BUDOWNICTWO

Ciągi liczbowe

1. Wypisz kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), którego wyraz ogólny dany jest wzorem:

   (a) $a_n = \frac{1}{n}$, (b) $a_n = \frac{n+1}{n}$, (c) $a_n = (-2)^n$, (d) $a_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

2. Znając kilka początkowych wyrazów danego ciągu, wyznacz wzór na jego wyraz ogólny:

   (a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$, (c) $0, 2, 0, 2, \ldots$,
   (b) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$, (d) $-1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

3. Zbadaj monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

   (a) $a_n = \frac{2}{n}$, (c) $a_n = (-2)^n$, (e) $a_n = 3^n$,
   (b) $a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$, (d) $a_n = \ln n$, (f) $a_n = \frac{n+1}{n!}$.

4. Zbadaj ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, (c) $a_n = \sqrt{n+1}$, (e) $a_n = \frac{3^n}{n!}$,
   (b) $a_n = \frac{2^n}{2^n+1}$, (d) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, (f) $a_n = \ln(n+1)$.

5. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

   (a) $a_n = \frac{2n-3}{4-4n}$, (d) $a_n = \frac{6n^3+n-3}{2n^3+n^2-2n-1}$, (g) $a_n = \frac{n^2-1}{2-n^3}$,
   (b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-2}{4n+3}$, (e) $a_n = \frac{\sqrt{n^5+1}}{2n^2-5}$, (h) $a_n = \frac{(3n-1)^2}{(n-1)(1-3n)}$,
   (c) $a_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$, (f) $a_n = \sqrt{\frac{3n-2}{n+5}}$, (i) $a_n = \frac{\sqrt{9n^2+4n}+2}{\sqrt[3]{8n^3}-6}$.

6. Oblicz graniceę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

   (a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, (c) $a_n = n - \sqrt{n^2+5n}$,
   (b) $a_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - \sqrt{3}n$, (d) $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$.

7. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

   (a) $a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$, (b) $a_n = \frac{4\cdot 3^{2n}-7}{5\cdot 9^n+2}$, (c) $a_n = 7^n - 6^n - 5^n$.

8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 4^n + 6^n}$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{14n^2 - 2n + 6}$,

(c) $a_n = \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}$,

(d) $a_n = \sqrt[n]{5^n + \cos^2 n + 3^n}$,

(e) $a_n = \sqrt[n]{2n^4 + n^2 + 1}$,

(f) $a_n = \frac{3n + (-1)^n}{4+2n}$.

9. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$,

(b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$,

(c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{6n}$,

(d) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$,

(e) $a_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^n$,

(f) $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+4}\right)^{n-3}$,

(g) $a_n = n(\ln n - \ln(n+4))$,

(h) $a_n = n(\ln(n+3) - \ln n)$.

10. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

(a) $a_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$,

(b) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$,

(c) $a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_4 n}}$,

(d) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$,

(e) $a_n = \frac{1+3+5+...+(3n-1)}{2+4+6+...+2n}$,

(f) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.