

## Grupy permutacji; Warstwy; Pierścienie

Zad. 1. Wyznaczyć grupy izometrii:

- trójkąta równobocznego,
- prostokąta,
- kwadratu.

Zad. 2. Wyznaczyć podgrupy grup wyznaczonych w zadaniu pierwszym.

Zad. 3. Niech  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  będą elementami grupy permutacji zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Znaleźć  $a \circ b$ ,  $(a \circ b)^2 \circ a$ ,  $b \circ a^2$ ,  $(a \circ b^{-1})^{-1} \circ a^2$ ,  $(a \circ b)^{-1} \circ b$ .  
Określić parzystość tych permutacji.

Zad. 4. Rozłożyć na cykle następujące permutacje zbioru  $S_8$ :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zad. 5. Wygenerować podgrupę grupy  $S_4$  z permutacji  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

Zad. 6. Dowieść, że dwa elementy rzędu drugiego dowolnej grupy są przemiennie wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn ma rząd nie większy niż dwa.

Zad. 7. Sprawdzić, że zbiór wszystkich permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , które przeprowadzają liczbę 1 na siebie, tworzy podgrupę grupy  $S_n$ . Ile jest takich permutacji? Czy można zastąpić  $\{1\}$  przez dowolny podzbiór zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ?

Zad. 8. Wyznaczyć warstwy lewostronne i prawostronne grupy  $G$  względem podgrupy  $H$ , jeżeli:

- $G = Z_{10}$      $H = \{0, 5\}$ ,
- $G = Z_{12}$      $H = \{0, 4, 8\}$ ,
- $G = S_3$      $H = A_3$ .

Zad. 9. Wykazać, że grupa cykliczna jest grupą abelową.

Zad. 10. Sprawdzić, czy następujące struktury są pierścieniami:

- $(Z(\sqrt{2}); +; \cdot)$ ,
- $(Z_n; +_n, \cdot_n)$ ,
- $(R; \circ, \cdot)$ , gdzie  $a \circ b = a + b + 1$ ,  $a \cdot b = ab + a + b$ ,
- $(2^X; \otimes, \cap)$ , (patrz zad. 2 list nr. 1).

Zad. 11. Wyznaczyć podpierścienie pierścieni:  $(Z_3; +_3, \cdot_3)$ ,  $(Z_{10}; +_{10}, \cdot_{10})$ .

Zad. 12. Sprawdzić, które ze struktur podanych w zadaniu 10 są ciałami.