

HOMOMORFIZMY GRUP, ILOCZYN PROSTY GRUP

- Niech funkcja $\varphi: G \rightarrow G'$ będzie homomorfizmem grup. Udowodnić, że:
 - $H < G \Rightarrow \varphi(H) < G'$
 - $H' < G' \Rightarrow \varphi^{-1}(H') < G$
 - $\ker \varphi$ jest dzielnikiem normalnym grupy G
 - $\text{Im } \varphi$ jest podgrupą grupy G'
 - φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \varphi = \{e\}$ oraz $\text{Im } \varphi = G'$ (gdzie e jest elementem neutralnym grupy G).
- Sprawdzić, czy dana funkcja φ jest homomorfizmem grup:
 - $\varphi: C \rightarrow R, \varphi(z) = |z|$;
 - $\varphi: M(2, R) \rightarrow R, \varphi(A) = \det A$;
 - $\varphi: R \rightarrow R, \varphi(a) = 5a$;
 - $\varphi: R^* \rightarrow R^*, \varphi(a) = 5a$.
- Sprawdzić, czy dana funkcja φ jest homomorfizmem grup. Wyznaczyć jądro i obraz tego homomorfizmu, gdy:
 - $\varphi: Z \rightarrow Z, \varphi(a) = na; n \in N$;
 - $\varphi: R^* \rightarrow R^*, \varphi(a) = a^2$;
 - $\varphi: C^* \rightarrow C^*, \varphi(z) = |z|$;
 - $\varphi: C^* \rightarrow C^*, \varphi(z) = z^m, m \in N$;
 - $\varphi: R_+ \rightarrow R, \varphi(a) = \log a$;
 - $\varphi: Z \rightarrow Z_n, \varphi(a) = (a)_n, n \in N$;
 - $\varphi: Z_2 \rightarrow \{-1, 1\}, \varphi(0) = 1, \varphi(1) = -1$;
 - $\varphi: GL(n, R) \rightarrow R_+, \varphi(A) = |\det A|$.
- Udowodnić, że funkcja $\varphi: G \rightarrow G$ określona wzorem $\varphi(a) = a^2$ jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.
- Udowodnić, że:
 - $M(2, R) \cong R^4$;
 - $Z_n \cong O_n$;
 - $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in Z \right\} \cong Z$.
 - $R^* / \{-1, 1\} \cong R_+$;
 - $R^* / R_+ \cong \{-1, 1\}$;
 - $C / R \cong R$;
 - $C^* / C_1 \cong R_+$;
- Opisać grupę R / Z .

7. Udowodnić, że $Z/nZ \cong Z_n$.

8. Wyznaczyć (co do izomorfizmu) obrazy homomorficzne grup:

$Z_5, Z_{12}, \Phi(8), \Phi(9)$, gdzie $\Phi(n) = (\{x \in N: \text{NWD}(x,n)=1, x < n\}, \cdot_n)$.

9.

Pokazać, że $a \rho b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$ jest kongruencją w pierścieniu $(Z, +, \cdot)$.

10.

Niech H będzie podgrupą grupy G . Pokazać równoważność następujących warunków:

a) $\forall b \in G \quad bH = Hb$,

b) Θ_H jest kongruencją w grupie G , gdzie $a \Theta_H b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$,

c) $\Theta_H = \Theta'_H$, gdzie $a \Theta'_H b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$,

d) $\forall b \in G \quad b^{-1}Hb = H$ (gdzie $b^{-1}Hb = \{b^{-1}hb \mid h \in H\}$),

e) $\forall b \in G \quad \varphi_b(H) = H$, gdzie φ_b jest automorfizmem wewnętrznym dla ustalonego $b \in G$ (tzn. $\varphi_b(x) = b^{-1}xb$ dla $x \in G$).

11.

Pokazać, że zbiór wszystkich automorfizmów wewnętrznych tworzy podgrupę grupy $(\text{Aut}(G); \circ)$. Czy jest to podgrupa normalna?

12. Obliczyć rząd grupy będącej iloczynem prostym grup:

a) $Z_2 \times Z_3 \times Z_5$

b) $S_3 \times Z_4 \times Z_{10}$

c) $S_2 \times S_3 \times S_4 \times S_5$

d) $D_2 \times D_3$.

13. Rozłożyć na iloczyn prosty grupy cykliczne:

a) Z_{200} b) Z_{360} c) Z_{600} .

14. Sprawdzić, że:

a) $C^* = R_+ \oplus C_1$

b) $R^* = \{-1, 1\} \oplus R_+$

c) $C = R \oplus LR$.

15. Udowodnić, że grupa Z nie daje się przedstawić w postaci sumy prostej swoich podgrup niezerowych.

16. Grupę $\Phi(20)$ rozłożyć na iloczyn prosty.