Własności działań; Grupy

Zad. 1. Które z poniższych struktur tworzą grupę:

a) $(\mathbb{R}, \circ)$, $x \circ y = x + y + xy$;
b) $(\mathbb{R}, \oplus)$, $x \oplus y = x + y + 1$;
c) $(\mathbb{Z}, \bullet)$, $x \bullet y = x(x + y)$;
d) $(\mathbb{R}^2, \diamond)$, $(x, y) \diamond (u, w) = (x + u, y + w)$;
e) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, $(x, y) \cdot (u, w) = (xw + yu, yw)$.

Zad. 2. Niech 2^X będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X. Pokazać, że zbiór 2^X wraz z różnicą symetryczną zbiorów ($A \bigotimes B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$, gdzie A' jest dopełnieniem zbioru A, tzn. $A' = X \setminus A$) tworzy grupę.

Zad. 3. Niech dla $i = 1, 2, 3, 4$ funkcje $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ będą określone wzorami:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \tfrac{1}{x}, \quad f_4(x) = \tfrac{-1}{x}.$$

Sprawdzić, czy składanie funkcji $\circ$ jest działaniem w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ (zbudować tabelkę tego działania). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?

Zad. 4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $+_n$ oznacza dodawanie modulo n w zbiorze $\mathbb{Z}$:

a) Sprawdzić, czy działanie $+_n$ jest przemienne ;
b) Wykorzystując zależności $(x)_n = (y)_n \iff n|(x - y)$ oraz $n|(x - (x)_n)$ słuszne dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Z}$, udowodnić, że zachodzą równości:

$$(a +_n b) +_n c = (a + b + c)_n \text{ oraz } a +_n (b +_n c) = (a + b + c)_n.$$

Wywnioskować stąd łączność działania $+_n$;
c) Sprawdzić, czy działanie $+_n$ ma element neutralny;
d) Sprawdzić, czy dla każdego elementu $a \in \mathbb{Z}_n$ istnieje element przeciwny.