

## Ćwiczenie 11: Równania różniczkowe — zadania dodatkowe

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Sprawdź, że  $y = (t/2) \sin^2(t)$  jest rozwiązaniem równania

$$\ddot{y} + 4y = t + \sin(2t).$$

2. Znaleźć całki ogólne poniższych równań:

- (a)  $t\dot{y} + 5y = 3t$ ,
- (b)  $\dot{y} + 4y = 2t + 3e^{3t}$ ,
- (c)  $\dot{y} - 2y = te^{3t}$ ,
- (d)  $\dot{y} + 2ty = 3te^{-t^2}$ ,
- (e)  $\dot{y} + \frac{1}{t}y = e^{t^2}$ ,
- (f)  $t\dot{y} + 5y = t^3$ ,
- (g)  $(1 + t^2)\dot{y} + 9y = 0$ ,
- (h)  $\dot{y} - ye^t = 2te^{e^t}$ ,
- (i)  $\dot{y} + y = \sin(t)$ ,
- (j)  $\dot{y} + y \operatorname{ctg}(t) = 5e^{\cos(t)}$ ,
- (k)  $\dot{y} + 2y \cos(t) = \sin^2(t) \cos(t)$ ,

3. Rozwiązać poniższe zagadnienia:

- (a) 
$$\begin{cases} \dot{y} + 4y = 2t + 3e^t, \\ y(0) = 5, \end{cases}$$
- (b) 
$$\begin{cases} \dot{y} - 2y = te^{3t}, \\ y(3) = 1, \end{cases}$$
- (c) 
$$\begin{cases} \dot{y} + 2ty = t^3 e^{-t^2}, \\ y(0) = 4, \end{cases}$$
- (d) 
$$\begin{cases} \dot{y} + \frac{1}{t}y = e^{t^2}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$
- (e) 
$$\begin{cases} t\dot{y} + 5y = t^3, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} (1+t^2)\dot{y} + 9y = 0, \\ y(3) = 1, \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} \dot{y} - ye^t = 2te^{e^t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} \dot{y} + \frac{3}{t}y = \frac{\sin(t)}{t^3}, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Rozwiązać poniższe problemy:

$$(a) \begin{cases} \dot{y} = t(1+y^2), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} yy' = t^2, \\ y(1) = 3, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y^2\dot{y} = e^t, \\ y(1) = 4, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} ty\dot{y} = 1, \\ y(1) = 5, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \dot{y} = -\frac{t}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} e^t\dot{y} = y, \\ y(0) = 4, \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} t\dot{y} + \sin(y) = 0, \\ y(1) = \pi, \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} \dot{y} = -ty, \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

5. Rozwiązać numerycznie poniższe problemy:

$$(a) \begin{cases} \dot{y} = \frac{\sin(ty^2)}{t-21}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{t} + \frac{1}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \dot{y} = \frac{ty}{t^2-1}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \dot{y} = \frac{t - \sqrt{1-y^2}}{y}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \dot{y} = \log(\sqrt{t^2+y^2}), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

- (f) 
$$\begin{cases} \dot{y} = t^2 + y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
- (g) 
$$\begin{cases} \dot{y} = \max(t, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$
- (h) 
$$\begin{cases} \dot{y} = (y - t)^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$
- (i) 
$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{t^2}{|y|}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$
- (j) 
$$\begin{cases} \dot{y} = \operatorname{sgn}(ty) \sqrt{5 \log(|y|)}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$
- (k) 
$$\begin{cases} t\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - 9)y = 0, \\ y(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = 1, \end{cases}$$
- (l) 
$$\begin{cases} t^2\ddot{y} + t\dot{y} - (t^2 + 4)y = 0, \\ y(1) = 0, \quad \dot{y}(1) = 1, \end{cases}$$
- (m) 
$$\begin{cases} \ddot{y} + \sin(y) = 0, \\ y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$
- (n) 
$$\begin{cases} \ddot{y} - t\dot{y} + 7y = 0, \\ y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$
- (o) 
$$\begin{cases} t\ddot{y} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{y} - \frac{3y}{4} = 0, \\ y(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = 1. \end{cases}$$