Relacja podzielności i stowarzyszenia, elementy nierozkładalne.

1. Czy w pierścieniu $Z[i]$ element $(1+i)$ dzieli liczbę:
   a) 2 b) $5+2i$ c) $7-i$?
2. Czy w pierścieniu $Z\left[\frac{1}{2}\right]$ prawdziwe są zdania:
   a) $5|10$ b) $10|5$ c) $\frac{3}{4}|15$
   d) $\frac{5}{2}|3$.
3. Wyznaczyć elementy odwracalne pierścienia:
   a) $Z[i]$; b) $Z\left[i\sqrt{2}\right]$; c) $Z\left[\sqrt{3}\right]$ d) Z
4. W pierścieniu $Z[i]$ wskazać elementy stowarzyszone z danym elementem:
   a) $3+5i$; b) 5; c) $1-8i$.
5. W pierścieniu $Z\left[i\sqrt{7}\right]$ wskazać elementy stowarzyszone z danym elementem:
   a) 6; b) $1-i\sqrt{7}$.
6. W pierścieniu $Z_5[x]$ wskazać elementy stowarzyszone z danym wielomianem:
   a) x^3+4x^2+3x+2; b) $4x^5+2x^3$.
7. W pierścieniu $Z\left[i\sqrt{3}\right]$ znaleźć wszystkie dzielniki liczby:
   a) $5+i\sqrt{3}$; b) $4-5i\sqrt{3}$; c) 3.
8. Jakiego typu elementem w pierścieniu $Z\left[\frac{1}{2}\right]$ jest:
   a) 4; b) 9; c) 10?
9. Zbadać rozkładalność w pierścieniu $2Z$ liczby:
   a) 6; b) 60.
10. Pokazać, że jeżeli $N(x)=p$, p- liczba pierwsza, to x jest elementem nierozkładalnym.
11. Zbadać, czy element 10 pierścienia $Z[i\sqrt{6}]$ ma rozkład jednoznaczny?
12. Zbadać, czy element 16 pierścienia $Z[i15]$ ma rozkład jednoznaczny?
13. Zbadać, czy w pierścieniu $Z[i\sqrt{6}]$ liczba $1+8i\sqrt{6}$ rozkłada się jednoznacznie na czynniki nierozkładalne?
14. Udowodnić, że liczba 2 nie jest elementem pierwszym pierścienia $Z[i\sqrt{7}]$.
15. Udowodnić, że liczba $1+i\sqrt{5}$ nie jest elementem pierwszym pierścienia $Z[i\sqrt{5}]$.
16. Udowodnić, że liczba 3 nie jest elementem pierwszym pierścienia $Z[i\sqrt{5}]$.
17. Udowodnić, że liczba $3+i\sqrt{7}$ nie jest elementem pierwszym pierścienia $Z[i\sqrt{7}]$.
18. Zbadać, czy element 4 pierścienia $Z[i\sqrt{3}]$ ma rozkład jednoznaczny?
19. Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $Z[i]$ obliczyć NWD danej pary liczb:
a) 7-i, 5+9i
b) 6+7i, 1-8i
c) 19+9i, 11-3i
20. Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $Z[i\sqrt{2}]$ obliczyć NWD danej pary liczb:
a) $5+i\sqrt{2}$, 9
b) $7-4i\sqrt{2}, 17-2i\sqrt{2}$
c) $5+6i\sqrt{2}, 4-i\sqrt{2}$.