Macierz przekształcenia liniowego, wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego

Zad. 1. Napisać macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będącego obrotem wokół punktu $(0,0)$ o kąt $0 \le \beta < 2\pi$, w bazie standardowej.

Zad. 3. Znaleźć wszystkie wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przechodzące na wektor $b \in \mathbb{R}^m$ przy homomorfiźmie zadanym macierzą A :

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix};$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$

Zad. 4. Znaleźć jakąkolwiek bazę jądra odwzorowania liniowego zadanego macierzą:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{bmatrix},$

b) $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$

Zad. 5. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne podanych przekształceń liniowych:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gdzie $f((x,y)) = (2x+y, x+2y)$;

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $f((x,y,z)) = (2x+3y+z, y+z, 2z)$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $f((x,y,z)) = (2x-y+2z, x+2z, -2x+y-z)$.

Zad. 6. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne podanych macierzy rzeczywistych:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Zad. 7. Pokazać, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym tego samego przekształcenia liniowego, są liniowo niezależne.