Homomorfizmy pierścieni i pierścienie wielomianów

1. Czy dana funkcja φ jest homomorfizmem pierścieni? Jeśli tak, to wyznaczyć $\ker\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$:
   a) $\varphi : C_{\langle 0,1\rangle} \to R,\ \varphi(f) = f(1)$;
   b) $\varphi : R^2 \to R,\ \varphi(a,b) = a+b$;
   c) $\varphi : M(2,K) \to K,\ \varphi(A) = \det A$.
2. W pierścieniu $Z_4[x]$ wykonać wskazane działania:
   a) $(x^3+2x^2+2x+3)+(x^4+x^3+3x^2+2x+2)$;
   b) $(2x^2+x+3)-(2x^4+3x^3+x^2+3x)$;
   c) $(2x^3+2x^2+3)\cdot(3x^2+x+2)$.
3. Niech A będzie pierścieniem całkowitym. Wyznaczyć zbiór elementów odwracalnych pierścienia $A[x]$.
4. Udowodnić, że pierścień $A[x]$ ma dzielniki zera wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień A ma dzielniki zera.
5. W pierścieniu $Z_5[x]$ wykonać wskazane dzielenie z resztą:
   a) $x^4+4x^3+2x^2+3x+4$ przez x^3+x^2+2x+2;
   b) $2x^4+x^3+x^2+3x+3$ przez $3x^2+x+4$;
   c) $x^5+4x^4+3x^2+2$ przez $2x^3+x+4$.
6. W pierścieniu $Z[x]$ wykonać wskazane dzielenie z resztą:
   a) $x^4-9x^3+23x^2-16x+13$ przez $x-5$;
   b) x^3-7 przez $x-2$;
   c) $3x^5+7x^4-5x^3-14x^2-12x-4$ przez $x+2$.
7. Dobrać tak liczby $a,b \in Z$, aby wielomian $x^5-4x^3+2x^2+ax+b \in Z[x]$ przy dzieleniu przez $x-1$ dawał resztę 1, a przy dzieleniu przez $x+2$ resztę –5.
8. Dobrać tak liczby $a,b \in Z_6$, aby wielomian $2x^4+5x^3+4x^2+ax+b \in Z_6[x]$ przy dzieleniu przez $x+1$ dawał resztę 5, a przy dzieleniu przez $x+3$ resztę 1.
9. Dany wielomian $f \in Z[x]$ przedstawić w postaci $f = (x-a)^k g$, k- krotność, jeżeli:
   a) $f(x) = x^5+2x^4+x^3+x^2+2x+1,\ a=-1$;
   b) $f(x) = x^5-3x^4-x^3+7x^2-4,\ a=2$;
   c) $f(x) = 2x^5-7x^4+8x^3-2x^2-2x+1,\ a=1$.
10. Pokazać, że w $Z_7[x]$ zachodzi $(x+1)^7 = x^7+1$. Dla jakich wartości m jest prawdą, że $(x+1)^m = x^m+1$ w $Z_m[x]$.
11. Znaleźć iloraz i resztę dzielenia x^3+x^2+1 przez x^2+x+1 w $Z_2[x]$.
12. Znaleźć iloraz i resztę dzielenia $x^5+x^4+2x^3+x^2+4x+2$ przez x^2+2x+3 w $Z_5[x]$.
13. Powtórz ćwiczenie poprzednie, gdy wielomiany są z $Z[x]$ i znajdź relację między tymi rezultatami.
14. Bez wykonywania długiego dzielenia napisz iloraz i resztę dzielenia $x^5+x^4+2x^3+x^2+4x+2$ przez x^2+2x+3 w $Z_7[x]$, $Z_{73}[x]$.
15. Niech F będzie ciałem. Pokazać, że wielomian $p(x)$ ma odwrotność w pierścieniu $F[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x)$ jest niezerowym stałym wielomianem.
16. Znajdź unormowany NWD wielomianów x^3+x^2+x+1 i x^2+2 w $Z_3[x]$ i przedstaw wynik w postaci: $\lambda(x)(x^3+x^2+x+1)+\mu(x)(x^2+2)$.
17. Znajdź unormowany NWD wielomianów $x^4+2x^3+x^2+4x+2$ i x^2+3x+1 w $Z_5[x]$ i przedstaw wynik w postaci: $\lambda(x)(x^4+2x^3+x^2+4x+2)+\mu(x)(x^2+3x+1)$.