Własności działań, grupy

1. W zbiorze Z_n zbudować tabelki działań $+_n$, $\cdot_n$ dla

a) n=2 b) n=3 c) n=4 d) n=5.

2. Czy wzór $a \circ b = a^2 - b^2$ określa działania w zbiorze

a) Z b) N c) $\{-1,0,1\}$ d) $\{0,1\}$ e) $\{0\}$.

3. Czy mnożenie skalarne wektorów na płaszczyźnie jest działaniem?

4. Ile działań można określić w zbiorze dwuelementowym $\{a,b\}$?

5. Zbadać własności działania: $a \circ b = ab + a + b$ w R.

6. Zbadać rozdzielność działania $\circ$ względem $*$ oraz rozdzielność $*$ względem $\circ$, jeżeli

$a \circ b = ab + a + b, a * b = a + b + 1$ w R.

7. Zbadać własności działania

a) $a * b = \dfrac{a+b}{2}$ w Q

b) $a \circ b = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ w $R^* = R \setminus \{0\}$.

8. Działanie w zbiorze $A = \{p,q,r,s,t\}$ dane jest za pomocą tabelki

$\circ$	p	q	r	s	t
p	p	q	r	s	t
q	q	p	t	p	p
r	r	s	t	r	s
s	s	q	s	t	p
t	t	p	q	p	p

Wskazać element neutralny oraz elementy odwrotne, o ile istnieją do każdego elementu zbioru A.

9. Zbadać własności działania $a \vee b = \min(a,b)$ w R.

10. Czy działanie

a) $+_n$ jest przemienne

b) $+_n$ ma element neutralny

c) czy element $a \in Z_n$ ma element przeciwny?

d) czy $\forall a \in Z_n$ ma element odwrotny?

11. Które z algebr są grupami?

(R, +), (N, +), (N, -), (Q, +), (R, ·), (R-{0}, ·), ({1,-1}, ·), ({0}, +), (C, +), (C-{0}, ·).

12. Wykazać, że (**Zn; +n**) jest grupą abelową.

13. Niech dla i = 1, 2, 3, 4 funkcje $f_i : R^* \to R^*$ będą określone:

$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Sprawdzić, czy składanie funkcji o jest działaniem w zbiorze G = $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Czy para (G; o) jest grupą?

14. Niech $G = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha \neq 0, \alpha, \beta \in Z_3 \right\}$. Pokazać, że zbiór G wraz z mnożeniem macierzy jest grupą.

15. Czy grupa $\mathbf{Z_2}$ jest podgrupą grupy $\mathbf{Z_4}$?

16. Wyznaczyć rzędy elementów i podgrupy dla poniższych grup, sprawdzić cykliczność tych grup:

Z, Z_5, Z_{12}, S_3, $\Phi(8)$, $\Phi(9)$, **gdzie** $\Phi(n) = (\{x \in N: \ NWD(x, n) = 1, \ x < n\}, \ \cdot_n)$.