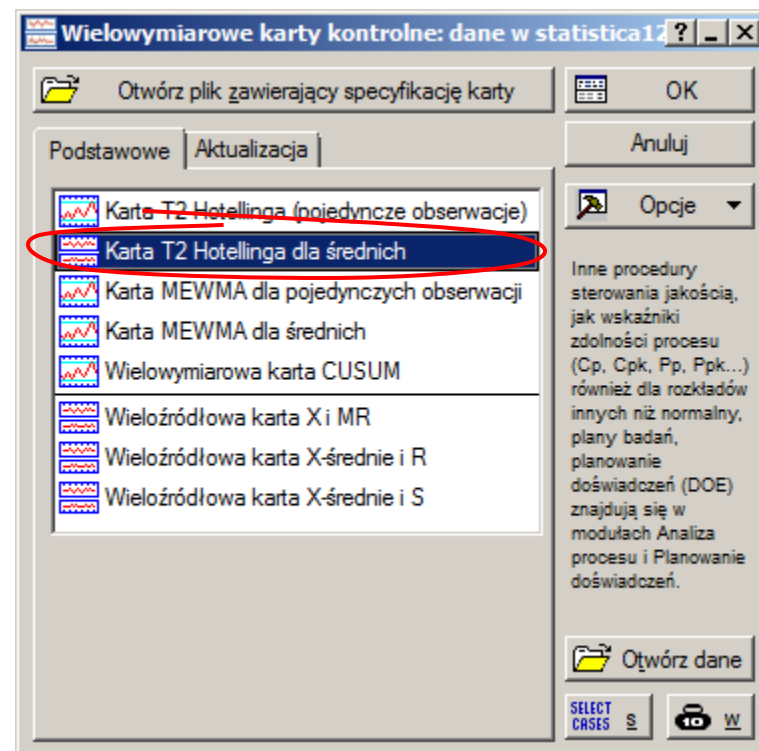
w próbce 14. odpowiedzialność za dużą wartość  $T^2$  spoczywa na 1. zmiennej,

w próbce 10. wkład 1. zmiennej jest większy, ale wartości  $d_1$  i  $d_2$  nie przekraczają wartości granicznej.

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)



	1	2
	X	Y
1	99,6209	49,494
2	98,5655	49,9102
3	100,5348	49,8249
4	100,7847	49,5874
5	100,3353	49,9286
6	98,2838	47,7233
7	102,2175	51,622



# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)

The image displays three overlapping dialog boxes from the Statistica software interface, illustrating the configuration of a T<sup>2</sup> control chart.

**Top Dialog: Zmienne dla karty T-kwadrat średnich Hotellinga i karty GV: dane w sta**  
This dialog is partially obscured. The 'Zmienne' (Variables) button is circled in red. Below it, the 'Stala liczność próbek' (Constant sample size) checkbox is checked. The 'Minimalna liczba po' (Minimum number of po) field is visible.

**Middle Dialog: Wybierz zmienną z pomiarami i zm. z identyfik. próbek**  
This dialog shows the selection of variables. The left list contains '1 - X' and '2 - Y'. The right list also contains '1 - X' and '2 - Y'. The 'OK' button is visible.

**Bottom Dialog: Zmienne dla karty T-kwadrat średnich Hotellinga i karty GV: dane w sta**  
This dialog is the main configuration window. The 'Zmienne' button is circled in red. The 'Pomiary (obserwacje):' (Measurements (observations)) is set to 'WSZYSTKIE' (ALL). The 'Identyfikatory próbek (kody):' (Sample identifiers (codes)) is set to 'brak' (none). The 'Stala liczność próbek:' (Constant sample size) checkbox is checked, and the value is set to 4. The 'Minimalna liczba pomiarów na próbkę:' (Minimum number of measurements per sample) is set to 2.

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)

T2 Hotelling średnich: dane w statist

Specyf. GV    Zbiory    Eksploracja

Karty    X(wielowym.)

Specyfikacja karty X(wielowymiarowe)

Zbiór << >>    Ogól próbek (domyślny)

Wartości oczekiwane

Obliczona     Użytkownika

Linia centralna: Obliczony wektor

Obliczona     Użytkownika

Sigma: Obliczona

Liczba próbek, z których obliczono kowariancję: 5

UCL:  $p = .0014$      $\alpha = 0,00135$

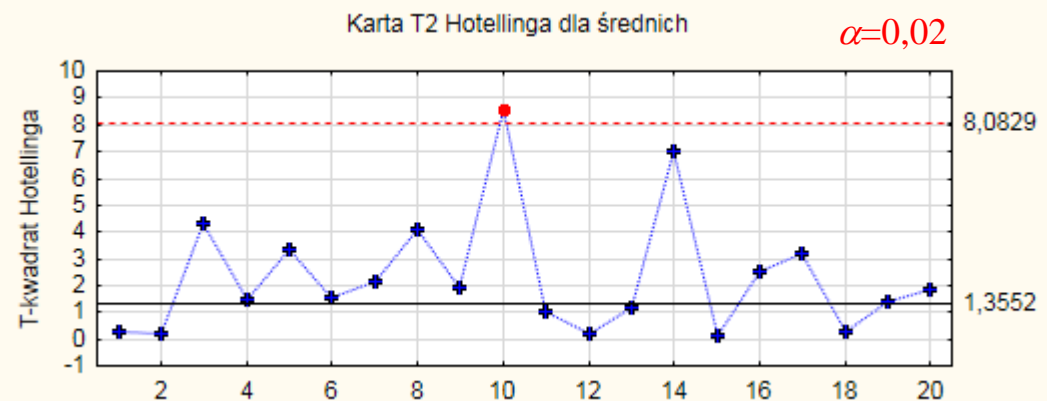
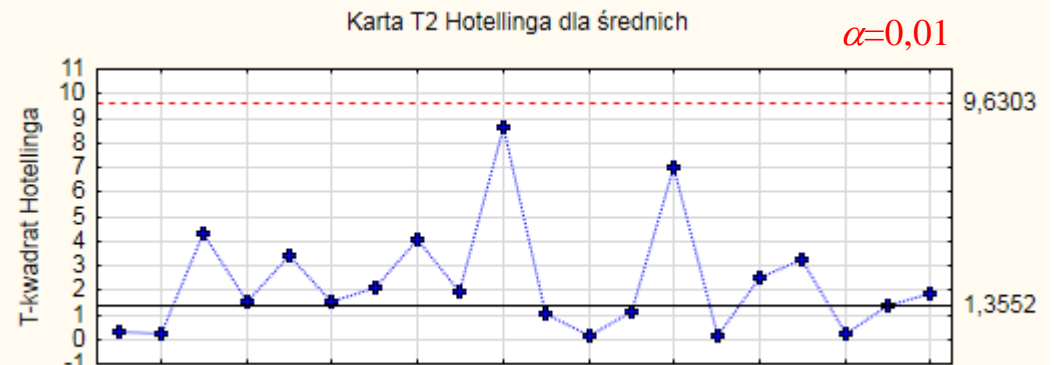
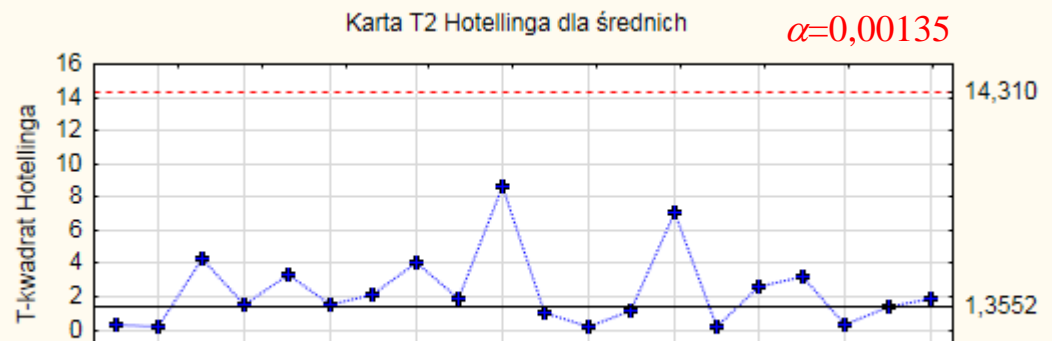
L. ostrzegawcze: Brak

Otwórz specyf.    Zapisz specyf...

Opcje...    Zapisz jako...    Anuluj

Eksploruj...    Aktualizuj

Grupami



domyślnie  $\alpha = 0,00135$   
(wykorzystywane do obliczenia UCL)



# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)

T2 Hotelling średnich: dane w statis

Specyf. GV   Zbiory   Eksploracja

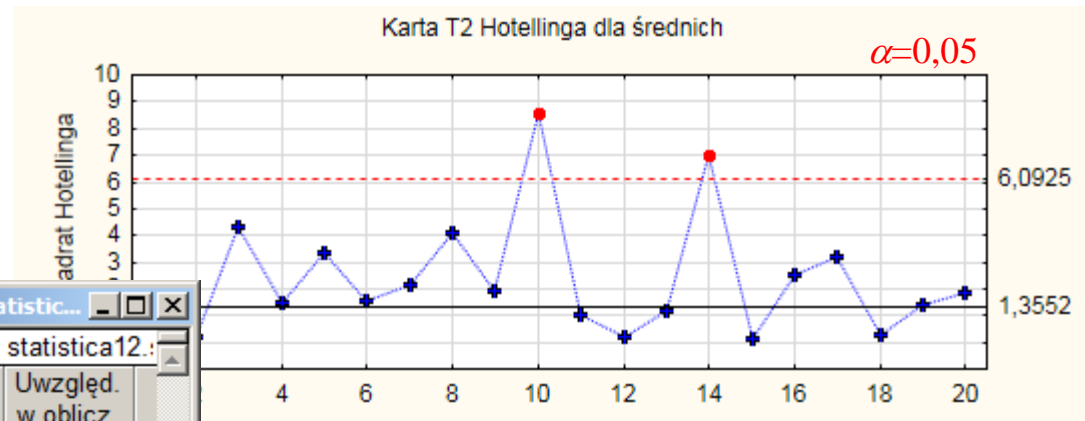
Karty   X(wielowym.)

Karty   **Statystyki opisowe**

Dodatkowe statystyki opisowe

Dane: Karta T2 Hotellinga dla średnich (dane w statistic...

Próbka	Linia Centralna	T-kwadrat	UCL p=0,05	Uwzględ. w oblicz.
1	1,355160	0,297093	6,092475	tak
2	1,355160	0,200675	6,092475	tak
3	1,355160	4,343566	6,092475	tak
4	1,355160	1,503831	6,092475	tak
5	1,355160	3,379670	6,092475	tak
6	1,355160	1,545059	6,092475	tak
7	1,355160	2,129631	6,092475	tak
8	1,355160	4,064173	6,092475	tak
9	1,355160	1,909119	6,092475	tak
10	1,355160	8,615638	6,092475	tak
11	1,355160	1,023660	6,092475	tak
12	1,355160	0,168024	6,092475	tak
13	1,355160	1,149061	6,092475	tak
14	1,355160	7,027923	6,092475	tak
15	1,355160	0,139442	6,092475	tak
16	1,355160	2,546958	6,092475	tak
17	1,355160	3,213851	6,092475	tak
18	1,355160	0,265390	6,092475	tak
19	1,355160	1,391711	6,092475	tak
20	1,355160	1,874404	6,092475	tak



Dla poziomu  $\alpha = 0,05$  wartości próbek 10. i 14. wskazują na istotną zmianę średniej procesu.

Wartości statystyki  $T^2$  dla wszystkich próbek można zobaczyć po wybraniu przycisku **Statystyki opisowe** na zakładce **Karty**.

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)

The image displays the STATISTICA software interface for configuring a T<sup>2</sup> control card. The main window, titled "T2 Hotelling średnich: dane w statis", shows the following configuration:

- Karty:** X(wielowym.)
- Specyf. GV:** Zbiory, Eksploracja
- Statistical Data:** T-kwadrat: 8,615638; Wariancja uog.: 0,069205; Numer próbki: 10; Nazwa: 10
- Uwzględnianie próbek:** Wybrane (10)
- Liczność próbki:** 4 (Sortowane wg próbek)
- Próbki wskazujące na rozregulowanie:** Poza granicami, konfiguracja
- Options:**  Tak; uwzględniaj w obliczeniach;  Nie uwzględniaj na wykres

The "Przyczyny" (Causes) section is highlighted with a red circle, showing "I2 rozłożone" (I2 decomposed). Below this, two charts illustrate the decomposition of the T<sup>2</sup> statistic:

- Wykres rozłożonego T-kwadrat dla Próbka: 14:** A bar chart showing a single bar for variable X with a value of approximately 4.65.
- Wykres rozłożonego T-kwadrat dla Próbka: 10:** A bar chart showing two bars: one for variable X (value ~2.37) and one for variable Y (value ~0.84).

The "Wykres rozł..." (Chart decomposed) dialog box is open, showing the "Edytor danych wykresu" (Chart data editor) option circled in red. The dialog displays a table of data for the chart:

	Nowy1	Plot 1
1	4,652163	
3	0,045915	

Another instance of the dialog box is shown for the second chart, with the following data:

	Nowy1	Plot 1
1	2,367241	
3	0,840545	

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (konfiguracja)

**T2 Hotelling średnich: dane w statis** [? \_ X]

Specyf. GV | Zbiory | Eksploracja

Karty | X(wielowym.)

Specyfikacja karty X(wielowymiarowe)

Zbiór << >> Ogól próbek (domyślny)

Wartości oczekiwane

Obliczona  Użytkownika

Linia centralna: Obliczony wektor

Obliczona  Użytkownika

Sigma: Obliczona

Liczba próbek, z których obliczono kowariancje: 5

UCL: p = ,0014

L. ostrzegawcze: Brak

Otwórz specyf. | Zapisz specyf...

Opcje... | Zapisz jako... | Anuluj

Eksploruj... | Aktualizuj

Grupami

**Podaj wektor średnich do wykorzystania w obliczeniach.** [? X]

Podaj wektor średnich do wykorzystania w obliczeniach.

	Wartość
X	99,80180
Y	49,88166

OK | Anuluj

**Podaj macierz kowariancji do wykorzystania w obliczeniach.**

Podaj macierz kowariancji do wykorzystania w obliczeniach. Elementów macierzy powyżej przekątnej nie trzeba podawać. Wartości nad przekątną zostaną zignorowane.

	X	Y
X	1,896651	#####
Y	0,933283	1,102926

OK | Anuluj

**T2 Hotelling średnich: dane w statis** [? \_ X]

Specyf. GV | Zbiory | Eksploracja

Karty | X(wielowym.)

Specyfikacja karty X(wielowymiarowe)

Zbiór << >> Ogól próbek (domyślny)

Wartości oczekiwane

Obliczona  Użytkownika

Linia centralna: Oczekiwane średnie

Obliczona  Użytkownika

Sigma: Użytkownika

Liczba próbek, z których obliczono kowariancje: 5

UCL: p = ,0014

L. ostrzegawcze: Brak

Otwórz specyf. | Zapisz specyf...

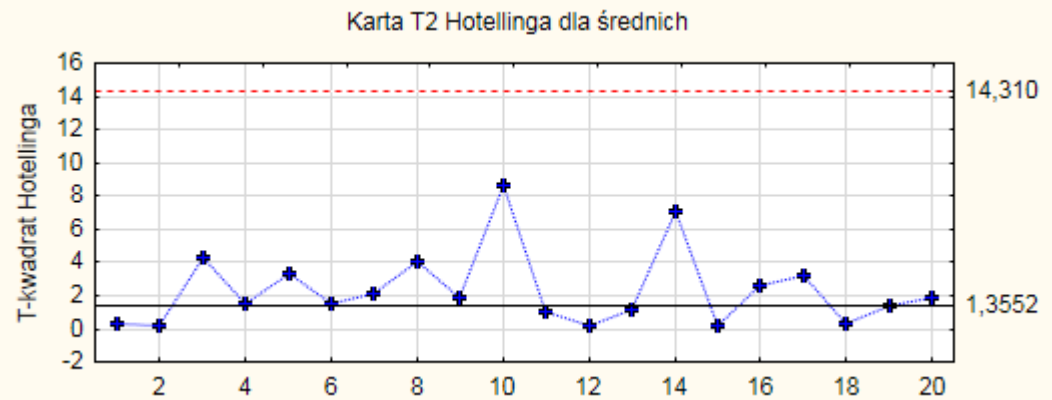
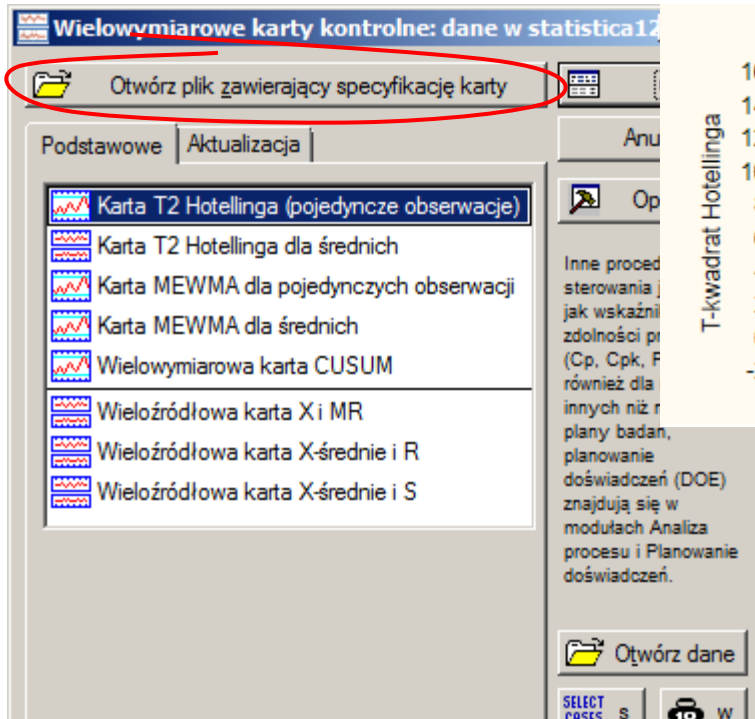
Opcje... | Zapisz jako... | Anuluj

Eksploruj... | Aktualizuj

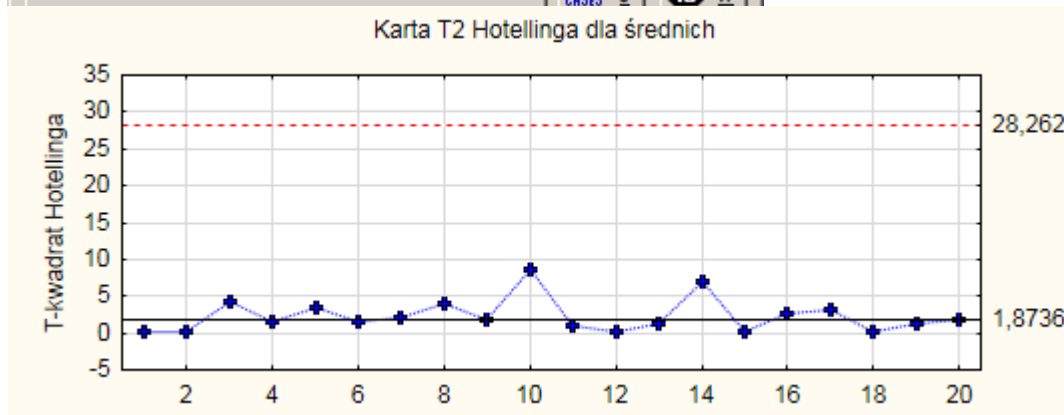
Grupami

Po skonfigurowaniu kartę należy zapisać pamiętując oszacowane wartości  $\mu$  i  $\Sigma$ .

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (monitorowanie)



Po zapisie karty i uaktywnieniu arkusza z nowymi danymi należy przejść do dalszego monitorowania procesu.



*Uwaga! granice karty dla fazy konfiguracji i monitorowania powinny być różne:*

$$UCL_k = 14,310,$$

$$UCL_m = \frac{21}{19} \cdot UCL_k = 15,817.$$

*STATISTICA ustaliła jednak:*

$$UCL_m = 28,262.$$

# STATISTICA – Karta kontrolna T<sup>2</sup> (monitorowanie)

Specyf. GV | Zbiory | Eksploracja

Karty X(wielowym.)

Specyfikacja karty X(wielowymiarowe)

Zbiór << >> Ogół próbek (domyślny)

Wartości oczekiwane

Obliczona  Użytkownika

Linia centralna: Oczekiwane średnie

Obliczona  Użytkownika

Sigma: Użytkownika

Liczba próbek, z których obliczono kowariancje: 5

UCL: p= ,0014

L. ostrzegawcze: Brak

Otwórz specyf. | Zapisz specyf.

Opcje... | Zapisz jako...

Eksploruj... | Aktualizuj

Grupami

Otrzyma różnica w wartości granicy  $UCL$  jest konsekwencją ustawienia na karcie domyślnej (równej 5) liczby próbek z której liczone są parametry karty. Po zmianie wartości na właściwą (tzn. 20) otrzymuje się wynik zgodny z oczekiwaniami.

