4. STATYSTYKA MATEMATYCZNA – HIPOTEZY PARAMETRYCZNE

Wynikiem działania testów statystycznych w STATISTICE są graniczne poziomy istotności *p–value*. Decyzję o **odrzuceniu** hipotezy H_0 można podjąć, gdy:

założony *poziom istotności* α **jest większy od** *poziomu granicznego p–value*.

O braku podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 świadczy:

poziom istotności α **mniejszy od** *granicznego poziomu istotności p–value*.

W przypadku kilku testów nie ma możliwości określenia wartości poziomu α (domyślnie przyjmowany jest poziom istotności $\alpha = 0{,}05$). Dodatkowo, część funkcji dostępnych w programie przeprowadza obliczenia dla testów dwustronnych. Dla statystyki testowej o symetrycznym rozkładzie wartości *p–value* dla testów jednostronnych można wyznaczyć z zależności: $p_1 = p_{12}/2$ i $p_2 = 1 - p_{12}/2$, gdzie: p_1, p_2, p_{12} są wartościami *p–value* odpowiednio dla testów jednostronnych i dla testu dwustronnego.

Dla ułatwienia, wyniki testów, które dla ustalonego poziomu istotności α wymagają odrzucenia hipotezy H_0, zaznaczane są na czerwono.

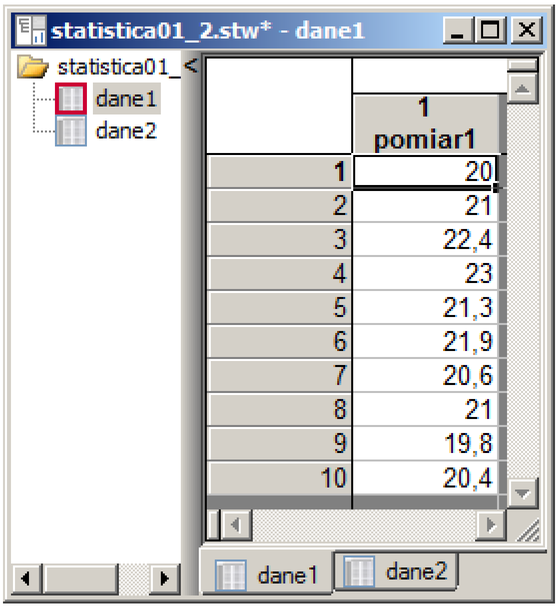
Weryfikacja hipotez parametrycznych możliwa jest w programie z poziomu okna **Statystyki podstawowe** (dostępne z menu głównego: **Statystyka/Statystyki podstawowe**). Dostępne są opcje:

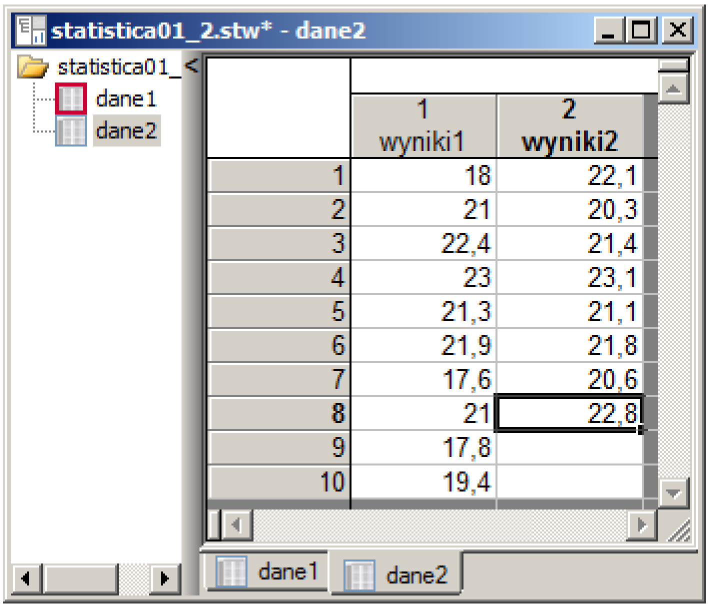
- **Test t dla pojedynczej próby**
  w części teoretycznej omówiony w punkcie 1.1: *Weryfikacja hipotez dla średniej (nieznane σ)*,
- **Test t dla prób niezależnych (wzgl. zmn.)**
  w części teoretycznej omówiony w punktach: 1.2.: *Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji (nieznane ale równe σ)* i 1.3. *Weryfikacja hipotez o równości wariancji*,
- **Test t dla prób niezależnych (wzgl. grup)**
  wykorzystywany do weryfikacji hipotezy o równości średnich w wybranych grupach jednej zmiennej,
- **Test t dla prób zależnych**
  wykorzystywany do weryfikacji hipotezy o równości średnich dla dwóch powiązanych czasowo prób – np. przed i po wprowadzeniu jakiejś modyfikacji,
- **Inne testy istotności**
  test dla różnicy pomiędzy współczynnikami korelacji,
  test dla różnicy pomiędzy dwoma średnimi (omówiony w części teoretycznej w punkcie 1.2.: *Weryfikacja hipotez o równości średnich dwóch populacji (nieznane ale równe σ)*)
  test dla różnicy pomiędzy dwoma wskaźnikami struktury (omówiony w części teoretycznej w punkcie 1.5: *Weryfikacja hipotez o równości frakcji dwóch populacji*).

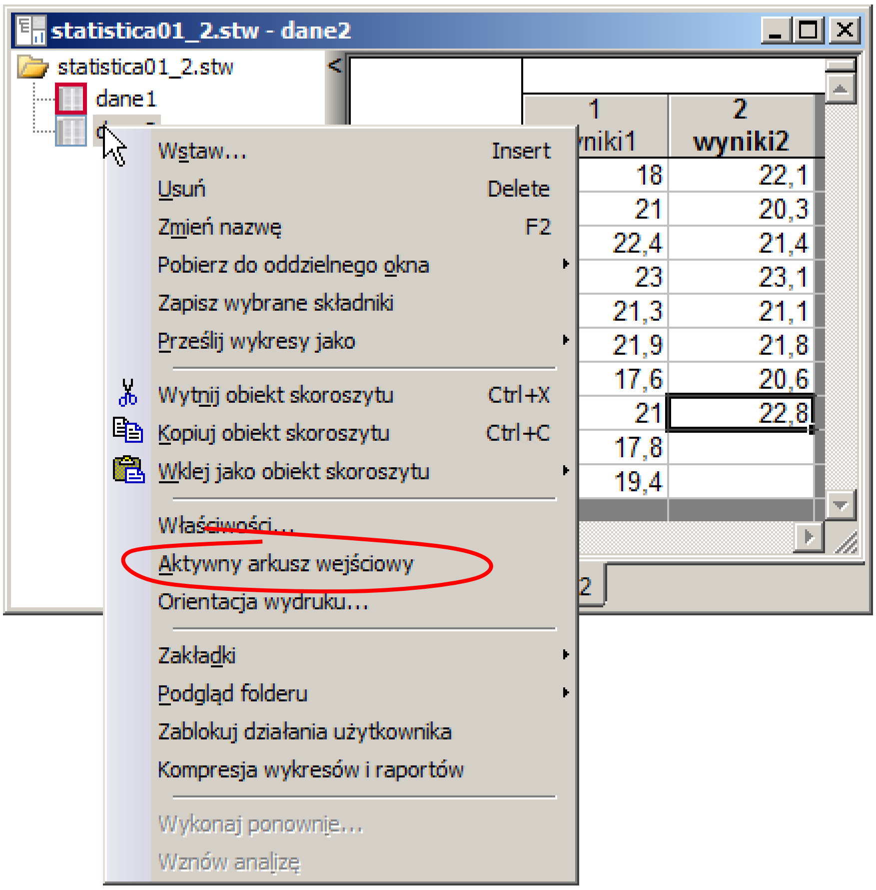
4.1. Przykłady

Kolejność omówionych tu przykładów odpowiada ich kolejność w części teoretycznej. Ze względu na brak w programie testów weryfikujących wybrane hipotezy część przykładów nie została dołączona.

W dołączonym na stronie skoroszycie umieszczono dwa arkusze z danymi: *dane1* i *dane2*. Arkusz aktywny jest wyróżniony w oknie skoroszytu na czerwono (na poniższym rysunku arkuszem aktywnym jest arkusz *dane1*). Aktywność arkusza jest istotna przy wykonywaniu obliczeń – wykonywane są one dla arkusza aktywnego. Arkusz można uaktywnić wybierając z menu podręcznego (dostępne pod prawym przyciskiem myszy) opcję **Aktywny arkusz wejściowy**.



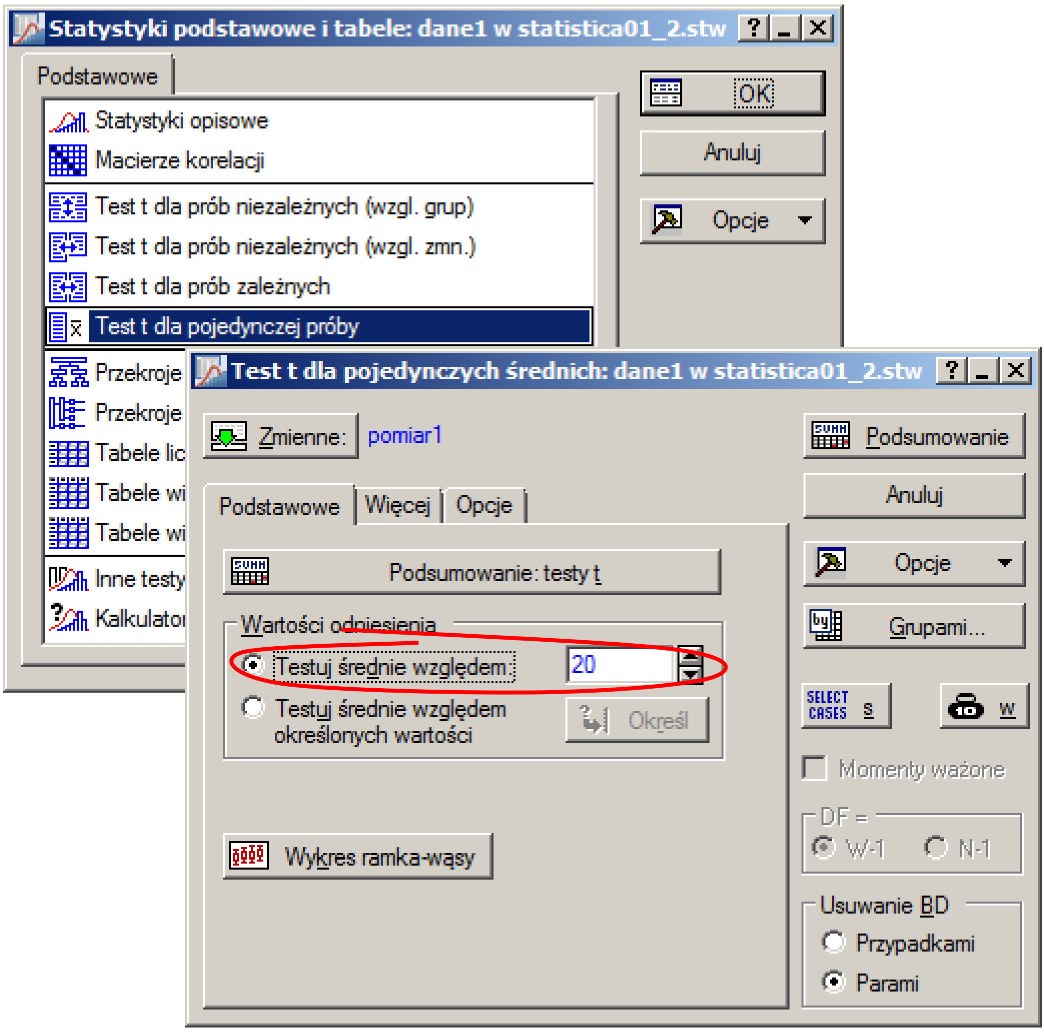




4.1.1. Test dla μ (nieznane σ)

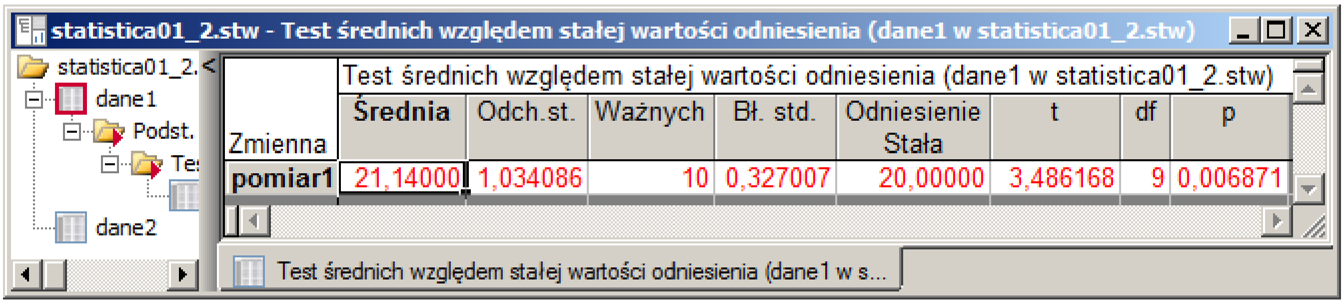
Automat produkuje detale o nominalnej długości 20. Wykonano 10 niezależnych pomiarów długości pewnego detalu i zapisano je w arkuszu *dane1* w zmiennej *pomiar1*. Czy obliczona średnia długość detalu równa 21,14 pozwala na stwierdzenie, że rzeczywista długość jest większa od nominalnej. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

Weryfikację hipotezy umożliwia **Test t dla pojedynczej próby**. W oknie testu należy wskazać zmienną dla której przeprowadzany jest test (arkusz *dane1* powinien zostać uaktywniony) oraz weryfikowaną poprzez hipotezę H_0 wartość średniej, tzn.: $H_0 : \mu = 20$.



Test jest realizowany jako dwustronny z domyślnym poziomem istotności $\alpha = 0{,}05$, więc interpretacja zwracanych przez program wyników musi uwzględniać przeliczenie na test jednostronny (hipoteza alternatywna zadaniu jest stawiana jako: $H_1 : \mu > 20$) oraz różny od domyślnego poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

Wyniki zwracane przez program pokazują, że gdyby w zadaniu hipoteza została postawiona jako: $H_1 : \mu \neq 20$ a poziom istotności $\alpha = 0{,}05$ to hipotezę zerową należałoby odrzucić na rzecz hipotezy alternatywne – wyróżnione na czerwono wartości testu.



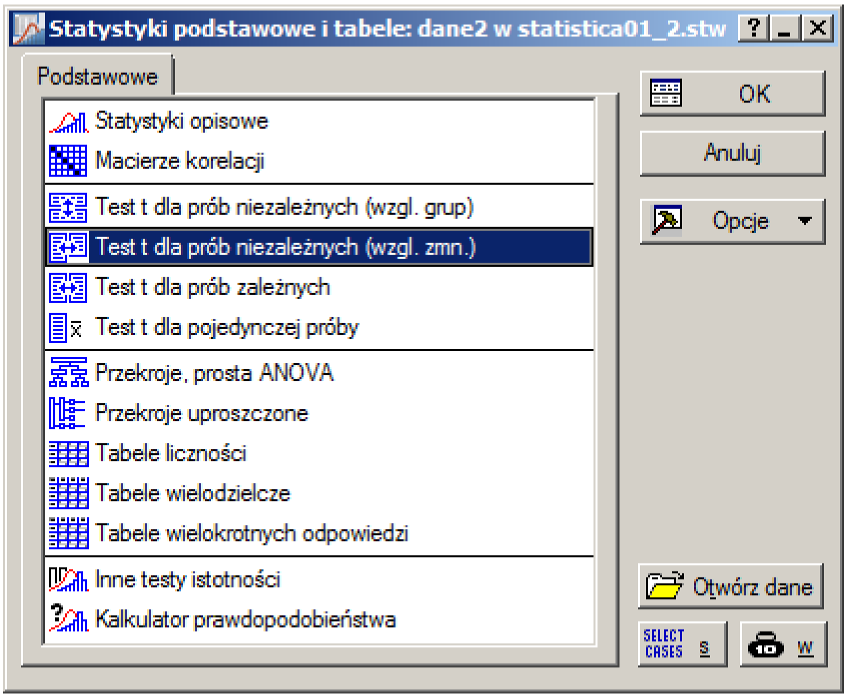
Widoczna w powyższym oknie wartość granicznego poziomu istotności $p = 0{,}006871$ została wyznaczona dla testu dwustronnego. *Test t* wykorzystuje statystykę testową o symetrycznym rozkładzie *t–Studenta*, wartość *p–value* dla testu jednostronnego można więc wyznaczyć w oparciu o *p–value* testu dwustronnego. Dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > 20$ otrzymuje się $p\text{–}value = 0{,}006871/2 \approx 0{,}0034$ (mniejszą z wartości *p–value* otrzymuje się dla hipotezy H_1 zgodnej ze średnią otrzymaną z próby, tzn. $21{,}14 > 20$, dla $H_1 : \mu < 20$, $p\text{–}value = 1 - 0{,}0034 = 0{,}9966$). Założony poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ **jest większy od** poziomu granicznego *p–value* $(0{,}01 > 0{,}0034)$ więc podobnie jak w przypadku analizowanego przez program testu dwustronnego, hipotezę zerową należy odrzucić na rzecz hipotezy o większej od nominalnej średniej długości detalu.

4.1.2. Test o równości średnich $\mu_1 = \mu_2$ (nieznane ale równe σ_1 i σ_2)

Wykonano dwie serie pomiarów długości detalu z jednakową dokładnością. Wyniki zapisano w arkuszu *dane2*, w zmiennych *wyniki1* i *wyniki2*. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że rozbieżność średnich jest nieprzypadkowa.

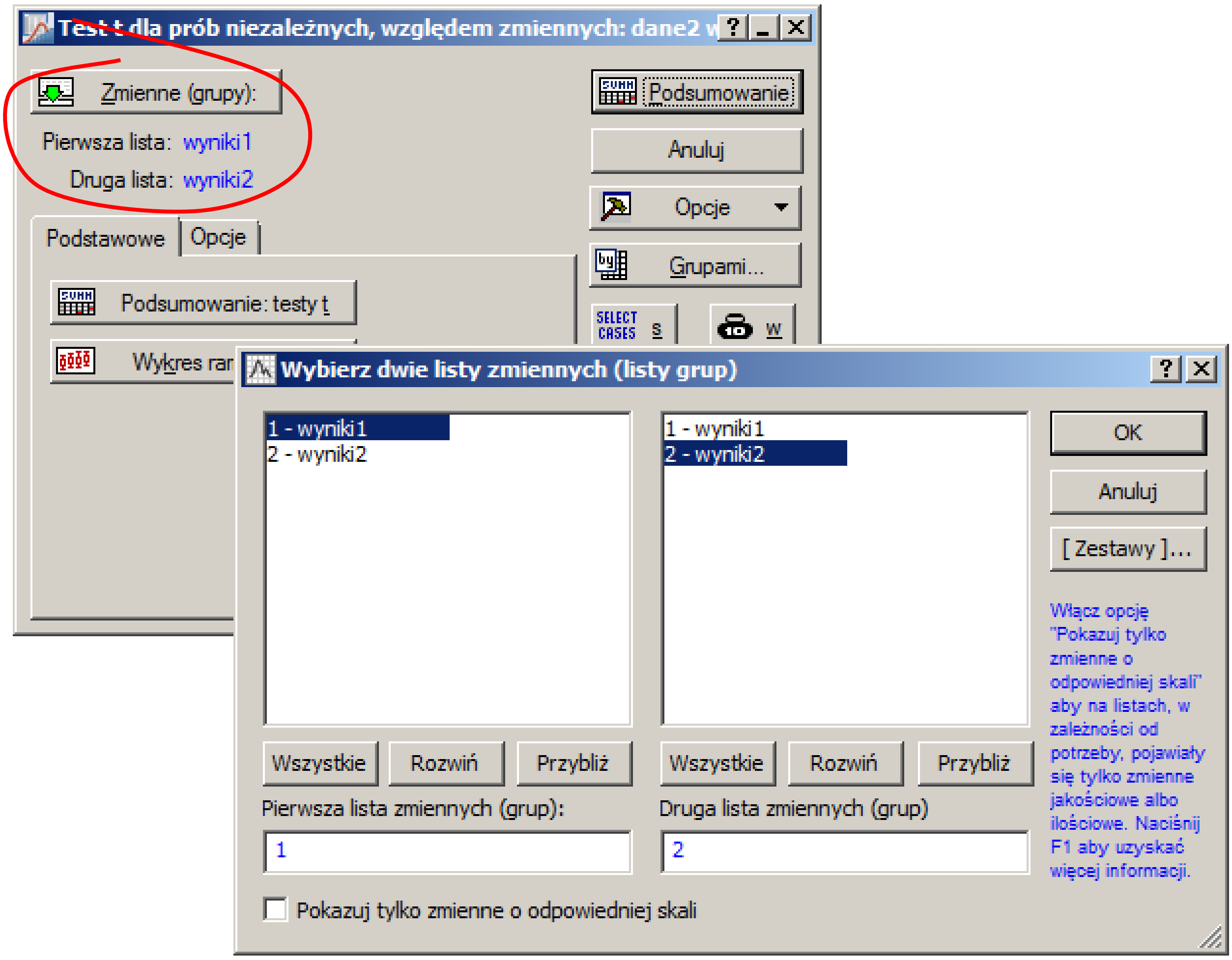
Weryfikację hipotezy można w programie przeprowadzić na dwa sposoby.

Sposób 1. **Test t dla prób niezależnych (wzgl. zmiennych)**

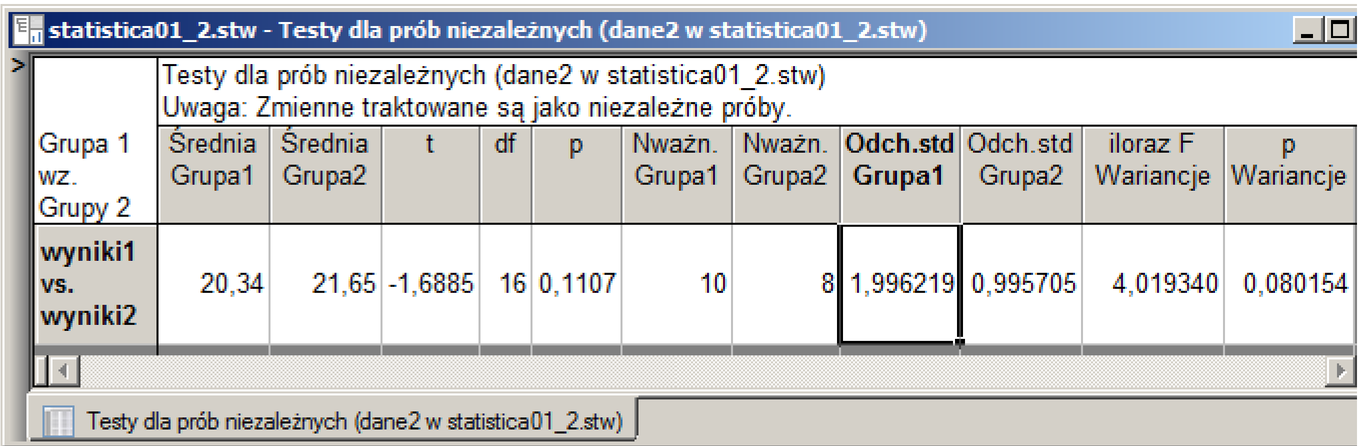


W oknie testu należy wskazać zmienne dla których przeprowadzany jest test (arkusz *dane2* powinien zostać uaktywniony). Po naciśnięciu przycisku **Zmienne (grupy)** wyświetlane jest okno pozwalające na wskazanie zmiennych dla których przeprowadzony zostanie test o równości średnich.

]



Wynik testu jest wyświetlany po naciśnięciu przycisków **Podsumowanie testy t** lub **Podsumowanie**.



Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa1	Średnia Grupa2	t	df	p	Nważn. Grupa1	Nważn. Grupa2	Odch.std Grupa1	Odch.std Grupa2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
wyniki1 vs. wyniki2	20,34	21,65	-1,6885	16	0,1107	10	8	1,996219	0,995705	4,019340	0,080154

Testy dla prób niezależnych (dane2 w statistica01_2.stw)

Test weryfikuje właściwie dwie hipotezy:

1. hipotezę o równości średnich dla nieznanych ale równych odchyleń standardowych,
2. hipotezę o równości wariancji.

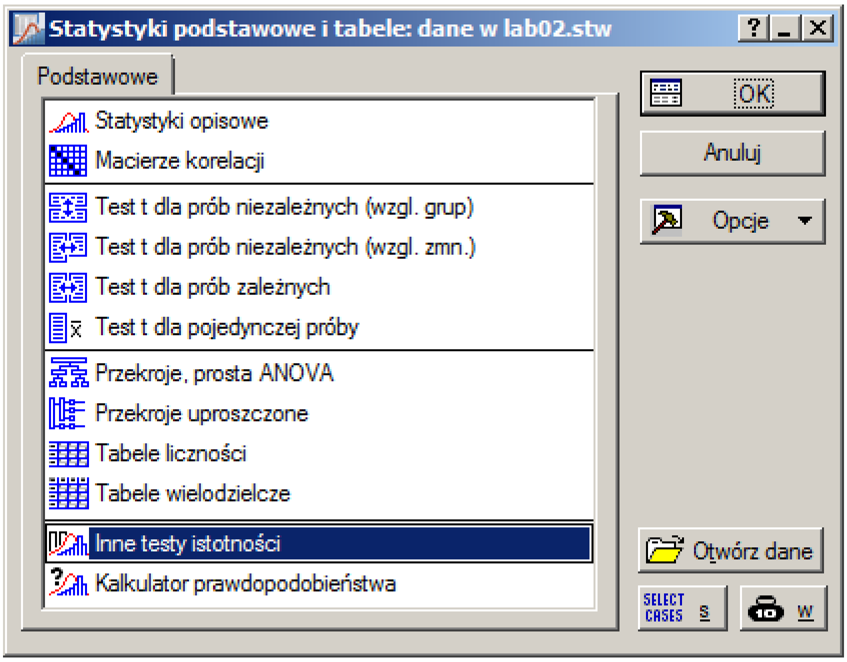
Hipoteza o równości średnich

Wyniki obliczeń dla hipotezy pierwszej wyświetlane są w kolumnach od **Średnia Grupa1** do **p**. Wartość **p** to graniczny poziom istotności dla testu dwustronnego. W rozważanym zadaniu hipoteza alternatywna miała postać $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ więc otrzymanej wartości *p–value* nie trzeba dodatkowo przeliczać. W przypadku realizacji testów jednostronnych *p–value* można wyznaczyć podobnie jak w punkcie poprzednim (statystyka testowa ma rozkład symetryczny, mniejsza z wartości *p–value* odpowiada hipotezie H_1 o relacji pomiędzy średnimi wynikającej z danych, w analizowanym przykładzie byłaby to hipoteza $H_1 : \mu_1 < \mu_2$). Ze względu na inny od domyślnego poziom istotności $\alpha = 0{,}01$ należy zweryfikować czy testowana hipoteza H_0 nie może być odrzucona (na co wskazują nie wyróżnione na czerwono wyniki obliczeń). Poziom istotności α jest **mniejszy od** granicznego poziomu istotności *p–value* $(0{,}01 < 0{,}1107)$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej – nie można więc stwierdzić, że średnie różnią się od siebie w sposób istotny.

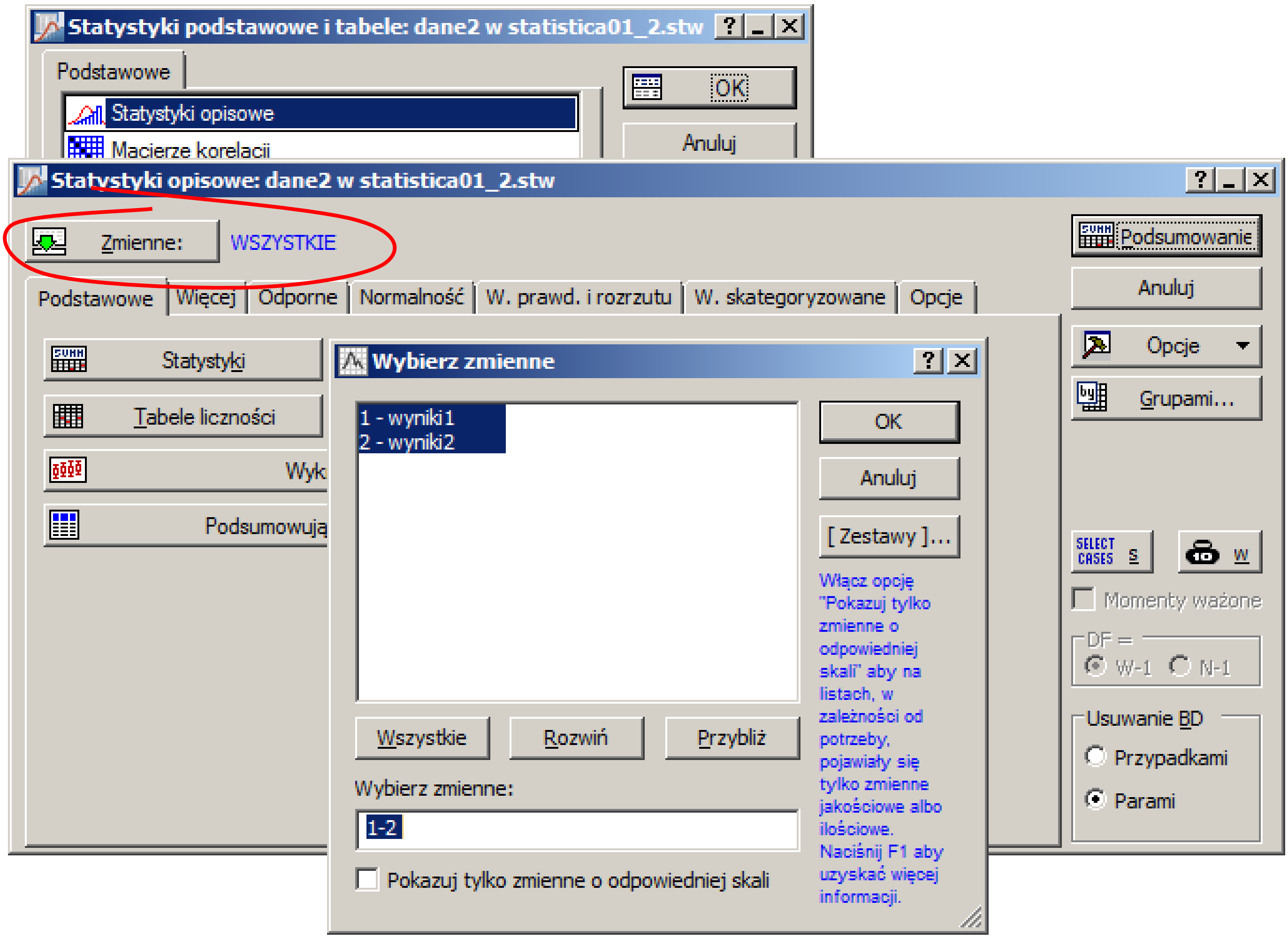
Hipoteza o równości wariancji

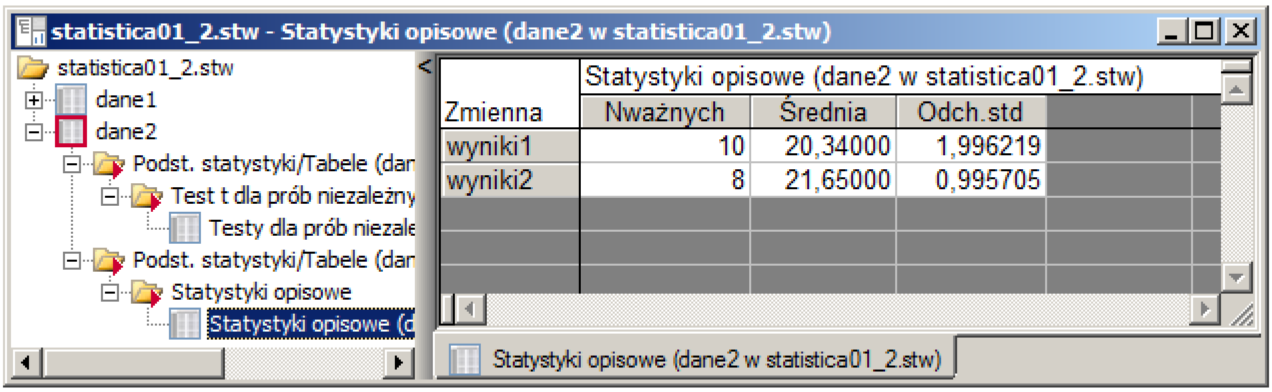
Podobnie wyniki testu dla hipotezy o równości wariancji (przeprowadzone dla testu dwustronnego i domyślnego poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$) wskazują, że wariancje różnią się od siebie w sposób istotny. W części teoretycznej dla wykorzystywanych w tym przykładzie danych rozważane było zadanie, w którym w na poziomie istotności α = 0,01 weryfikowano hipotezę o jednakowej wariancji obydwu serii pomiarów, ale hipoteza alternatywna była formułowana w postaci: $H_1 : s_1^2 > s_2^2$. Widoczna w oknie testu wartość granicznego poziomu istotności $p = 0{,}080154$ (kolumna **p Wariancje**) została wyznaczona dla testu dwustronnego, aby otrzymać wartość *p–value* dla testu jednostronnego należy otrzymany wynik podzielić przez 2, tzn. $p = 0{,}080154/2 = 0{,}040077$. Założony poziom istotności α = 0,01 *j*est **mniejszy od** granicznego poziomu istotności *p–value* $(0{,}01 < 0{,}040077)$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej – nie można więc stwierdzić, że wariancje różnią się od siebie w sposób istotny.

Sposób 2. **Inne testy istotności**

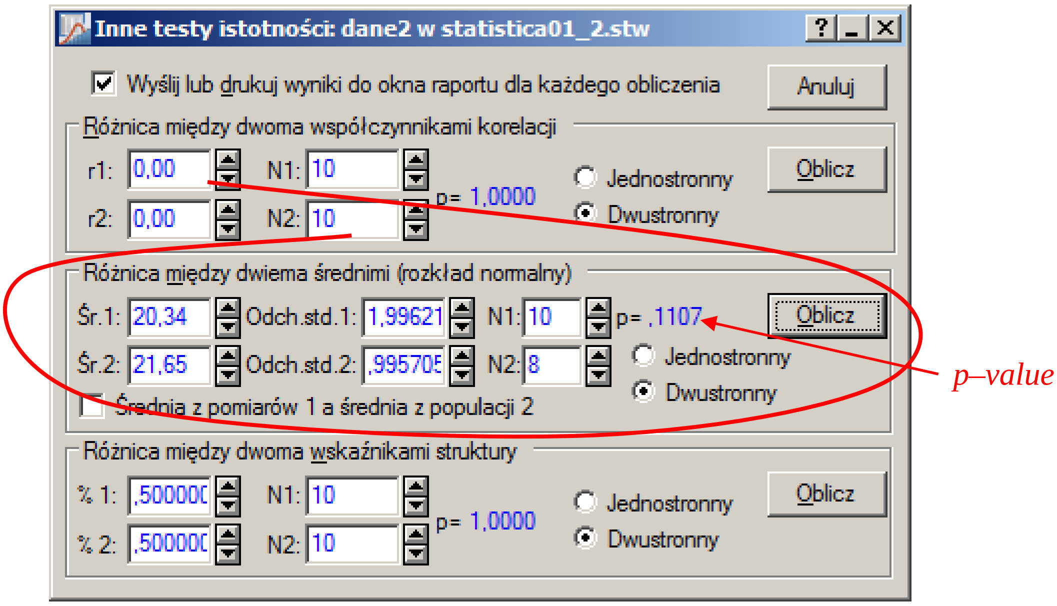


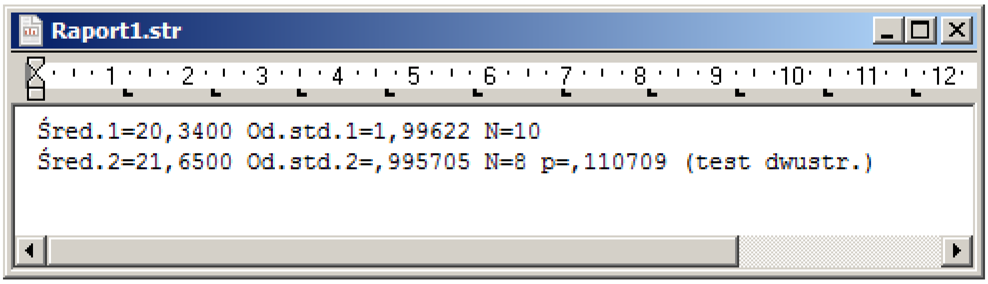
Weryfikacja hipotez z wykorzystaniem opcji **Inne testy istotności** wymaga od użytkownika wcześniejszego wyznaczenia średnich i odchyleń standardowych w badanych próbach. Obliczenia można wykonać posługując się wykorzystywanym wcześniej oknem **Statystyki opisowe**. Wskazując zmienne należy w tym przypadku wybrać obydwie zmienne arkusza *dane2*.





Otrzymane wyniki obliczeń należy teraz wprowadzić do okna testu o równości średnich. w oknie testu można też wybrać rodzaj testu: **Dwustronny/Jednostronny**. Wynikowy graniczy poziom istotności *p–value* wyświetlany jest w oknie, może te zostać wysłany do raportu.





Wynik obliczeń jest w tym przypadku identyczny jak poprzednio: poziom istotności α jest **mniejszy od** granicznego poziomu istotności *p–value* $(0{,}01 < 0{,}1107)$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej – nie można więc stwierdzić, że średnie różnią się od siebie w sposób istotny.

4.1.3. Test o równości wariancji

Test w programie przeprowadzany jest równocześnie z **Testem t dla prób niezależnych (wzgl. zmiennych)** – patrz punkt poprzedni.

4.1.4. Test o równości frakcji

Wysunięto hipotezę, że jakość produkcji pewnego wyrobu po wprowadzeniu nowej technologii nie uległa zmianie. Wylosowano 120 sztuk wyprodukowanych starą technologią i otrzymano 12 sztuk wadliwych, wśród wylosowanych 160 sztuk wyprodukowanych nową technologią i otrzymano 20 sztuk wadliwych. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ hipotezę o jednakowym wskaźniku braków przy produkcji obydwoma metodami.

Test można przeprowadzić z poziomu okna **Inne testy istotności**. Do weryfikacji hipotezy o równości frakcji konieczne jest podanie procentów wadliwych sztuk w obydwu porównywanych próbach. Wskaźniki te wynoszą odpowiednio: $p_1 = 12/120 = 0{,}1$ i $p_2 = 20/160 = 0{,}125$. Po wprowadzeniu danych do okna testu okazuje się, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej – nie można stwierdzić, że średnie nowa technologia przyczynia się do zmiany wskaźnika braków (poziom istotności α jest **mniejszy od** granicznego poziomu istotności *p–value* $\left(0{,}01 < 0{,}5153\right)$).