

Lista 26. Zastosowanie całki podwójnej i krzywoliniowej

Całki podwójne i krzywoliniowe

1. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D 4x^2y \, dx \, dy$, gdzie D jest trójkątem ABC , $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$, $C(1, 6)$.
2. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (2x - 4y) \, dx \, dy$, gdzie D jest trójkątem ABC , $A(-1, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 1)$.
3. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D 2y \, dx \, dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y = x^2 - 1$ i prostą $y = x + 1$.
4. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, gdzie D jest kołem $x^2 + y^2 \leq 4$.
5. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D x^2 \, dx \, dy$, gdzie D jest pierścieniem kołowym $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.
6. Wyznaczyć środek masy półkola $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$, którego gęstość masy dana jest wzorem $\sigma(x, y) = x^2y$.
7. Obliczyć momenty bezwładności względem osi x , osi y oraz punktu $(0, 0)$ jednorodnej ćwiartki koła $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x, y \geq 0$.
8. Stosując I regułę Guldina wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego półkola o promieniu R .
9. Stosując I regułę Guldina wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 3)$.
10. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int_L 2xy \, dL$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$.
11. Wyznaczyć środek masy odcinka o końcach $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ o gęstości masy $\sigma(x, y) = \sqrt{2}xy^2$.
12. Wyznaczyć masę krzywej $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 8$ o gęstości $\sigma(x, y) = x$.
13. Stosując II regułę Guldina wyznaczyć środek masy jednorodnej połowy okręgu o promieniu R .
14. Obliczyć momenty bezwładności względem osi x i osi y jednorodnej krzywej $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 3$.
15. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int_L (x + y) \, dx + (2x - y) \, dy$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ skierowanym od $A(0, 0)$ do $B(1, 1)$.
16. Obliczyć pracę pola wektorowego $\vec{F}(x, y) = \left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$ na łuku okręgu $x^2 + y^2 = R^2$, $x, y \geq 0$ skierowanym od $A(R, 0)$ do $B(0, R)$.

Odpowiedzi

1. 201,6

2. $\frac{8}{3}$

3. 5,4

4. 4π

5. 20π

6. $x_C = 0, y_C = \frac{15\pi}{96}$

7. $I_x = I_y = \frac{k\pi R^4}{16}, I_0 = \frac{k\pi R^4}{8}$

8. $x_C = 0, y_C = \frac{4R}{3\pi}$

9. $x_C = 2, y_C = 1$

10. $\frac{9}{4}$

11. $x_C = y_C = \frac{4}{5}$

12. $\frac{1192}{15} \approx 79,47$

13. Wprowadzając układ współrzędnych tak, aby środek okręgu był punktem $(0,0)$, a średnica leżała na osi x , mamy $x_C = 0, y_C = \frac{2R}{\pi}$.

14. $I_x = \frac{46912}{2835}k \approx 16,55k, I_y = \frac{1696}{105}k \approx 16,15k$

15. $\frac{5}{3}$

16. $\frac{\pi R}{2}$