

BUDOWNICTWO

Liczby zespolone

1. Wykonaj podane działania:

$$\begin{array}{ll} (a) (-2 + 3i) + (7 - 8i), & (b) (1 - 3i) + (4 - 5i), \\ (c) (1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i), & (d) (4i - 3) - (1 + 10i), \\ (e) (-2 + 3i) \cdot (7 - 8i), & (f) (1 + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{3} - 6i), \\ (g) \frac{2-3i}{5+4i}, & (h) \frac{2+3i}{1+i}, \\ (i) z \cdot \bar{w}, \frac{z-w}{\bar{z}+\bar{w}}, \frac{\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}w}{z+w}, \text{ dla } z = 5 - 2i, w = 3 + 4i. \end{array}$$

2. Przedstaw na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniających podane warunki:

$$\begin{array}{ll} (a) |z| \leq 2, & (b) |z - i| \leq 1, \\ (c) |z - (4 + 3i)| > 2, & (d) \operatorname{Re}z = \operatorname{Im}z, \\ (e) 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |z| < 3, & (f) 0 < \operatorname{Re}z < 3, \\ (g) \operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0, & (h) 1 \leq |z - i| \leq 2. \end{array}$$

3. Znajdź $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające podane równania:

$$(a) x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i, \quad (b) (2 + yi)(x - 3i) = 7 - i.$$

4. Podane liczby zespolone przedstaw w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{array}{ll} (a) z = 2i, & (b) z = 1 + i, \\ (c) z = \sqrt{3} + i, & (d) z = -6 + 6i, \\ (e) z = -5 - 5\sqrt{3}i, & (f) z = \sqrt{3} - i. \end{array}$$

Podaj postać algebraiczną i trygonometryczną liczby sprzężonej do każdej z podanych liczb zespolonych.

5. Wykorzystując wzory na mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej oblicz wartości podanych wyrażeń:

$$(a) (1 - i)(\sqrt{3} + i), \quad (b) \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}.$$

6. Oblicz wartości podanych wyrażeń:

$$\begin{array}{ll} (a) (1 - i)^{12}, & (b) (1 + \sqrt{3}i)^8, \\ (c) (\sqrt{3} + i)^{22} \cdot (1 + i)^6, & (d) (-3 - 3i)^5 \cdot (\sqrt{3} - i)^9, \\ (e) \frac{(1-i)^7}{(-4+4i)^5}, & (f) \left(\frac{-1+i}{-1+\sqrt{3}i} \right)^6. \end{array}$$

7. Oblicz i przedstaw na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

$$\begin{array}{ll} (a) \sqrt{-1 + \sqrt{3}i}, & (b) \sqrt[3]{i}, \\ (c) \sqrt[4]{16}, & (d) \sqrt[5]{-32i}, \\ (e) \sqrt[6]{-64}, & (f) \sqrt[3]{1 + i}. \end{array}$$