ESI: Systemy rozmyte

[Matlab_1.0] Matlab2016b i nowsze

10 czerwca 2019

1. **Cel ćwiczeń:** Celem ćwiczeń jest zapoznanie się studentów z zagadnieniami z zakresu logiki rozmytej.

2. **Logika rozmyta:** W logice dwuwartościowej dostępne są dwie opcje 0 lub 1, prawda lub fałsz i wiele wiele innych form na określenie wyniku działania logicznego. W logice rozmytej używa się stanów pomiędzy, przez analogię między kolorem czarnym i białym jest cała gama szarości. Tak też w logice rozmytej opisuje się stany pomiędzy co daje dużo więcej możliwości klasyfikacji wyboru. Dzięki czemu można w wygodny sposób zamodelować zjawiska nieprecyzyjne [4].

   Zakłada się, że X jest pewną określoną przestrzenią rozważań. Niech $W \subset X$, zbiórem W identyfikuje się z funkcją przynależności μ [3]. W logice klasycznej jest to funkcja charakterystyczna zbioru W opisywana za pomocą:

$$\chi_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in W \\ 1 & \text{gdy } x \notin W. \end{cases} \tag{1}$$

   W przypadku opisywanej logiki rozmytej funkcja ta może przyjąć dowolną formę i przeważnie interpretuje się ją jako poziom przynależności elementu x do zbioru W [2].

   Zbiór rozmyty Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni X nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$\{(x, \mu_W(x)) : x \in X\}$$

   gdzie

$$\mu_W : X \to \Re$$

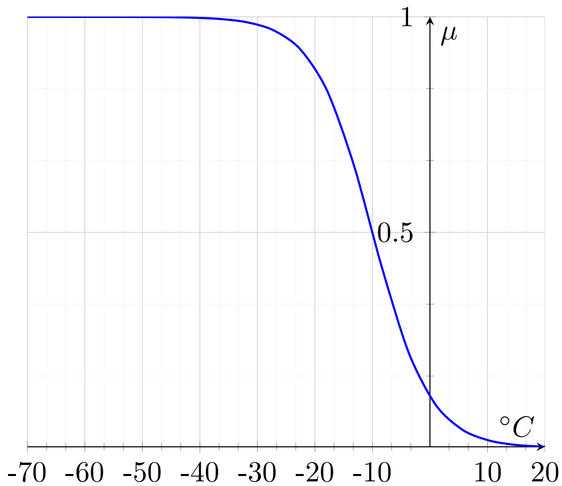
   jest funkcją przynależności zbioru W.

   Przykład Niech W będzie zbiorem niskiej temperatury. $X = [-65°C, 10°C]$ opisuje temperaturę w Rosji. Funkcję, która mogła by opisywać przynależność do zbioru W przedstawiono poniżej:

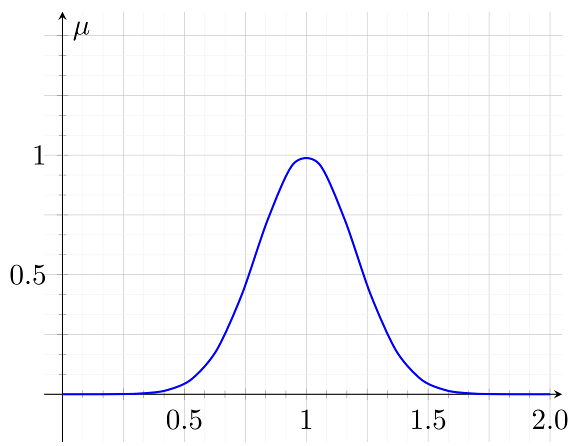
   Gaussowska funkcja przynależności

$$\mu = \exp -(\frac{x-c}{d})^2 \tag{2}$$

   gdzie c – centrum, d – rozpiętość



Rysunek 1: Przykładowa funkcja przynależności do zbioru W



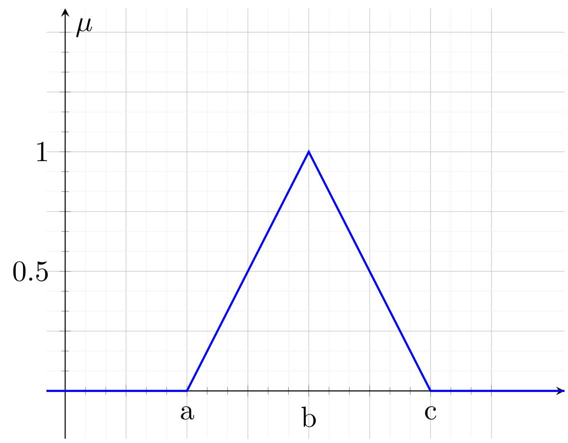
Rysunek 2: Funkcja Gaussowska

Trójkątna funkcja przynależności

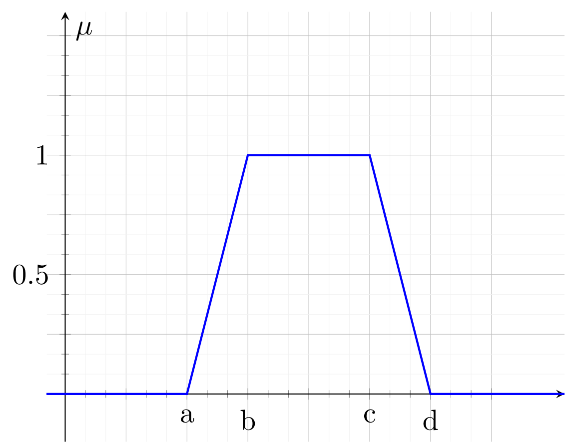
$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a > x \text{ oraz } x > c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leqslant x \leqslant b \\ \frac{c-x}{b-a} & \text{gdy } b < x \leqslant c \end{cases} \tag{3}$$

Trapezoidalna funkcja przynależności

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a > x \text{ oraz } x > d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leqslant x \leqslant b \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{gdy } c < x \leqslant d \\ 1 & \text{gdy } b < x \leqslant c \end{cases} \tag{4}$$



Rysunek 3: Funkcja trójkątna



Rysunek 4: Funkcja trapezoidalna

Singleton Często wykorzystywaną funkcją przynależności w systemach rozmytych jest singleton. Niech $W = \{\bar{x}\}$

$$\mu_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \neq \bar{x} \\ 1 & \text{gdy } x = \bar{x} \end{cases} \tag{5}$$

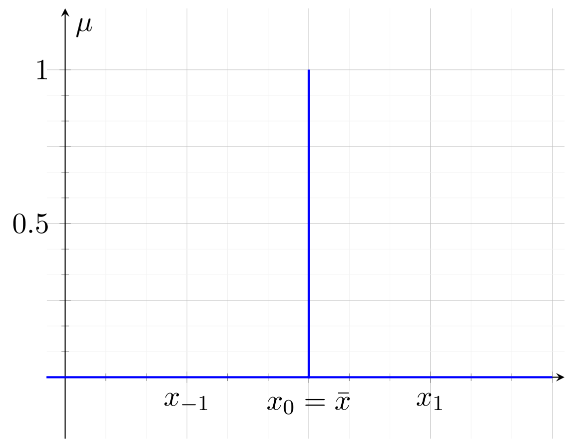
Nośnik zbioru W (support) Nośnikiem zbioru W nazywamy zbiór takich x, które mają znaczenie dla W.

$$supp(W) = S_W = \{x \in X : \mu_W(x) > 0\} \tag{6}$$

Wysokość zbioru W (height)

$$h(W) = H_W = \sup_{x \in X} \mu_W(x) \tag{7}$$

Zbiór W jest normalny jeżeli $h(W) = 1$. Z punktu widzenia praktyki jest to bardzo istotne. Mianowicie jeżeli W jest normalny to wartość funkcji przynależności można interpretować ja-

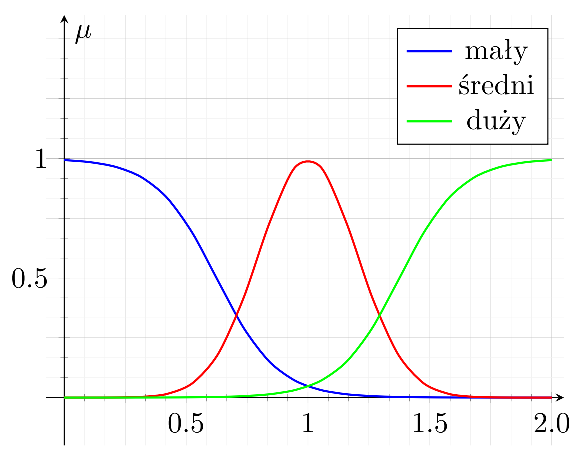


Rysunek 5: Wykres funkcji singleton

ko procent na ile dany element x należy do W. W przeciwnym wypadku zawsze można go znormalizować.

Zmienna lingwistyczna W (Linguistic Variable) Zmienna lingwistyczna jest czwórką (N, T, X, M_n) [1], gdzie:

- N nazwa zmiennej np. rozmiar
- T zbiór wartości lingwistycznych np. {mały, średni, duży}
- X przestrzeń rozważań np. $[0, 2.00]$m
- M_n funkcja semantyczna $M_n : T \rightarrow$ zbiór funkcji przynależności



Rysunek 6: Przykładowe funkcje przynależności ilustrujące M_n

Kompletność (complete) Zmienna lingwistyczna V jest kompletna, jeżeli zachodzi

$$\forall_{x \in X} \; \exists_{W \in T} \; \mu_W(x) > 0. \tag{8}$$

Natomiast jeżeli zmienna lingwistyczna nie jest kompletna, to wtedy przestrzeń rozważań X_V

jest nadmiarowa.

Suma do jedności (partition of unity) Mówi się, że zmienna lingwistyczna V sumuje się do jedności jeżeli

$$\forall_{x \in X} \sum_{i=1}^{\bar{\bar{T}}} \mu_W^i(x) = 1. \tag{9}$$

T-norma Funkcja dwóch zmiennych T

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \tag{10}$$

nazywa się T-normą, jeżeli

2.1. funkcja T jest nierosnąca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leqslant T(b,d) \quad a \leqslant b, \quad c \leqslant d$$

2.2. funkcja T spełnia warunek przemienności

$$T(a,b) = T(b,a)$$

2.3. funkcja T spełnia warunek łączności

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$$

2.4. funkcja T spełnia warunki brzegowe

$$T(a,0) = 0, \quad T(a,1) = a,$$

gdzie $a,b,c,d \in [0,1]$.

Dla dowolnej T-normy zachodzi:

$$T(a,b) \leqslant \min(a,b) \tag{11}$$

Przyjmijmy oznaczanie:

$$T(a,b) = a \overset{T}{*} b$$

Najczęściej spotykane T-normy:

2.1. $T(a,b) = \min(a,b)$

2.2. $T(a,b) = a \cdot b$

S-norma Funkcję dwóch zmiennych S

$$S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \tag{12}$$

określa się nazwą S-normy, w przypadku gdy jest nierosnąca względem obu argumentów, spełnia warunek przemienności, łączności oraz zachodzą warunki brzegowe:

$$S(a,0) = a \quad S(a,1) = 1$$

Dla dowolnej S-normy zachodzi

$$\max(a,b) \leqslant S(a,b)$$

Przyjmijmy oznaczenie:

$$S(a,b) = a \overset{S}{*} b$$

Najczęściej spotykane S-normy:

2.1. $S(a,b) = \max(a,b)$

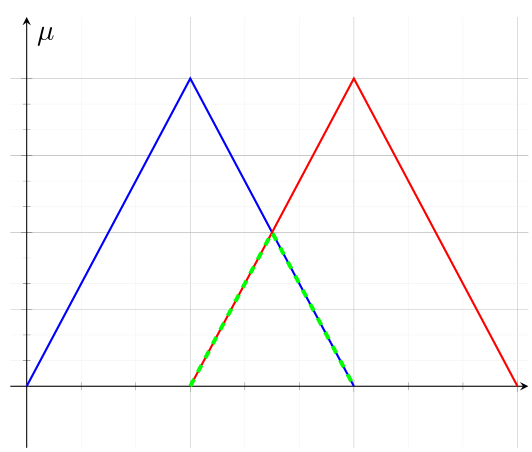
2.2. $S(a,b) = a + b - ab$

Każdej T-normie odpowiada S-norma, zachodzi między nimi następująca zależność

$$a \overset{T}{*} b = 1 - [(1-a) \overset{S}{*} (1-b)]$$

Przecięcie zbiorów rozmytych A i B definiuje się jako:

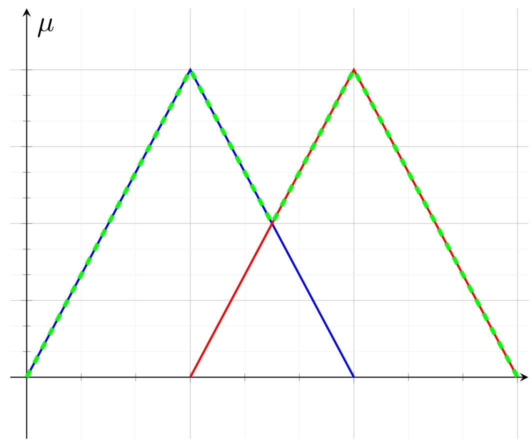
$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



Rysunek 7: Przecięcie zbiorów rozmytych (kolor zielony)

Sumę zbiorów rozmytych A i B definiuje się jako:

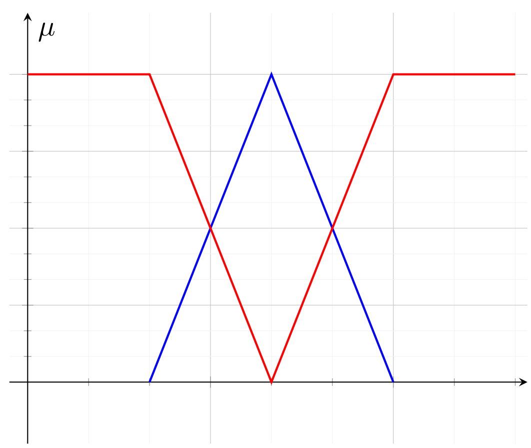
$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



Rysunek 8: Suma zbiorów rozmytych (kolor zielony)

Dopełnieniem zbioru rozmytego $A \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $\hat{A}$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in X$$



Rysunek 9: Dopełnienie zbioru rozmytego

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych $A_1 \subseteq X_1,\ A_2 \subseteq X_2, \ldots,\ A_n \subseteq X_n$, oznacza się jako $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ i definiuje:

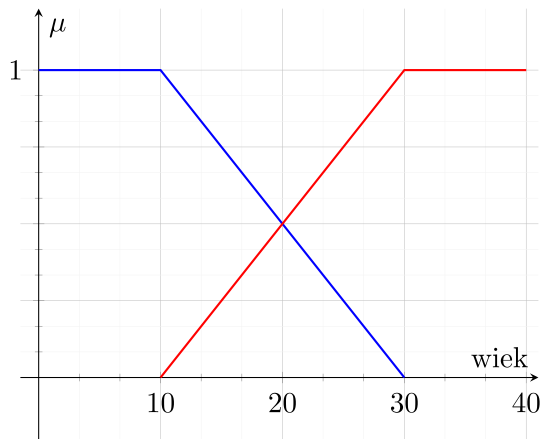
$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n))$$

Entropią rozmytą nazywa się miarę opisującą rozmycie zbioru:

$$E(A) = \frac{c(A \text{ AND NOT} A)}{c(A \text{ OR NOT } A)}$$

gdzie c oznacza sumowanie lub całkowanie po wszystkich wartościach przynależności zbioru A.

Zakładając, że poniżej (rys. 10) przedstawiono zbiór A o nazwie dorosły, gdzie niebieska funkcja przynalżności opisuje przynależność do niedorosłych natomiast czerwona do grupy dorosłych, to korzystając ze wzoru na entropię otrzymano wynik $\frac{5}{40}$.



Rysunek 10: Przykład do entropii.

3. **Relacje rozmyte i reguły wnioskowania:**

Relacja rozmyta R zachodząca między dwoma zbiorami (nierozmytymi) X i Y nazywa się zbiór rozmyty okręslony na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Relacja rozmyta jest zbiorem par

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)); x \in X, y \in Y\}$$

gdzie $\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$ jest funkcją przynależności. Przypisuje ona każdej parze (x, y) stopień przynależności interpretowany jako siłę powiązania pomiędzy tymi elementami.

Reguła rozmytej implikacji Niech A i B będą zbiorami rozmytmi, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Rozmyta implikacja $A \to B$ określa relację R w $X \times Y$ i może być definiowana za pomocą jednej z czterech następujących reguł:

- Reguła typu minimum:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_R(x, y)] = \min[\mu_a(x), \mu_B(y)]$$

- Reguła typu iloczyn:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_R(x, y)] = \mu_a(x)\mu_B(y)$$

- Reguła Sharpa:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_R(x, y)] = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \mu_A(x) > \mu_B(y) \\ 1 & \text{gdy } \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y) \end{cases}$$

- Reguła Łukasiewicza:

$$\mu_{A\rightarrow B}(x,y) = \mu_R(x,y)] = \min[1, 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)]$$

Wniosek reguły rozmytej odnosi się do pewnego zbioru rozmytego B', który jest określony przez załżenie zbioru rozmytego A' i rozmytej implikacji $A \rightarrow B$, tzn.:

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B) \tag{13}$$

W logice rozmytej przesłanki i wniosek są zbiorami rozmytmi.

Przykład :

- Przesłanka: Ludzi na koncercie jest dużo
- Implikacja: Jeżeli ludzi na koncercie jest bardzo dużo, to jest bardzo głośno
- Wniosek: Na koncercie jest średnio głośno

W przedstawionym wnioskowaniu można zauważyć dwie zmienne lingwistyczne i odpowiadające im przestrzenie rozważań, a także zbiory rozmyte:

- Zmienne lingwistyczne: x - ilość ludzi; y -poziom głośności
- Przestrzeń rozważań: T_x = {mało, średnio, dużo, bardzo dużo}, T_y = {mały, średni, wysoki, bardzo wysoki}
- Zbiory rozmyte: A_x - bardzo duża liczba ludzi, A'_x - duża liczba ludzi B_y - bardzo wysoki poziom głośności, B'_y - wysoki poziom głośności.

Wniosek B'_y z przesłanki wyznacza się znajdując $\mu_{B'_y}(y)$. Niech

$$\mu_{B_y}(y) = \max_{x\in X} \min[\mu_{A'_x}(x), \mu_{A_x\rightarrow B_y}(x,y)]$$

a także

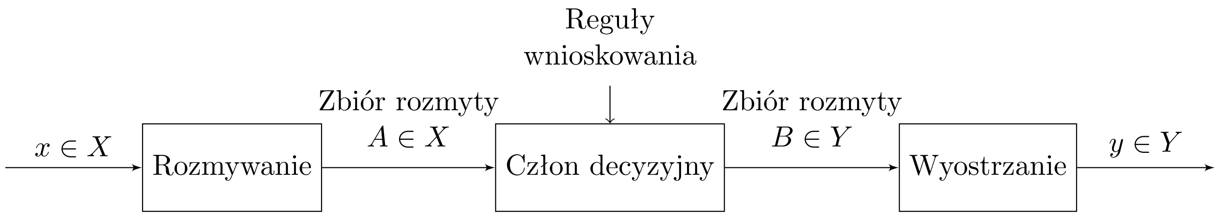
$$\mu_{A_x\rightarrow B_y}(x,y) = \min[\mu_{A_x}(x), \mu_{B_y}(y)]$$

wtedy

$$\mu_{B'_y}(y) = \max_{x\in X} \min[\mu_{A'_x}(x), \min(\mu_{A_x}(x), \mu_{B_y}(y))] = \min[\max_{x\in X} \min(\mu_{A'_x}(x), \min(\mu_{A_x}(x)), \mu_{B_y}(y))$$

4. **Systemy rozmyte:** Typowy proces wnioskowania rozmytego składa się z czterech etapów (rys. 11):

   - rozmywanie (fuzzification)
   - zastosowanie operacji rozmytych
   - zastosowanie implikacji rozmytych
   - precyzowanie/wyostrzenie (deffuzification) - na przykład metoda wyznaczania "środka ciężkości" (Center of Gravity)



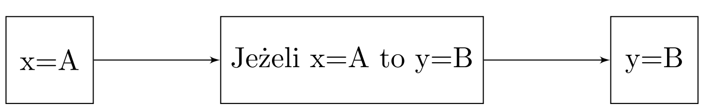
Rysunek 11: Schemat systemu rozmytego

W pierwszej fazie dane wejściowe są "rozmywane", by następnie można było zastosować na nich operacje rozmyte i reguły wnioskowania rozmytego. W kolejnej fazie otrzymane wyniki poddane są "wyostrzaniu" i w ten sposób uzyskanie zostaną konkretne dane wyjściowe.

Systemy rozmyte należy traktować jako automaty, które opierają swoje działanie na prawach logiki rozmytej w celu podjęcia decyzji w warunkach niepewnych. System posiada pewną bazę wiedzy oraz reguły wnioskowania. Na podstawie "obserwacji" podejmuje decyzję. Może ona dotyczyć rozległych tematów związanych z wartościami np. prędkości samochodu czy też ciśnienia wody. Baza wiedzy i reguły wnioskowania tworzone są na podtawie wiedzy eksperta. Zatem efektywność takiego systemu opiera się głównie na rzetelności eksperta w danej dziedzinie. Są dwa rodzaje systemów rozmytych, wnioskowanie Mamdaniego oraz Takagi-Sugeno.

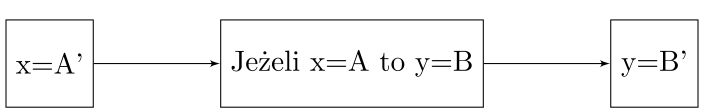
5. **Model Mamdaniego:** System, który ma być zamodelowany jest traktowany w modelach Mamdaniego jako czarna skrzynka (black box). Co powoduje, że nie ma informacji o tym jakie zjawiska w nim zachodzą.

   Model wnioskowania typu Mamdaniego jest zbiorem reguł opartych o zasadę modus pones, z których każda definiuje jeden rozmyty punkt w tej przestrzeni.Na podstawie istniejącego zbioru rozmytych punktów można otrzymać wykres rozmyty, w którym interpolacja pomiędzy punktami zależy od użytych elementów aparatu logiki rozmytej. Każda reguła definiuje typowe zachowanie systemu, która geometrycznie odpowiada punktowi w przestrzeni $X \times Y$. Aby dokładniej przybliżyć ideę wnioskowania przybliżonego można porównać mechanizmy wnioskowania tradycyjnego i przybliżonego przyjmując regułę wnioskowania typu modus ponens (rys. 12 i 13).



Rysunek 12: Schemat wnioskowania modus ponens

Należy zwrócić uwagę na różnicę w działaniu zwykłej reguły w porównaniu z regułą rozmytą. Dla



Rysunek 13: Schemat wnioskowania modus ponens z użyciem zbiorów rozmytych

każdego z pokazanych przypadków istnieje implikacja $A \to B$. Dla reguły nierozmytej wyznaczanie wniosku następuje tylko wtedy gdy zdanie A występujące w przesłance jest również obecne w implikacji $A \to B$. Natomiast w regule rozmytej przesłanka opisana zbiorem rozmytym A' może być zbliżona do zbioru A z poprzednika implikacji, ale nie musi być koniecznie równa A. Mając dany schemat wnioskowania, aby wyznaczyć zbiór B' opisujący wniosek należy przeprowadzić operację kompozycji o postaci:

$$B' = A' \circ (A \to B). \tag{14}$$

Wzór na funkcję przynależności zbioru B' zależy od przyjętej T-normy oraz od sposobu realizacji implikacji.

6. **Model Takagi-Sugeno:** W przypadku układów typu Takagi-Sugeno reguły rozmyte zapisujemy w postaci:

$$\text{Jeżeli } x = A \text{ to } y = f(x)$$

Najczęściej przedstawiona reguła przyjmuje postać, w której konkluzja jest kombinacją liniową wejść

$$\text{Jeżeli } x = A \text{ to } y = ax + b$$

W powyższym przypadku procedura wnioskowania rozmytego odbywa się identycznie jak w przypadku rozmytych systemów typu Mamdaniego przy czym następniki reguł rozmytych reprezentowane są przez zbiory rozmyte typu singleton.

7. **Wyostrzanie:** Wyostrzanie to proces wyboru właściwego elementu na podstawie rozmytego zbioru wyjściowego. W praktyce wymagane jest, aby wynikiem działania systemu rozmytego była wartość precyzyjna. Operacja wyostrzania pozwala na przekształcenie zbioru rozmytego w pojedynczą wartość numeryczną.

Metody wyostrzania:

- metoda środka ciężkości, COG (ang. Center Of Gravity)
- metoda pierwszego maksimum, FOM (ang. First Of Maxima)
- metoda średniego maksimum, MOM (ang. Mean Of Maxima)
- metoda środka sum, COS (ang. Center of Sum)
- metoda wysokości, HM (ang. Height Method)

Najczęściej z wymienionych metod wykorzystuje się metodę środka ciężkości (wz. 15) oraz metodę śrdniego (wz. 16, gdzie G jest zbiorem maksymalnych y_i).

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu(y_i)} \tag{15}$$

$$y = \frac{1}{m} \sum_{y_i \in G} y_i \tag{16}$$

8. **Zadania:**

   8.1. Zapoznać się z GUI do projektowania systemów rozmytych (komenda *fuzzy*).

   8.2. Zaprojektować system ogrzewania pomieszczenia zależny od temperatury zewnętrznej $(-20°C, 30°C)$ oraz wilgotności powietrza $(0 - 100\%)$. Wyjściem ma być moc grzałki z zakresu $(0 - 1000)W$. Zmienne lingwistyczne mają zawierać po 5 wartości. Przygotować system dla modelu Mamdaniego i Takagi- Sugeno. Porównać wyniki.

   8.3. Sprawdzić dla zadania 2 wpływ zmiany metody wyostrzania oraz zmiany funkcji przynależności.

   8.4. Zaprojektować samodzielnie system wspomagania hamowania ABS przy użyciu logiki rozmytej.

Literatura

[1] George J Klir and Baozung Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, volume 574. Prentice Hall PTR New Jersey, 1995.

[2] Fuzzy Logic. Fuzzy logic and neural network handbook. 1996.

[3] Timothy J Ross et al. *Fuzzy logic with engineering applications*, volume 2. Wiley Online Library, 2004.

[4] Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy logic. *Computer*, 21(4):83–93, 1988.