

# Równania różniczkowe

Modelowanie i symulacja

14 kwietnia 2019

1. Sprawdź czy funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego:

(a)

$$\dot{y} = 2x, \quad y = x^2 + C$$

(b)

$$x\dot{y} = 2y, \quad y = Cx^2$$

(c)

$$y\dot{y} = e^{2x}, \quad y^2 = e^{2x} + C$$

(d)

$$\dot{y} = ky, \quad y = Ce^{kx}$$

2. Rozwiąż:

(a)

$$\dot{y} = e^{3x} - x$$

(b)

$$x\dot{y} = 1$$

(c)

$$(1+x)\dot{y} = x$$

(d)

$$\dot{y} = xe^{x^2}$$

(e)

$$\dot{y} = \sin^{-1}(x)$$

(f)

$$xy\dot{y} = y - 1$$

3. Równania jednorodne

W poprzednich zadaniach można było wprost odseparować funkcje, czyli:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1}$$

Równanie jest jednorodne, gdy:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \quad (2)$$

Dlatego będziemy dokonywać przekształcenia do postaci

$$z = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} \quad (3)$$

Rozwiąż:

(a)

$$(x + y)dx - (x - y)dy = 0$$

(b)

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

(c)

$$x^2 \dot{y} - 3xy - 2y^2 = 0$$

(d)

$$x^2 \dot{y} = 3(x^2 + y^2) \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + xy$$

4. Rozwiąż:

(a)

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

(b)

$$\left(x + \frac{2}{y}\right)dx + ydy = 0$$

(c)

$$(\sin(x) \tan(y) + 1)dx + (\cos(x) + \sec^2(y))dy = 0$$

(d)

$$(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$$

5. Rozwiąż równania liniowe:

(a)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x$$

(b)

$$x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4$$

(c)

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

(d)

$$(1 + x^2)dy + 2xydx = \cot(x)dx$$

6. Rozwiąż równania:

(a)

$$x\ddot{y} - \dot{y} = 3x^2$$

(b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

(c)

$$y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0$$

(d)

$$x\ddot{y} + \dot{y} = 4x$$