BUDOWNICTWO

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

1. Sprawdź, czy istnieje pochodna funkcji f o podanym wzorze we wskazanym punkcie x_0:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x_0 = 1,$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}, \quad x_0 = 3,$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 1 \\ 3x^2, & x < 1 \end{cases},$

d) $f(x) = x^2 + |x^2 - 4|, \quad x_0 = 2.$

Czy funkcja f jest różniczkowalna we wskazanym punkcie x_0?

2. Korzystając z odpowiednich twierdzeń, oblicz pochodną funkcji f o podanym wzorze:

a) $f(x) = 6x^3 + 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2},$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 3e^x - 4\ln x,$

c) $f(x) = \sin x - \cos x,$

d) $f(x) = x^3 e^x,$

e) $f(x) = (10x^3 - 2x + 7)\ln x,$

f) $f(x) = \sin x \cos x,$

g) $f(x) = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7},$

h) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\mathrm{tg}x},$

i) $f(x) = \sqrt[5]{6x^4 + 2x^2 + 6},$

j) $f(x) = \arcsin(3x - 8),$

k) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4x^3+3x}},$

l) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}},$

ł) $f(x) = \cos(2x + 5),$

m) $f(x) = e^{x^2} \log_3 x,$

n) $f(x) = \ln(6x + \sin 4x),$

o) $f(x) = \cos^2(6x^4 - 5x - 2),$

p) $f(x) = x^x,$

q) $f(x) = (\sin x)^{2x+1},$

r) $f(x) = (10x)^{-5x^3-2x},$

s) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

3. Wykorzystując regułę de l'Hospitala (o ile to możliwe) oblicz podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x},$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x},$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x - 3^{-2x}}{3x^2+x},$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^3+x^2+2x},$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{2x^2-6x},$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x - \cos x},$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x},$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right),$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right),$

k) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x),$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\mathrm{arctg}x)\ln x,$

ł) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$, b) $g(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$,

c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$, d) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.

5. Wyznacz, o ile istnieją, ekstrema lokalne funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 4$,

c) $f(x) = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$, d) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$,

e) $f(x) = x^2 \ln x$, f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

6. Wyznacz, o ile istnieją, wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale I:

a) $f(x) = x - 2\ln x, \quad I = [1, e]$, b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad I = [-2, 2]$,

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad I = \mathbb{R}$, d) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad I = \mathbb{R}$.

7. Wyznacz (o ile istnieją) punkty przegięcia wykresu funkcji oraz przedziały wklęsłości i przedziały wypukłości funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$,

c) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.