ESI: Podstawy matematyczne

[Matlab_1.0] Matlab2015b i nowsze

11 marca 2019

1. **Cel ćwiczeń:** Celem ćwiczeń jest przypomnienie studentom podstawowych zagadnień z matematyki, które będą niezbędne w trakcie trwania kursu.

2. **Algebra liniowa:** Podczas trawania kursu niezbędna będzie wiedza na temat podstawowych działań na macierzach [2] wśród, których należy wymienić dodawanie, odejmowania, możenie, wyliczanie wyznacznika macierzy, jej śladu oraz odwrotności. Poniżej przedstawione zostaną te działania od strony teoretycznej jak i zastosowaniu w Matlabie.

   2.1. **Dodawanie/odejmowanie:** te działania są podstawowymi operacjami na macierzach. Załóżmy, że macierze **A**, **B**, **C** i **O** są rozmiaru $m \times n$ oraz **O** jest zerowa, wtedy poniższa tabela określa właściwości opisywanych działań.

Własność	Przykład
Przemienność dodawania	**A+B=B+A**
Łączność dodawania	**A+(B+C)=(A+B)+C**
Element neutralny dodawania	Dla dowolnej macierzy **A** istnieje unikalna macierz **O** taka, że **A+O=A**
Macierz przeciwna	Dla każdej macierzy **A** istnieje unikalna macierz **-A** taka, że **A+(-A)=O**.
Domknięcie dodawania	**A+B** to macierz mająca takie same wymiary, co macierze **A** i **B**

Przykład obliczenia sumy macierzy w Matlabie:

```
A=[1  0;0  1];
B=[0  1;1  0];
C=A+B;
```

Listing 1: Dodawanie macierzy

   2.2. **Mnożenie:** W przypadku tego działania rozróżnimy na potrzeby tego kursu, mnożenie macierzy przez skalar i macierz. Mnożenie przez skalar polega na wymnożeniu każdego elementu macierzy przez zadaną wartość. Załóżmy, że macierze **A**, **B**, **C**, **O** i **I** są rozmiaru $n \times n$ oraz **O** jest zerowa, a **I** jednostkowa, wtedy poniższa tabela określa właściwości mnożenia macierzowego. Poniższy

Własność	Przykład
Przemienność mnożenia nie działa!	**AB≠BA**
Łączność mnożenia	**(AB)C=A(BC)**
Rozdzielność	**A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA**
Element neutralny	**IA=A, AI=A**
Dopasowanie wymiarów	iloczyn macierzy $m \times n$ i macierzy $n \times k$ to macierz $m \times k$
Własność mnożenia przez zero	**AO=0, OA=0**

przykład zobrazuje sposób wykonywania mnożenia macierzowego.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Przykład obliczenia iloczynu macierzy w Matlabie:

```
A=[1 0;0 1];
B=[0 1;1 0];
C=A*B;
```

Listing 2: Iloczyn macierzy

Nie istnieje wprost możliwość dzielenia macierzy należy do tego działania wykorzystać mnożenie przez odwrotność macierzy **tylko dla macierzy kwadratowe** (pamiętać o zastosowaniu odpowiedniego mnożenia prawo lub lewo stronnego). W Matlabie można zastosować funkcję *inv()*.

2.3. **Wyznacznik macierzy:** Teorię wyznaczników zapoczątkował problem znalezienia ogólnego wzoru na rozwiązanie układu n równań liniowych o n niewiadomych. Wzory te zostały podane w XVIII wieku przez Cramera. Teoria wyznaczników została rozwinięta w XIX wieku, zwłaszcza w pracach Laplace'a, Cauchy'ego i Jacobiego.

Wyznacznik macierzy to funkcja określona na macierzach kwadratowych związana z mnożeniem i dodawaniem odpowiednich elementów danej macierzy tak, by otrzymać pojedynczą liczbę. Inaczej mówiąc wyznacznik macierzy jest to liczba rzeczywista przyporządkowana macierzy kwadratowej. Wyznacznik oznaczamy symbolicznie $\det(A)$ lub $|A|$. Metodą na obliczenie wyznacznika n-tego stopnia jest skorzystanie z rekurencyjnej wzoru zwanego rozwinięciem Laplace'a. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Wówczas:

- dla każdego ustalonego $j = 1 \ldots n$ zachodzi $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
- dla każdego ustalonego $i = 1 \ldots n$ zachodzi $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

gdzie:

a_{ij} jest elementem macierzy w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Należy wyzerować kolumnę bądź wiersz macierzy korzystając z operacji elementarnych (z wyjątkiem np. ostatniego wyrazu): dodajmy czwartą kolumnę do pierwszej oraz trzeciej, zaś odejmijmy ją od drugiej: Przykład:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0+7 & 1-7 & 2+7 & 7 \\ 1+4 & 2-4 & 3+4 & 4 \\ 5+8 & 6-8 & 7+8 & 8 \\ -1+1 & 1-1 & -1+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 9 & 7 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 13 & -2 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Przeprowadzono w ten sposób redukcję wyznacznika macierzy czwartego stopnia do iloczynu skalara, oraz wyznacznika macierzy trzeciego stopnia. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem czwartego wiersza (pamiętać należy o znakach wyliczanych minorów) dostaniemy:

$$\det(A) = (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 9 & 7 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 15 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \\ 13 & 15 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 & 7 \\ 5 & -2 & 4 \\ 13 & -2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \\ 13 & -2 & 15 \end{vmatrix} \tag{4}$$

dokonać należy jeszcze jednej redukcji współczynników macierzy

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \\ 13 & -2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 13 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = -64 \tag{5}$$

Przykład obliczenia wyznacznika macierzy w Matlabie:

```
B=[-2 -3 -4;2 3 4; 9 0 8];
A=det(B);
```

Listing 3: Wyznacznik macierzy

2.4. **Ślad macierzy:** Ślad macierzy definiujemy tylko dla macierzy kwadratowej. Ślad macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n jest sumą elementów leżących na głównej przekątnej (diagonali). Ślad macierzy oznaczamy $\mathrm{Tr}(A)$, oraz $\mathrm{trace}(A)$.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN} \tag{6}$$

Przykład w Matlabie:

```
A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
B=trace(A);
```

Listing 4: Ślad macierzy

3. **Przestrzeń probabilistyczna:** Do definicji przestrzeni probabilistycznej niezbędne jest wprowadzenie definicji [1], które ułatwią zrozumienie zagadnienia. Za pomocą przestrzeni probabilistycznych będziemy modelować tzw. doświadczenia losowe.

   - **Doświadczenie losowe:** Doświadczeniem/eksperymentem losowym nazywamy dowolny proces (lub ciąg czynności) taki, że:
     - jego sposób wykonywania i warunki są ściśle określone, a sam proces można dowolnie wiele razy powtarzać,
     - zbiór możliwych wyników procesu, tzw. zdarzeń elementarnych jest z góry znany,
     - wyniku konkretnego doświadczenia nie można z góry przewidzieć - ma on charakter losowy.
   - **Zdarzenie losowe:** Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych.

     Przykład: Jeżeli rzut kostką jest doświadczeniem losowym to zbiorem zdarzeń elementarnych może być $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ natomiast zdarzeniem losowym może być wyrzucenie parzystej liczby oczek, czyli $A = \{2, 4, 6\}$
   - **Przestrzeń probabilistyczna:** Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ oraz $P : \mathcal{F} \to [0; 1]$. Ponadto $\mathcal{F}$ musi spełniać następujące warunki:
     - $\emptyset \in \mathcal{F}$
     - jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $\Omega \backslash A \in \mathcal{F}$ (zamkniętość na dopełnienia),
     - jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (zamkniętość na przeliczalne sumy),

     a P następujące warunki:
     - $P(\Omega) = 1$
     - jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (przeliczalna addytywność).

     Wprost z definicji przestrzeni probabilistycznej wynikają następujące własności:
     - dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi $\bar{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$ i ponadto $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
     - $P(\emptyset) = 0$,
     - jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ to $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,
     - jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
     - jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, to $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

4. **Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i reguła Bayesa:**

   4.1. **Prawdopodobieństwo warunkowe:** Kiedy istnieje zależność poprzez zajście zdarzenia B i tym, że ono w pewien sposób oddziaływuje na wartość wyznaczonewgo prawdopodobieństwa zdarzenia A. Zdarzenie polegające na zajściu zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B, oznaczane jest symbolem $A|B$, prawdopodobieństwo tego zdarzenia $P(A|B)$ nazywa prawdopodobieństem warunkowym i przyjmuje formę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{7}$$

gdzie $A, B \subset \Omega$, $P(B) > 0$. Z definicje tej wynika, że $P(A|B) \geqslant 0$, $P(B|B) = 1$, oraz dla każdej pary wykluczających się zdarzeń $A, C \subset B$ $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$ Zatem funkcja przyporządkowująca każdemu zdarzeniu $A \subset B$ liczbę $P(A|B)$ jest prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w zbiorze B.

4.2. **Prawdopodobieństwo całkowite:** Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia A zawartego w sumie zdarzeń $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) \tag{8}$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite i pozwala nam na obliczanie prawdopodobieństw wielu zdarzeń nie tylko w doświadczeniach dwuetapowych. W doświadczeniach o większej liczbie etapów stosujemy ten wzór wielokrotnie. Zdarzenia B_i nazywamy często hipotezami.

4.3. **Twierdzenie Bayesa:** Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia A zawartego w sumie zdarzeń $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)} \tag{9}$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem Bayesa. Twierdzenie Bayesa stosujemy głównie wtedy, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.

4.4. **Rozkład normalny (Gaussa):** Rozkład normalny (o charakterystycznym kształcie "krzywej dzwonowej", symetrycznej w stosunku do średniej) jest teoretycznym rozkładem prawdopodobieństwa powszechnie wykorzystywanym we wnioskowaniu statystycznym jako przybliżenie rozkładu z próby (patrz także Podstawowe pojęcia). Ogólnie, rozkład normalny jest dobrym modelem dla rozkładu zmiennej losowej, w sytuacji gdy:

- Występuje silna tendencja do przyjmowania wartości położonych blisko środka rozkładu;
- Dodatnie i ujemne odchylenia od środka rozkładu są jednakowo prawdopodobne;
- Liczność odchyleń gwałtownie spada wraz ze wzrostem ich wielkości.

Podstawowy mechanizm tworzący rozkład normalny można wyobrazić sobie jako nieskończoną liczbę niezależnych zdarzeń losowych (dwumianowych), które generują wartości danej zmiennej. Przykładowo, istnieje prawdopodobnie prawie nieograniczona liczba czynników determinujących wzrost człowieka (olbrzymia liczba genów, sposób odżywiania, przebyte choroby itd.). Tak więc należy spodziewać się, że w populacji wzrost podlega rozkładowi normalnemu. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego jest określona następującym wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{10}$$

gdzie: μ oznacza wartość oczekiwaną, σ oznacza odchylenie standardowe.

Dystrybuanta jest definiowana jako prawdopodobieństwo tego, że zmienna X ma wartości mniejsze bądź równe x i w kategoriach funkcji gęstości wyrażana jest (dla rozkładu normalnego) wzorem:

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{11}$$

4.5. **Rozkład Studenta:** Rozkład t-Studenta jest symetryczny względem zera a jego ogólny kształt jest podobny do kształtu standardowego rozkładu normalnego. Jest to typ rozkładu najpowszechniej wykorzystywany w przypadku testowania hipotez dotyczących wartości średniej określonej populacji. Funkcja gęstości (dla $n = 1, 2, \dots$) jest zdefiniowana wzorem:

$$f(x, n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{12}$$

gdzie n liczba stopni swobody, Γ funkcja gamma.

4.6. **Normalizacja:** procedura wstępnej obróbki danych w celu umożliwienia ich wzajemnego porównywania i dalszej analizy.

4.7. **Standaryzacja:** rodzaj normalizacji zmiennej losowej, w wyniku której zmienna uzyskuje średnią wartość oczekiwaną zero i odchylenie standardowe jeden.

Najczęściej spotykanym sposobem normalizacji jest tzw. standaryzacja Z, którą można wyrazić poniższym wzorem:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{13}$$

4.8. **Regularyzacja:** wprowadzenie dodatkowej informacji do rozwiązywanego zagadnienia źle postawionego w celu polepszenia jakości rozwiązania. Regularyzacja jest często wykorzystywana przy rozwiązywaniu problemów odwrotnych.

5. **Wskaźniki jakościowe:**

- Suma kwadratów błędów (SSE ang. Sum of Squared Errors)- jest to suma kwadratów różnic między wyjściem modelu a oczekiwaną rzeczywistą wartością.

$$SSE = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y}_i)^2 \tag{14}$$

- Błąd średniokwadratowy (MSE ang. Mean Squared Errors) jest to średnia z kwadratów różnic między estymatorem a oczekiwaną rzeczywistą wartością.

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y}_i)^2 \tag{15}$$

- Entropia krzyżowa jest miarą, która może być wykorzystana do odzwierciedlenia dokładności prognoz probabilistycznych. Entropia krzyżowa ma silne powiązania z estymacją maksymalnego prawdopodobieństwa. Ma także duże znaczenie dla nowoczesnych systemów prognostycznych, ponieważ jest instrumentem umożliwiającym dostarczanie lepszych prognoz.

  Dla dwóch odrębnych zmiennych losowych p i q, entropia krzyżowa jest zdefiniowana jako:

$$H(p,q) = -\sum_{x} p(x)\log(q(x)). \tag{16}$$

6. **Pochodna funkcji:** Jeżeli istniej skończona granica:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{17}$$

   to nazywamy ją pochodną funkcji w punkcie x_0. Zamiast f' możemy napisać $\dot{f}$, czy też $\frac{df}{dx}$.

   Gdy funkcja ma pochodną w punkcie x_0 oznacza tyle, że jest ona różniczkowalna w tym punkcie.

7. **Gradient:** Gradient jest swego rodzaju odpowiednikiem zwykłych pochodnych dla funkcji wielu zmiennych. Podobnie jak pochodna, gradient opisuje tangens kąta nachylenia wykresu funkcji w danym punkcie. Jeśli $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ jest różniczkowalną funkcją wielu zmiennych, gradientem nazywamy wektor n pochodnych cząstkowych tej funkcji. Wektor ten wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{18}$$

8. **Zadania:**

   8.1. Wprowadź następującą macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

   Następnie rozszerz ją o jeden wiersz i kolumnę. Co oznacza polecenie *size(A)*, *size(A,1)* oraz *size(A,2)*. Wprowadź następnie wektor r=[1 2 3 4] oraz p=[4; 3; 2; 1] i użyj poleceń *length(p)* i *length(r)*.

8.2. Wpowadź następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykonaj następujące działania: $4A$, AB, BA, $A+B$, $A.^2$, A^2, $B-A$.

8.3. Wpowadź następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykonaj następujące działania ale najpierw sprawdź czy to możliwe za pomocą funcji *size()*: $B+D$, $3A$, $-2C$, BA, DB, $2A+B-C$, $CD-DC$, $2B-D$, DD, $BB+DD$.

8.4. Wpowadź następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdź czy zachodzi równość $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$(skorzystaj z funkcji *isequal()*).

8.5. Znajdź odwrotności poniższych macierzy (pamiętaj żeby policzyć odwrotność należy sprawdzić czy istnieje jej wyznacznik). (Do policzenia odwrotności użyj funkcji $inv(\mathbf{arg})$, $\mathbf{arg}^{-1}$ oraz zależność $\mathbf{arg} \times \mathbf{arg}^{-1} = \mathbf{I}$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

8.6. Wprowadź dowolny wektor dziesięcio elementowy. Co się stanie po wykonaniu *x(5)=0.*

8.7. Jak transponować w Matlabie wektor bądź macierz?

8.8. Wprowadź do Matlaba następujące wektory $x = [1, 2, 3, 4]$ oraz $y = [4, 3, 2, 1]$. Wykonaj $z = x. * y$, $z = x.\backslash y$, $z = x.\hat{}y$, $z = x.\hat{}2$, $z = 2.\hat{}[x, y]$.

8.9. Jaki efekt dają następujące instrukcje:

- x=1:200
- u=0:pi/4:pi
- z=6:-1:1
- linspace(1,25,24)?

8.10. Wprowadź macierz A używając jak najmniejszej liczby operacji:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

Wykonaj następujące operacje: A(:,1), A(2,:), A(:,2:3), A(2:3,2:3), A(:,1:2:3), A(2:3), A(:), A(:,:), ones(2,2), zeros(2,2), eye(2), [A [ones(2,2);eye(2)]], diag(A), diag(A,1), diag(A,-1), diag(A,2).

8.11. Przy pomocy funkcji rand wygenerować macierz A o pięciu wierszach i dziesięciukolumnach, której elementy będą losowymi liczbami całkowitymi z przedziału -10 do 10.

- przy pomocy 1 instrukcji odwrócić w macierzy A kolejność kolumn (tzn. pierwsza kolumna ma stać się ostatnią, druga przedostatnią itd.)
- przy pomocy jednej instrukcji zamienić wiersz pierwszy z trzecim
- przy pomocy jednej instrukcji zamienić ze sobą kolumny: drugą z czwartą, szóstą z ósmą oraz dziesiątą z pierwszą
- używając pojęcia macierzy pustej [ ] usunąć kolumny: piątą, szóstą i dziewiątą.

8.12. Policzyć ślad macierzy z zadania 6.5 używając funkcji *trace()*.

8.13. Napisz skrypt, który będzie wykonywał zadanie n rzutów kostką sześcienną i wyświetlał będzie ilość wyrzuconych oczek, a także wykonaj standaryzację zebranych danych tak, aby dane przedstawiały wartości dla standaryzowanego rozkładu normalnego. Wyrysuj histogram i nanieś na niego wykres rozkładu normalnego.

8.14. Napisz skrypt, który będzie wykonywała zadanie losowania n razy ze zwracaniem 1 z 10 kul, które są ponumerowane od 1 do 10. Program ma wyświetlić na wykresie numer wylosowanej kuli w n próbach oraz sumę w kolejnych krokach.

8.15. Temperatura w pewnym mieście jest modelowana jako zmienna losowa $T \sim \mathcal{N}(10°, (10°)2)$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że temperatura w losowo wybranej chwili czasu nie przekroczy 15°?

Literatura

[1] Dimitri P Bertsekas and John N Tsitsiklis. *Introduction to probability*, volume 1. Athena Scientific Belmont, MA, 2002.

[2] T.S. Blyth and E.F. Robertson. *Basic Linear Algebra*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2013.