

BUDOWNICTWO

Granica funkcji i ciągłość funkcji

1. Wykorzystując granice jednostronne sprawdź, czy istnieje granica podanej funkcji we wskazanym punkcie:

a) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$,

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x_0 = -1$,

c) $f(x) = \frac{x^2+6x-7}{|x-1|}$, $x_0 = 1$,

d) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = 0$.

2. Oblicz podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{x^3-27}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-1}$,

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x^2+x+2}{x^4-1}$,

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^3-2x^2+3x+54}$,

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+1}$.

3. Oblicz podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+x+4} + 2x)$,

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$,

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$.

4. Oblicz podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$.

5. Oblicz podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$,

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{3x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$,

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$,

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

6. Zbadaj ciągłość funkcji f określonej wzorem

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dla } x < 1, \\ 3, & \text{dla } x = 1, \\ 2-x, & \text{dla } x > 1, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 4, & \text{dla } x \leq 0, \\ \cos x + 3, & \text{dla } x > 0. \end{cases}$

7. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją o wzorze

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{dla } x < -2, \\ 3, & \text{dla } x = -2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1, & \text{dla } -2 < x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{dla } 0 < x \leq \frac{3}{2}, \\ -\frac{2}{2x-3}, & \text{dla } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie punkty nieciągłości podanej funkcji i określ ich rodzaj. Naszkicuj wykres funkcji f .