

BUDOWNICTWO

Całka oznaczona wraz z zastosowaniami

1. Obliczyć podane całki oznaczone

$$(a) \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+2x+1} dx,$$

$$(b) \int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx,$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx,$$

$$(d) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx,$$

$$(e) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx,$$

$$(f) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$(g) \int_0^1 x \arctg x dx,$$

$$(h) \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx,$$

$$(i) \int_{-1}^1 x e^{2x} dx.$$

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego

(a) parabolą $y = x^2$ i prostą $2x - y + 3 = 0$.

(b) krzywymi $y = e^{-x}$, $y = e^{3x}$, $y = \sqrt{e}$.

(c) prostymi $y + x = 4$, $y + x = 8$, $y = 2$, $y = 6$.

3. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego parabolami $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ i prostą $y = 3x$.

4. Obliczyć długość łuku krzywej

(a) $f(x) = \ln \sin x$ w przedziale $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

(b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ w przedziale $[1, 3]$.

5. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox

(a) krzywej $3y - x^3 = 0$, $0 \leq x \leq 1$, wraz z rzędną końcową w punkcie $x = 1$.

(b) sinusoidy $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

Wskazówka do podpunktu (b): $\int \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C$

6. Zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$(b) \int_0^{\sqrt{2/3}} \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} dx,$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx,$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx,$$

$$(e) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx,$$

$$(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$