

Ćwiczenie 10: Równania różniczkowe — techniki numeryczne

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\frac{dy}{dt} = yt^2 - 1.2y, \quad y(0) = 1$$

w zakresie od $t = 0$ do 2.

- (a) Rozwiązać je analitycznie.
 - (b) Rozwiązać je w Excelu metodą Eulera dla kroków $h = 0.5$ oraz 0.25 . Przedstawić obydwa rozwiązania na jednym wykresie z rozwiązaniem dokładnym.
 - (c) Rozwiązać je w Excelu metodą Heuna z krokiem $h = 0.5$.
 - (d) Rozwiązać je w Excelu metodą Rungego z krokiem $h = 0.5$.
2. Powtórzyć poprzednie zadanie dla zagadnienia

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$$

Dodatkowo zaimplementować w Excelu schemat Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + k_3h) \end{aligned}$$

3. Zaimplementować w Matlabie metodę Rungego oraz metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu. Sprawdzić je na przykładzie z poprzedniego zadania. Następnie rozwiązać za pomocą tych samych procedur równanie

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.5\frac{dy}{dt} + 7y = 0, \quad y(0) = 4, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

w zakresie od $t = 0$ do 5 z krokiem $h = 0.5$.

4. Poziom wody y w zbiorniku w kształcie walca, z którego woda wypływa przez zawór umieszczony na dnie, opisuje równanie

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y},$$

gdzie: $k = 0.1$ i czas mierzony jest w minutach. Początkowo poziom wody wynosi 3 m. Rozwiązać to równanie w Excelu z zastosowaniem metody Eulera, z krokiem 0.5 min. Określić czas, po którym zbiornik będzie pusty.

5. Za pomocą funkcji `ode23` dostępnej w Matlabie rozwiązać następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych (tzw. równania Lotki-Volterra):

$$\frac{dx}{dt} = 1.2x - 0.6xy, \quad \frac{dy}{dt} = -0.8y + 0.3xy,$$

przy czym dla $t = 0$ zachodzi $x = 2$ oraz $y = 1$. Przedstawić rozwiązanie w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 20. Narysować wykres parametryczny $(x(t), y(t))$ dla $t \in [0, 20]$.

6. Za pomocą funkcji `ode45` dostępnej w Matlabie rozwiązać następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych (tzw. równanie Van der Pola):

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1,$$

przy czym dla $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Rozważyć następujące sytuacje:

- (a) $\mu = 1, t \in [0, 20]$
(b) $\mu = 1000, t \in [0, 3000]$

7. Następujące równania opisują ewolucję koncentracji trzech składników reakcji chemicznej:

$$\begin{aligned} \frac{dc_a}{dt} &= -20c_a c_c + 2c_b \\ \frac{dc_b}{dt} &= 20c_a c_c - 2c_b \\ \frac{dc_c}{dt} &= -20c_a c_c + 2c_b - 0.2c_c \end{aligned}$$

Rozwiązać je w Matlabie dla początkowych koncentracji $c_a = 500, c_b = 0, c_c = 500$ i horyzontu czasowego od 0 do 30 s.

8. Ładunek kondensatora w szeregowym obwodzie RLC opisuje równanie

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t), \quad q(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0$$

gdzie: $L = 1$ H, $C = 0.25$ F, $R = 1$ Ω , a źródło zasilające opisuje zależność

$$E(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

dla $E_0 = 1$ V, $\omega^2 = 3.5$ s². Wyznaczyć i przedstawić graficznie rozwiązanie w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 100 s.

9. Rozwiązać równania ruchu suwnicy dźwigowej (zob. slajdy do wykładu nr 11) dla następujących danych: $M = 20$ t, $m = 10$ t, $\ell = 10$ m, $x(0) = 0, \theta(0) = 30^\circ, u(t) = 0$ w horyzoncie czasowym od $t = 0$ do 10 s.