Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Automatyki, Elektroniki i Elektrotechniki

Laboratorium modelowania i symulacji

Ćwiczenie 3: Wprowadzenie do programu Matlab

1. Wyznaczyć wartość sumy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

   Jak podzielić tak długą formułę na kilka linii poleceń? Czym różnią się rezultaty operacji `1900/81` oraz `81\1900`?

2. Omówić różnice między poleceniami `help` oraz `lookfor`. Na tej podstawie określić nazwy funkcji służących do obliczania pierwiastka (*ang.* root), logarytmu (*ang.* logarithm) oraz funkcji arc sin (polskie „sinus" to po angielsku „sine"). Co uzyskuje się poprzez polecenie `help cedit`?

   Bardzo pożytecznym poleceniem przy przeglądaniu pomocy wyświetlanych przez polecenie `help` jest `more`. Proszę zapoznać się z jego składnią i przetestować działanie.

3. Jak w MATLABie ie definiuje się zmienne? W jaki sposób nadaje się im wartości? Jak wypisać na ekranie monitora aktualną wartość danej zmiennej? Po przypisaniu zmiennym x, y i z wybranych wartości wyznaczyć a i b, jeżeli

   (a) $a = \sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}, \quad b = x\left(\operatorname{arc\,tg} z + e^{-(x+3)}\right);$

   (b) $a = \dfrac{3 + e^{y-1}}{|y - \operatorname{tg} z|}, \quad b = 1 + |y - x| + \dfrac{(y-x)^2}{2} + \dfrac{|y-x|^3}{3};$

   (c) $a = (1+y)\dfrac{x + y/(x^2+4)}{e^{-x-2} + 1/(x^2+4)}, \quad b = \dfrac{1 + \cos(y-2)}{x^4 + \sin^2 z};$

   (d) $a = \dfrac{2\cos(x - \pi/6)}{1/2 + \sin^2 y}, \quad b = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2};$

   (e) $a = \ln\left|(y - \sqrt{|x|})\left(x - \dfrac{y}{z + x^2/4}\right)\right|, \quad b = \cos^2\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z}\right).$

   Czy MATLAB rozróżnia duże i małe litery?

4. (Kilka uzupełnień) Jaką rolę pełni w MATLABie średnik na końcu wprowadzanego polecenia? Proszę sprawdzić to na przykładzie poleceń

```
>> p = 3.5
```

   oraz

```
>> p = 3.5;
```

   Co naprawdę reprezentuje sobą napis `ans` wypisywany np. po wprowadzeniu polecenia

```
>> 4 + 3
```

   Co powodują polecenia `who` oraz `whos`?

5. Zdefiniować macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

oraz wektor wierszowy $r = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$. Co spowoduje polecenie `A = [A; r]`? Jak w takim razie doprowadzić do tego, aby macierz A miała postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 14 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \\ 10 & 11 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Na zakończenie proszę jeszcze zinterpretować rezultaty poleceń

```
>> size(A)
```

oraz

```
>> length(r)
```

6. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Obliczyć

(a) $A + B$
(b) $A - B$
(c) $3A + 4B$
(d) AB
(e) $A^3 + A^2 - 2A$

7. Dane są tablice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Obliczyć, o ile jest to możliwe, wartości następujących wyrażeń:

$$B + D, \quad 3A, \quad -2C, \quad BA, \quad DB, \quad 2A + B - C, \quad CD - DC, \quad 2B - D, \quad D^2, \quad B^2 + D^2$$

8. Dane są tablice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić, że zachodzi równość $A(B + C) = AB + AC$.

9. Iloma sposobami można wprowadzić tablicę B o elementach zespolonych:

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 5i & 2 + 6i \\ 3 + 7i & 4 + 8i \end{bmatrix}$$

Zmiennej z przypisać wartość elementu znajdującego się w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie rozważanej tablicy.

10. Znaleźć odwrotności poniższych macierzy (o ile istnieją). Sprawdzić otrzymane rezultaty.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Wprowdzić wektor x postaci

$$x = \begin{bmatrix} -1.3 & \sqrt{3} & \frac{4}{5}(1+2+3) \end{bmatrix}$$

Co spowoduje polecenie `x(5) = abs(x(1))`?

12. Zapisać wartości wszystkich użytych do tej pory zmiennych na dysku. Ponadto wartość tablic A i x zapisać w pliku *temp.mat*. Zakończyć pracę z programem. Określić format plików, w których zapisano przed chwilą wartości zmiennych (binarny czy tekstowy). Ponownie uruchomić program, a następnie odtworzyć wartości zmiennych, które zapisano w plikach. Jak zmienić format danych zapisywanych w omawiany sposób?

Czym różnią się polecenia `what` i `dir`? Czy polecenie `type` ma jakiś związek z poleceniem DOSa o tej samej nazwie? Skopiować plik *matlab.mat* do pliku *matlab.old* (także bez opuszczania programu!). Sprawdzić, czy operacja zakończyła się oczekiwanym rezultatem. Jak skasować plik *matlab.old*?

13. Do czego służy polecenie `diary`? Wydaje się ono dość przydatne w początkowym etapie nauki poleceń MATLABa.

14. Wprowadzić wektor x za pomocą polecenia

```
>> x = [4\3 1.2345e-6]
```

Sprawdzić, w jaki sposób wypisywana jest jego wartość po wprowadzeniu każdego z poniższych poleceń:

(a) `format short`
(b) `format short e`
(c) `format long`
(d) `format long e`
(e) `format bank`
(f) `format hex`
(g) `format +`

Proszę zastanowić się nad użytecznością ostatniego z tych poleceń.

Jeszcze jednym poleceniem tego typu jest `format compact`. Porównać sposób wyświetlania informacji na ekranie przed i po jego wprowdzeniu.

15. (Operacja transpozycji) Proszę wprowadzić polecenia

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 0]
>> B = A'
```

Wywnioskować stąd jaką rolę pełni w MATLABie apostrof `'`. Jaki więc będzie rezultat polecenia

```
>> x = [-1 0 2]'
```

16. Rozwiązać poniższe układy równań. Sprawdzić poprawność otrzymanych rezultatów. W jaki sposób można stwierdzić czy układ ma jednoznaczne rozwiązanie, nie posiada rozwiązania lub ma nieskończenie wiele rozwiązań? (*Wskazówka:* przypomnieć sobie twierdzenie Kroneckera-Capelliego.)

(a) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2y-4z &= 1 \\ x+4y-2z &= 2 \\ x-y+z &= 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x-4y+3z-4w &= 2 \\ -x+3y-2z+w &= 4 \\ 2x-y+z+2w &= 3 \\ x+2y-z+w &= 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+3z^2 &= 1 \\ x+y-z^2 &= 3 \\ 2x+3y &= 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ 2x+y+6z &= 22 \\ 3x+6y+z &= 18 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 4 \\ x+y+z &= 2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+7y-3z &= 7 \\ 3x+3y+3z &= 3 \end{cases}$

17. W MATLABie rozwiązanie układu równań liniowych $Ax = b$ można otrzymać albo stosując metodę eliminacji Gaussa (`x = A \ b`), albo korzystając z zależności $x = A^{-1}b$ (`x = inv(A) * b`). Który z wymienionych sposobów wymaga mniejszego nakładu obliczeń? Odpowiedź sprawdzić na układach równań z poprzedniego zadania poprzez wykorzystaniu funkcji `flops`.

18. Symbolem `.*` oznacza się tzw. mnożenie „element-przez-element” dwóch tablic. Wywnioskować na czym polega ta operacja wprowadzając polecenia

```
>> x = [1 2 3]; y = [4 5 6];
>> z = x .* y
```

Przez analogię określić jaki będzie rezultat poleceń

```
>> z = x .\ y
```

oraz

```
>> z = x .^ y
```

Ponadto zinterpretować wyniki poleceń

```
>> z = x .^ 2
```

oraz

```
>> z = 2 .^ [x y]
```

19. Wykonać obliczenia ręcznie i porównać z rezultatami pracy programu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) `A .* B'` (b) `A .\ B` (c) `A .^ B`

20. Liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną macierzy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, jeśli istnieje taki niezerowy wektor $x \in \mathbb{C}^n$, że zachodzi równość

$$Ax = \lambda x$$

Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym macierzy A przynależnym do λ*. W MATLABie wartości (i opcjonalnie wektory) własne uzyskuje się poprzez wywołanie funkcji `eig`.

Wyznaczyć wartości i wektory własne następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

21. Sprawdzić, że dla $(n \times n)$-macierzy A zachodzi

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A.

22. Najczęściej używanymi normami wektora $x \in \mathbb{R}^n$ są

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Indukowane przez nie normy macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ są postaci

$$\|A\|_1 := \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}, \quad \|A\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

gdzie $\lambda_{\max}(A^T A)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A^T A$. Ponadto czasami używa się również tzw. *normy Frobeniusa*:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Wyznaczyć wartości tych norm dla poniższych wektorów i macierzy:

$$[-1, 1, -2]^T, \quad [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T, \quad [2, 1, -3, 4]^T,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proszę wykonać ćwiczenie posługując się wyłącznie funkcjami `max`, `sum`, `abs`, oraz `sqrt`. Następnie zapoznać się z opisem funkcji `norm`. Korzystając z niej sprawdzić, że dla powyższych wektorów i tablic spełnione są tożsamości:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2^2 \leqslant \|x\|_1\|x\|_\infty \leqslant 0.5(\sqrt{n}+1)\|x\|_2^2,$$

oraz

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|, \quad \|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|, \quad 1/\|A^{-1}\| \leqslant |\lambda| \leqslant \|A\|$$

gdzie λ jest dowolną wartością własną macierzy A.

23. Co jest efektem wykonania poniższych instrukcji?

(a) `x = 1:5` (b) `y = 0: pi/4: pi` (c) `z = 6:-1:1`

Zapisać te same instrukcje przypisania przy użyciu funkcji `linspace`. Utworzyć tablicę, której pierwsza kolumna składa się z punktów $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{15} = 3$ takich, że $x_i - x_{i-1} = 0.2$, $i = 1, \ldots, 15$, druga kolumna natomiast — z odpowiednich wartości $y_i = \exp(-x_i)\sin(x_i)$.

24. Wytłumaczyć rezultat poniższego ciągu instrukcji:

```
>> A = [1 2; 3 4; 5 6]
>> A(:) = 11:16
```

25. Dana jest następująca macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

Wprowadzieć ją używając minimalną liczbę operacji. Przewidzieć rezultat wykonania poniższych operacji, a następnie sprawdzić swoje przypuszczenia przy użyciu komputera.

(a)	`A(:,1)`	(b)	`A(2,:)`	(c)	`A(:,2:3)`
(d)	`A(2:3,2:3)`	(e)	`A(:,1:2:3)`	(f)	`A(2:3)`
(g)	`A(:)`	(h)	`A(:,:)`	(i)	`ones(2,2)`
(j)	`eye(2)`	(k)	`B = [A, [ones(2,2); eye(2)] ]`	(l)	`diag(A)`
(m)	`diag(A,1)`	(n)	`diag(A,-1)`	(o)	`diag(A,2)`

26. Przy pomocy funkcji `rand` wygenerować macierz A o pięciu wierszach i dziesięciu kolumnach, której elementy będą losowymi liczbami całkowitymi z przedziału $[-10, 10]$.
    (a) Przy pomocy jednej instrukcji odwrócić w A kolejność kolumn (tzn. kolumna pierwsza ma się stać ostatnią, druga — przedostatnią, itd.).
    (b) Przy pomocy jednej instrukcji zamienić miejscami wiersz pierwszy z trzecim.
    (c) Przy pomocy jednej instrukcji zamienić ze sobą kolumny: drugą z czwartą, szóstą z ósmą oraz dziesiątą z pierwszą (jednocześnie!).
    (d) Używając pojęcia macierzy pustej `[ ]` usunąć kolumny: piątą, szóstą i dziewiątą.

27. Celem zadania jest pokazanie możliwości operowania funkcjami (np. funkcją *sinus*) w odniesieniu do całych macierzy.
    (a) Wprowadzić następującą macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi/3 \\ \pi/6 & \pi/2 \end{bmatrix}$$

    (b) Wyznaczyć sinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B1$.
    (c) Wyznaczyć cosinusy poszczególnych elementów i umieścić je w tablicy $B2$.
    (d) Obliczyć $B1^2 + B2^2$. Zauważyć, że rezultatem nie jest macierz jednostkowa.
    (e) Określić wartości i wektory własne macierzy A; macierzy wektorów własnych nadać nazwę M, a macierzy wartości własnych — nazwę L.
    (f) Obliczyć $M \sin(L) M^{-1}$.