Relacje

1. Zakładając, że różne litery oznaczają różne elementy, zbadać, jakie własności mają następujące relacje $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{a,b,c,d\}$. Jeśli ρ nie ma którejś własności, zbadać, czy istnieje takie niepuste $X_1 \subset X$, że $\rho | X_1$ własność tę już posiada:
   a) $\rho = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$;
   b) $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$;
   c) $\rho = \{(a,b),(b,a),(c,a),(a,c),(c,d),(a,d)\}$;
   d) $\rho = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,c),(a,a),(b,b)\}$;
2. Zbadać, jakie własności mają następujące relacje:
   a) $\rho \subset Z^2 \wedge \underset{x,y \in Z}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow 3 | x - y$;
   b) $\rho \subset N^2 \wedge \underset{x,y \in N}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow 2 | x + y$;
   c) $\rho \subset N^2 \wedge \underset{x,y \in N}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x | y$;
   d) $\rho \subset Z^2 \wedge \underset{x,y \in Z}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 3$;
   e) $\rho \subset R^2 \wedge \underset{x,y \in R}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
   f) $\rho \subset R^2 \wedge \underset{x,y \in R}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x^3 = y^3$;
   g) $\rho \subset R^2 \wedge \underset{x,y \in R}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x^3 = y^2$;
   h) $\rho \subset C^2 \wedge \underset{x,y \in C}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow |x| < |y|$;
   i) $\rho \subset Z^2 \wedge \underset{x,y \in Z}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow |x| + |y| = 3$;
   j) $\rho \subset Z^2 \wedge \underset{x,y \in Z}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow |x| + |y| \neq 4$;
   k) $\rho \subset Q^2 \wedge \underset{x,y \in Q}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow x - y \notin Z$;
   l) $\rho \subset R^2 \wedge \underset{x,y \in R}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow e^x = 2e^y$;
   ł) $\rho \subset C^2 \wedge \underset{x,y \in C}{\forall} x\rho y \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Im} y$;
   m) $\rho \subset (Q^2)^2 \wedge \underset{x,y,z,t \in Q}{\forall} (x,y)\rho(t,z) \Leftrightarrow xz = yt$.
3. Dla danego zbioru X oraz relacji $\rho \subset X^2$ zbadać, czy ρ jest relacją równoważności; jeśli tak wskazać jej klasy abstrakcji:
   a) $X = Z,\ x\rho y \Leftrightarrow 5 | x - y$;
   b) $X = C,\ x\rho y \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$;
   c) $X = R,\ x\rho y \Leftrightarrow x - y = 2$;
   d) $X = Z,\ x\rho y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$;
   e) $X = \{1,2,3\},\ x\rho y \Leftrightarrow x + y \neq 3$;
   f) $X = N^2,\ (k,l)\rho(m,n) \Leftrightarrow k + n = l + m$;
   g) $X =$ zbiór wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych,
   $(a_n)\rho(b_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

h) $X =$ zbiór wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych,
$(a_n)\rho(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$;

i) $X = Z^2$, $(k,l)\rho(m,n) \Leftrightarrow \max\{|k|,|l|\} = \max\{|m|,|n|\}$;

j) $X =$ zbiór macierzy wymiaru 2×2 o wyrazach rzeczywistych,
$A\rho B \Leftrightarrow \det A = \det B$.

4. Sprawdzić, czy następujące zdania są prawdziwe:
   a) suma dwóch relacji symetrycznych w zbiorze X jest symetryczna w tym zbiorze;
   b) część wspólna dwóch relacji zwrotnych w zbiorze X jest zwrotna w tym zbiorze;
   c) suma dowolnej rodziny relacji zwrotnych jest zwrotna;
   d) część wspólna dwóch relacji przechodnich w zbiorze X jest przechodnia w tym zbiorze;
   e) suma dwóch relacji spójnych w zbiorze X jest spójna w tym zbiorze;
   f) część wspólna dwóch relacji spójnych w zbiorze X jest spójna w tym zbiorze.
5. Narysować diagram relacji $\rho \subset A^2$, gdzie:
   a) $A = \{0,1,2\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x < y$;
   b) $A = \{1,2,\dots,1\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x|y \wedge x \neq y$;
   c) $A = \{1,2,3,4\}$, $x\rho y \Leftrightarrow 2|x + y$.
6. Podać jaką własność ma diagram relacji:
   a) zwrotnej;
   b) słabo antysymetrycznej;
   c) spójnej;
   d) przeciwsymetrycznej;
   e) symetrycznej;
   f) przechodniej;
   g) przeciwzwrotnej.