

BUDOWNICTWO
Układy równań liniowych

1. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Wyznacz A^{-1} i rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 5z = -4 \end{cases} .$$

2. Czy podane układy są układami Cramera? Jeśli tak, to wyznacz ich rozwiązania, korzystając ze wzorów Cramera.

$$(a) \begin{cases} x + 3y + 4z = 3 \\ 3x - y + 3z = 11 \\ 4x + y + 2z = 6 \end{cases} ,$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + 5z = 9 \\ 3x + y + 3z = 9 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases} .$$

3. Wyznacz (o ile istnieją) rozwiązania układów równań liniowych:

$$(a) \begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases} ,$$

$$(h) \begin{cases} 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases} ,$$

$$(b) \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 6x + 7y = 0 \end{cases} ,$$

$$(i) \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} ,$$

$$(c) \begin{cases} x - y = 8 \\ -x + y = -8 \end{cases} ,$$

$$(d) \begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases} ,$$

$$(j) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases} ,$$

$$(e) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} ,$$

$$(k) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases} ,$$

$$(f) \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 21 \\ 5z - 2y - 3z = -12 \end{cases} ,$$

$$(l) \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} .$$

$$(g) \begin{cases} 2x - 12y + 6z = 0 \\ 5x - 30y + 15z = 0 \end{cases} ,$$

4. W zależności od parametru a rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + y - az = -1 \\ ax + y + az = 4 \\ 4x + y + 4z = a \end{cases} .$$

5. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ układ równań:
$$\begin{cases} x + 2y - az = -1 \\ bx + y + az = 4 \\ 4x + y + 2z = b \end{cases}$$

- (a) ma w \mathbb{R}^3 jedno rozwiązanie,
 - (b) ma w \mathbb{R}^3 nieskończenie wiele rozwiązań,
 - (c) nie ma w \mathbb{R}^3 rozwiązań?
6. Murarz ustawił cegły w szeregach jedna za drugą. Gdyby zmniejszył liczbę szeregów o 5 i w każdym szeregu zmniejszyłby liczbę cegieł o 4, to liczba cegieł zmniejszyłaby się o 62. Gdyby zaś zwiększył liczbę szeregów o 2 i liczbę cegieł w każdym szeregu o 3, to wszystkich cegieł byłoby o 50 więcej niż jest teraz. W ilu szeregach murarz ustawił cegły? Ile cegieł było w każdym z szeregów?
7. W trapezie $ABCD$, $\sphericalangle A = 2\alpha$, $\sphericalangle B = \beta - \alpha$, $\sphericalangle C = \beta + 3\alpha$, $\sphericalangle D = 150^\circ$. Jakie miary mają kąty tego trapezu?
8. Liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 10, a suma jej cyfr jest równa 12. O jakiej liczbie mowa, jeśli jej cyfra setek jest o 2 większa od cyfry dziesiątek?
9. W liczbie trzycyfrowej, cyfra dziesiątek jest równa 8. Suma dwóch skrajnych cyfr jest równa cyfrze środkowej. Jaka to liczba, jeśli wiadomo, że zapisując jej cyfry w odwrotnej kolejności dostaniemy liczbę trzycyfrową o 198 większą od niej?
10. Na parkingu samochodowym stało 65 samochodów. Były to wyłącznie mercedesy, subaru i audi. Mercedesów i audi było o 1 więcej niż subaru, a samych mercedesów o 15 więcej niż audi. Ile sztuk samochodów każdego typu stało na tym parkingu?
11. Dodając do siebie 3 liczby naturalne otrzymano 84. Jakie to liczby, jeśli pierwsza stanowi 75% drugiej, a trzecia jest sumą pierwszej i drugiej?
12. Bukiet kwiatów składa się z róż w trzech kolorach: czerwonych, różowych, żółtych. Wszystkich razem jest 34. Róż czerwonych jest o 20% więcej niż żółtych, a różowych jest o 60% więcej niż czerwonych. Ile róż poszczególnych kolorów jest w tym bukiecie?