Twierdzenie o homomorfizmie dla grup; Ideały; Pierścienie ilorazowe

Zad. 1. Udowodnić, że jeśli $H_1 \lhd G$ i $H_2 \lhd G$ to zbiór $H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2\}$ jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zad. 2. Niech $L(G)$ oznacza zbiór wszystkich dzielników normalnych grupy G. Udowodnić, że zbiór częściowo uporządkowany $(L(G), \subseteq)$ ma następujące własności:

$$H_1H_2 = \sup\{H_1, H_2\} \text{ i } H_1 \cap H_2 = \inf\{H_1, H_2\}.$$

Zad. 3. Udowodnić, że zbiór $Z(G) = \{a \in G : (\forall x \in G)\ ax = xa\}$ (tzw. centrum grupy) jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zad. 4. Pokazać, że jeśli Θ jest kongruencją w grupie G to $[e]_\Theta$ jest podgrupą normalną grupy G.

Zad. 5. Pokazać, że jeśli Θ jest kongruencją w pierścieniu to $[0]_\Theta$ jest ideałem.

Zad. 6. Wyznaczyć wszystkie ideały pierścienia $(Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$, które z nich są ideałami pierwszymi, a które maksymalnymi.

Zad. 7. Niech $\mathrm{Inn}(G)$ oznacza grupę automorfizmów wewnętrznych grupy G, a $Z(G)$ jej centrum. Wykazać, że $\mathrm{Inn}(G)$ jest izomorficzna z grupą ilorazową $G_{/Z(G)}$.

Zad. 8. Wyznaczyć wszystkie obrazy homomorficzne grupy $(Z_8, +_8)$, $(Z_{10}, +_{10})$ i $(S_3, \circ)$.

Zad. 9. Wyznaczyć pierścienie ilorazowe względem ideałów dla pierścienia $P = (Z_6, +_6, \cdot_6)$. Wyznaczyć jądro homomorfizmów $f_i : P \to P_{/I_i}$ gdzie I_i-ideały pierścienia P.

Zad. 10. Niech I będzie ideałem w pierścieniu R. Wykazać, że I jest ideałem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy $R_{/I}$ jest pierścieniem bez dzielników zera.

Zad. 11. Pokazać, że pierścień $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.