BUDOWNICTWO

Elementy logiki

1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podaj ich wartość logiczną.

   (a) Kraków jest stolicą Polski.

   (b) Czy dziś jest sobota?

   (c) Podaj mi tę książkę.

   (d) Dziś jest ładna pogoda.

   (e) $a^2 + b^2 = c^2$.

   (f) 13 jest liczbą pierwszą.

   (g) 144 jest kwadratem liczby naturalnej.

   (h) Na każdym czworokącie można opisać okrąg.

   (i) Cyfra 9 jest dzielnikiem liczby 333333333.

   (j) Trójkąt równoramienny jest równoboczny.

2. Zapisz podane zdania używając funktorów zdaniotwórczych. Czy są one prawdziwe?

   (a) W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe lub suma kątów w trójkącie jest równa π.

   (b) Kwadrat ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.

   (c) Suma kątów w trójkącie jest równa π i trójkąt ma dwa kąty proste.

   (d) Liczba -3 jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 3 jest ujemna.

   (e) Jeżeli suma kątów w trójkącie jest równa π, to trójkąt ma dwa kąty proste.

   (f) Jeżeli suma kątów w trójkącie jest równa 2π, to w czworokącie suma kątów jest równa π.

   (g) Suma kątów w trójkącie jest równa π wtedy i tylko wtedy, gdy suma kątów w czworokącie jest równa 2π.

3. Podaj zaprzeczenie poniższych zdań. Oceń wartość logiczną każdego ze zdań i jego zaprzeczenia.

   (a) W każdym trójkącie suma kątów wewnętrznych jest równa 2π.

   (b) W każdym trójkącie suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

   (c) Istnieją trzy punkty płaszczyzny, przez które nie da się poprowadzić jednej prostej.

4. Sprawdź, czy poniższe wyrażenia są tautologiami.

   (a) $p \vee (\sim p)$,

   (b) $(\sim p \to q) \to p$,

   (c) $[\sim (\sim p)] \leftrightarrow p$,

   (d) $\sim [p \wedge ((\sim p) \wedge q)]$,

   (e) $(p \to q) \to q$,

   (f) $(p \vee q) \wedge [(\sim q) \vee r] \to (p \vee r)$,

   (g) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$,

   (h) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

   (i) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$,

   (j) $[(\sim p) \to q] \leftrightarrow [(\sim q) \to p]$,

   (k) $[\sim (p \wedge q)] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$,

   (l) $[\sim (p \vee q)] \leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$.

5. Zapisz słownie zdania:

(a) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \ln x^2 = 2\ln x$,

(b) $\forall_{x\in(0,\infty)} \quad \ln x^2 = 2\ln x$,

(c) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad 2^x > 0$,

(d) $\exists_{\alpha\in[-1,1]} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha$,

(e) $\exists_{x\in\mathbb{Z}} \quad \sqrt{x} = -4$,

(f) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad x > 0$,

(g) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \quad x^2 + y^2 > 0$,

(h) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} \quad x + y = 0$,

(i) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \quad x + y = 0$,

(j) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \quad x + y = 0$,

(k) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} \quad x + y = 0$,

(l) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Które z powyższych zdań są prawdziwe?

6. Zapisz zdania używając symboli kwantyfikatorów i oceń ich wartość logiczną.

(a) Równanie $x^2 + x - 2 = 0$ ma pierwiastek dodatni.

(b) Równanie $x^2 - 9 = 0$ ma rozwiązanie rzeczywiste.

(c) Wartość bezwzględna dowolnej liczby różnej od zera jest dodatnia.

(d) Dowolna liczba naturalna przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

(e) Od każdej liczby rzeczywistej znajdziemy liczbę mniejszą.

(f) Dla dowolnych liczb x_1, x_2 spełniających warunek $x_1 < x_2$ zachodzi nierówność $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

7. Niech A oznacza zbiór liczb nieparzystych, a B zbiór liczb postaci $2n+1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

(a) Jaka relacja zachodzi między tymi zbiorami?

(b) Wyznacz $A \cup B$ oraz $A \cap B$.

8. Dla podanych zbiorów

(a) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $\quad B = \{4, 8, 12, 16\}$, $\quad C = \{1, 5, 8, 9, 13, 17\}$,

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$, $\quad B = [-2, 2]$, $\quad C = \{2\}$,
wyznacz

i. $A \cup B$,

ii. $A \cap B \cap C$,

iii. $(A \setminus B) \cup C$,

iv. $(C \cap B) \cup A$,

v. $(C \setminus B) \cap A$,

vi. $(A \setminus B) \cap A$.

9. Niech A będzie zbiorem punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których $x^2 + y^2 < 1$, B zbiorem punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $x^2 + y^2 \leqslant 4$, a C zbiorem punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których $(x-1)^2 + y^2 < 1$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$.